ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 10 (521)

УДК 517.929

Е.С. ЖУКОВСКИЙ

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА В БАНАХОВОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

К нелинейному интегральному уравнению Вольтерра сводятся многочисленные прикладные и теоретические задачи, например, задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, краевые задачи для уравнений параболического типа и т. д. ([1], с. 754). Современные математические модели в физике, экономике, биологии, учитывающие инерцию объектов, конечность скоростей распространения сигналов, факторы запаздывания, описываются функционально-дифференциальными уравнениями [2]–[4], задача Коши для которых эквивалентна уравнениям с вольтерровыми операторами в некотором банаховом функциональном пространстве. Такие операторные уравнения наследуют многие свойства классических уравнений Вольтерра и являются их естественным обобщением.

В данной работе рассмотрены утверждения о существовании, единственности, продолжаемости локальных решений нелинейных обобщенно вольтерровых уравнений, получены оценки области определения предельно продолженных решений, доказаны теоремы о непрерывной зависимости решений от параметров. Все перечисленные результаты являются новыми применительно не только к обобщенному, но и "классическому" уравнению Вольтерра.

1. Неподвижные точки нелинейных вольтерровых операторов

Поставим в соответствие каждому $\gamma \in [0, b-a]$ некоторое измеримое множество e_γ с мерой $\mu(e_\gamma) = \gamma$ таким образом, что

$$\forall \gamma, \eta \in [0, b-a] \quad \gamma < \eta \Rightarrow e_\gamma \subset e_\eta. \tag{1}$$

Обозначим совокупность построенных так множеств через v. Пусть Y, B — линейные нормированные пространства функций $f : [a,b] \to R^m$. Отображение $F : Y \to B$ будем называть *вольтерровым на системе* v, если для каждого множества $e_\gamma \in v$ и любых функций $y, z \in Y$ из $y(s) = z(s)$ на e_γ следует $(Fy)(s) = (Fz)(s)$ на e_γ. Известное определение из [5] соответствует вольтерровости на системе множеств $e_\gamma = [a, a+\gamma]$. Отметим, что современные трактовки понятия вольтерровости для линейных операторов предложены в работах [6]–[15]. Нелинейные обобщенно вольтерровые операторы пока изучались мало. С.А. Гусаренко предложен признак разрешимости уравнения с "$\mathcal{B}$-вольтерровым" оператором ([3], сс. 284, 285).

Исследование свойств нелинейных вольтерровых на системе v операторов начнем с очевидного замечания, что сумма и композиция таких операторов является вольтерровым оператором на системе v.

Будем говорить, что в функциональном пространстве B относительно системы v выполнено *V-условие*, если это пространство банахово и для любого множества $e_\gamma \in v$ и любой сходящейся последовательности $\{y_i\} \subset B$, $\|y_i - y\|_B \to 0$, из равенства $y_i(t) = 0$, $i = 1, 2, \dots$, при всех $t \in e_\gamma$ следует, что и предельная функция $y(t) = 0$ при $t \in e_\gamma$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-01-00140), Министерства образования Российской Федерации (проект № Е02-1.0-212).

Теорема 1. *Пусть в банаховом пространстве B выполнено V-условие. Если последовательность вольтерровых на v операторов $F_i : Y \to B$ сходится на каждом $y \in Y$ к оператору $F : Y \to B$, то оператор F будет также вольтерров на системе v.*

Рассмотрим уравнение

$$(Fx)(t) = 0, \quad t \in [a, b], \tag{2}$$

с вольтерровым на системе v оператором $F : Y \to B$. Обозначим через $Y(e_\gamma)$, $B(e_\gamma)$ пространства сужений функций из Y, B на множество e_γ. Определим оператор $\Pi_\gamma : B \to B(e_\gamma)$ равенством $(\Pi_\gamma x)(t) = x(t)$, $t \in e_\gamma$. Пусть оператор $P_\gamma : Y(e_\gamma) \to Y$ некоторым образом продолжает функции из $Y(e_\gamma)$ на весь отрезок $[a, b]$. Если существует число $\gamma \in (0, b - a)$ и элемент $z_\gamma \in Y(e_\gamma)$, удовлетворяющий равенству $\Pi_\gamma F P_\gamma z_\gamma = 0$, то уравнение (2) будем называть *локально разрешимым*, а функцию z_γ — *локальным решением, определенным на* e_γ. Элемент $z_{b-a} \in Y$, удовлетворяющий уравнению (2), назовем *глобальным решением.* Будем говорить, что функция $z_\eta : \bigcup\limits_{\gamma<\eta} e_\gamma \to R^m$, $\eta \in (0, b - a]$, является *предельно продолженным решением* уравнения (2), если при любом $\gamma \in (0, \eta)$ сужение z_γ функции z_η на множество e_γ является локальным решением и $\lim\limits_{\gamma \to \eta - 0} \|z_\gamma\| = \infty$. Вследствие вольтерровости оператора F сужение z_γ решения z_ζ (локального, глобального или предельно продолженного) на произвольное множество e_γ, $\gamma \in (0, \zeta)$, будет локальным решением уравнения (2). Будем называть решение z_γ *частью решения* z_ζ, а решение z_ζ — *продолжением решения* z_γ.

Рассмотрим утверждения о неподвижных точках вольтеррового на v оператора $K : B \to B$, т. е. исследуем разрешимость уравнения

$$x(t) - (Kx)(t) = 0, \quad t \in [a, b], \tag{3}$$

являющегося частным случаем уравнения (2).

Зададим норму в пространстве $B(e_\gamma)$ формулой $\|y_\gamma\|_{B(e_\gamma)} = \inf \|y\|_B$, где нижняя грань берется по всевозможным продолжениям $y \in B$ функции $y_\gamma \in B(e_\gamma)$. Если выполнено V-условие, то при таком определении нормы пространство $B(e_\gamma)$ становится банаховым. Определим отображение $Z : (0, b - a] \times B \to R$ формулой $Z(\gamma, y) = \|\Pi_\gamma y\|_{B(e_\gamma)}$. Вследствие (1) при каждом фиксированном $y \in B$ функция $Z(\cdot, y)$ не убывает, и поэтому существует $\lim\limits_{\gamma \to 0+0} Z(\gamma, y) = z_0(y)$. Доопределим отображение Z значением $Z(0, y) = z_0(y)$.

Оператор $K : B \to B$ назовем *локально сжимающим на системе* v, если существуют такие числа $q < 1$, $\delta > 0$, что выполнены следующие условия:

1) $\forall \xi \in (0, \delta) \quad \forall x, y \in B \quad Z(\xi, Kx - Ky) \leqslant qZ(\xi, x - y)$;
2) $\forall \tau, \gamma \in (0, b - a] \quad \tau < \gamma < \tau + \delta \quad \forall x, y \in B$

$$\{x(t) = y(t),\ \forall t \in e_\tau \ \Rightarrow\ Z(\gamma, Kx - Ky) \leqslant qZ(\gamma, x - y)\}.$$

Оператор $K : B \to B$ назовем *улучшающим на системе* v, если

$$\exists \varrho \ \forall x \in B \ \ Z(0, Kx) \leqslant \varrho, \tag{4}$$

$$\forall r > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in B \ \forall \tau, \gamma \in [0, b - a] \ \begin{cases} |\tau - \gamma| < \delta, \\ \|x\| \leqslant r \end{cases} \Rightarrow |Z(\gamma, Kx) - Z(\tau, Kx)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Если оператор K линеен, то условие (4) равносильно равенству $Z(0, Kx) = 0$ при всех $x \in B$. Отметим также, что линейный улучшающий на v оператор является локально сжимающим на этой совокупности множеств. Более того, имеет место

Теорема 2. *Пусть в банаховом пространстве B выполнено V-условие. Если для оператора $K : B \to B$ существует такой линейный вольтерровый и улучшающий на системе v оператор $W : B \to B$, что при всех $x, y \in B$, $\gamma \in [0, b-a]$ выполнено неравенство*

$$Z(\gamma, Kx - Ky) \leqslant Z(\gamma, W(x-y)), \tag{6}$$

то оператор K является локально сжимающим на системе v.

Доказательство. Вследствие улучшаемости оператора W можно выбрать произвольно $q \in (0,1)$ и найти такое положительное δ, что

$$\forall x \in B \ \forall \tau, \gamma \in [0, b-a] \ \ |\tau - \gamma| < \delta \ \Rightarrow \ |Z(\tau, Wx) - Z(\gamma, Wx)| < q\|x\|, \tag{7}$$

и, кроме того, $Z(0, Wx) = 0$. Таким образом, при всех $\xi \in (0, \delta)$ выполнено

$$Z(\xi, Kx - Ky) \leqslant Z(\xi, W(x-y)) - Z(0, W(x-y)) < q\|x-y\|.$$

Вследствие вольтерровости оператора W последнее неравенство останется верным, если у функций x, y изменить значения при $t \in [a,b] \setminus e_\xi$. Эти значения можно изменить так, что для любого положительного ε будет иметь место оценка $\|x-y\| < Z(\xi, x-y) + \varepsilon$. Таким образом, получаем

$$Z(\xi, Kx - Ky) \leqslant qZ(\xi, x-y).$$

Далее, при всех $\tau, \gamma \in [0, b-a]$, $\tau < \gamma < \tau + \delta$, и всех $x, y \in B$ выполнено неравенство (6). Если $x(t) = y(t)$ при $t \in e_\tau$, то $(W(x-y))(t) = 0$, $t \in e_\tau$, вследствие вольтерровости линейного оператора W, и поэтому $Z(\tau, W(x-y)) = 0$. Тогда на основании (7) получаем

$$Z(\gamma, Kx - Ky) \leqslant Z(\gamma, W(x-y)) - Z(\tau, W(x-y)) < q\|x-y\|.$$

Осталось вновь заметить, что значения функций x, y можно изменить при $t \in [a,b] \setminus e_\gamma$ так, чтобы $\|x-y\| < Z(\gamma, x-y) + \varepsilon$. $\square$

Класс локально сжимающих на системе v операторов достаточно широк. Ему, конечно же, принадлежат не только сжимающие операторы и операторы, описанные в теореме 2. Важно заметить, что свойством локальной сжимаемости могут обладать даже разрывные операторы. Так, например, оператор

$$(Kx)(t) = \begin{cases} 0{,}5x(t), & \text{если } t \in [0,\ 0{,}5]; \\ 0{,}5x(0{,}5) + x(0)(t - 0{,}5), & \text{если } t \in (0{,}5,\ 1],\ x(0) \text{ — рациональное число;} \\ 0{,}5x(0{,}5), & \text{если } t \in (0{,}5,\ 1],\ x(0) \text{ — иррациональное число,} \end{cases}$$

действующий в пространстве $C_{[0,1]}$ непрерывных на $[0,1]$ действительных функций, ни в какой точке $x \in C_{[0,1]}$ не является непрерывным. Любая его степень $K^n : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}$ также разрывна в каждой точке. Тем не менее, этот оператор вольтерровый и локально сжимающий на системе $v = \{[0, \gamma]\}$.

Теорема 3. *Пусть в банаховом пространстве B выполнено V-условие, оператор $K : B \to B$ является вольтерровым и локально сжимающим на системе v. Тогда при любом $\gamma \in (0, b-a]$ существует единственное решение $x_\gamma \in B(e_\gamma)$ уравнения $x_\gamma = \Pi_\gamma K P_\gamma x_\gamma$. Другими словами, существует единственное глобальное решение уравнения (3), и всякое локальное решение является частью этого решения.*

Доказательство. Возьмем числа $q < 1$, $\delta > 0$, удовлетворяющие всем условиям из определения локальной сжимаемости оператора K. Пусть $\xi = \delta/2$. Уравнение $x_\xi = \Pi_\xi K P_\xi x_\xi$ имеет единственное решение $z_\xi \in B(e_\xi)$, т. к. оператор $K_\xi = \Pi_\xi K P_\xi : B(e_\xi) \to B(e_\xi)$ является сжимающим. Пусть $z \in B$ — некоторое продолжение функции z_ξ. Для нахождения решения уравнения (3) при $t \in [a, b] \setminus e_\xi$ сделаем замену $y = x - z$. Получим уравнение

$$y = K(y + z) - z. \tag{8}$$

Определяемый равенством $\overline{K}y = K(y + z) - z$ оператор $\overline{K}$ действует в подпространстве $\overline{B}_\xi \subset B$ функций, тождественно равных нулю на e_ξ. При $t \in e_{2\xi}$ уравнение (8) является уравнением

$$y_{2\xi} = \Pi_{2\xi} \overline{K} P_{2\xi} y_{2\xi} \tag{9}$$

со сжимающим оператором $\overline{K}_{2\xi} = \Pi_{2\xi} \overline{K} P_{2\xi}$, действующим в подпространстве функций из $B(e_{2\xi})$, равных нулю на множестве e_ξ. Уравнение (9) однозначно разрешимо. Пусть $z_{2\xi}$ — его решение. Тогда функция $(\Pi_{2\xi} z + z_{2\xi})(t)$ является решением уравнения (3) при $t \in e_{2\xi}$.

Продолжая аналогичные рассуждения, за конечное число $[\frac{b-a}{\xi}]$ шагов построим единственное глобальное решение $z_{b-a} \in B$ уравнения (3). Любое локальное решение z_γ, определенное на e_γ, с помощью таких же построений может быть продолжено до глобального решения. Из единственности решения z_{b-a} следует единственность локального решения z_γ.

Следствие. Пусть в банаховом пространстве B выполнено V-условие, оператор $K : B \to B$ является вольтерровым на системе v, и найдется такой линейный вольтерровый и улучшающий на системе v оператор $W : B \to B$, что имеет место оценка (6). Тогда существует единственное глобальное решение уравнения (3), и всякое локальное решение является его частью.

Теорема 4. *Если в банаховом пространстве B выполнено V-условие, и если оператор $K : B \to B$ является вполне непрерывным, вольтерровым и улучшающим на системе v, то уравнение* (3) *локально разрешимо, любое локальное решение является частью либо глобального решения, либо предельно продолженного решения.*

Доказательство. Вследствие улучшаемости оператора K существует число ϱ, для которого выполнено неравенство (4). Пусть $r = 2\varrho$, $\varepsilon = \varrho/2$. Найдем δ, удовлетворяющее условию (5). Обозначим $\xi = \delta/2$. Для любого $x \in B$, $\|x\| < 2\varrho$, имеет место

$$Z(\xi, Kx) = \big(Z(\xi, Kx) - Z(0, Kx)\big) + Z(0, Kx) < \frac{\varrho}{2} + \varrho = \frac{3}{2}\varrho. \tag{10}$$

В пространстве $B(e_\xi)$ выделим замкнутый шар U с центром в нуле радиуса $\frac{3}{2}\varrho$. Оператором P_ξ продолжим каждую функцию из $B(e_\xi)$ так, чтобы ее норма увеличилась менее, чем на $\frac{\varrho}{2}$. Из неравенства (10) следует включение $\Pi_\xi K P_\xi U \subset U$. А т. к. оператор $K_\xi = \Pi_\xi K P_\xi : B(e_\xi) \to B(e_\xi)$ вполне непрерывен, то он имеет неподвижную точку z_ξ, являющуюся локальным решением уравнения (3), определенным на e_ξ.

Теперь докажем, что любое локальное решение z_{γ_1}, определенное на некотором множестве e_{γ_1}, продолжаемо до глобального или предельно продолженного. Выберем $r = \|z_{\gamma_1}\| + \varrho$, $\varepsilon = \frac{\varrho}{2}$ и найдем δ_2, являющееся точной верхней границей всевозможных чисел δ, удовлетворяющих условию (5). Обозначим $\gamma_2 = \gamma_1 + \frac{\delta_2}{2}$. Для любого такого $x \in B$, что $\|x\| < \|z_{\gamma_1}\| + \varrho$, $x(t) = z_{\gamma_1}(t)$ при $t \in e_{\gamma_1}$, выполнено

$$Z(\gamma_2, Kx) = \big(Z(\gamma_2, Kx) - Z(\gamma_1, Kx)\big) + Z(\gamma_1, Kx) < \varrho/2 + \|z_{\gamma_1}\|. \tag{11}$$

В пространстве $B(e_{\gamma_2})$ выделим замкнутый шар с центром в нуле радиуса $\|z_{\gamma_1}\| + \varrho$, а в нем — множество U_2 функций, совпадающих с $z_{\gamma_1}(t)$ при $t \in e_{\gamma_1}$. Множество U_2 замкнуто. Оператором P_{γ_2} продолжим каждую функцию из $B(e_{\gamma_2})$ так, чтобы ее норма увеличилась менее, чем на $\varrho/2$. Для таких продолжений можем воспользоваться неравенством (11), из которого будет следовать включение $\Pi_{\gamma_2} K P_{\gamma_2} U_2 \subset U_2$. Так как оператор $K_{\gamma_2} = \Pi_{\gamma_2} K P_{\gamma_2} : B(e_{\gamma_2}) \to B(e_{\gamma_2})$

вполне непрерывен, то он имеет неподвижную точку z_{γ_2}. Это локальное решение уравнения (3), определенное на e_{γ_2} и являющееся продолжением решения z_{γ_1}.

Докажем, что, продолжая описанные построения, получим глобальное или предельно продолженное решение. Вычислим $\lim\limits_{i\to\infty}\gamma_i = \eta$ и рассмотрим функцию z_η, определенную на $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} e_{\gamma_i}$, сужением которой на e_{γ_i} будет z_{γ_i}, $i = 1, 2, \ldots$ Если функция z_η не является предельно продолженным решением, то найдется такое число N, что при всех натуральных i имеет место $\|z_{\gamma_i}\| \leqslant N$. Возьмем $r = N + \varrho$, $\varepsilon = \varrho/2$ и найдем $\overline{\delta}$, являющееся точной верхней границей всевозможных чисел δ, удовлетворяющих условию (5). Так как $\|z_{\gamma_i}\| + \varrho \leqslant N + \varrho$, то при любом i выполнено $\delta_i \geqslant \overline{\delta}$. Это означает, что за конечное число шагов будет построено глобальное решение уравнения (3). $\square$

Будем говорить, что в банаховом пространстве B относительно системы v выполнено *C-условие*, если для каждого $y \in B$ функция $Z(\cdot, y)$ непрерывна. Если дополнительно $Z(0, y) = 0$ при всех $y \in B$, то будем считать, что пространство B удовлетворяет *условию* C_0. Заметим, что условие C_0 выполнено, например, для любой системы v в пространствах $L^m_{p[a,b]}$, $1 \leqslant p < \infty$, суммируемых функций, для системы множеств $e_\gamma = [a, a+\gamma]$ в пространстве $C^m_{0[a,b]}$ таких непрерывных функций $x : [a, b] \to R^m$, что $x(a) = 0$. В ([12], с. 25) доказано, что если в банаховом пространстве B выполнены условия V, C, то элементы любого предкомпактного множества $H \subset B$ имеют равностепенно непрерывные нормы

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in H\ \forall\tau, \gamma \in [0, b-a]\quad |\tau - \gamma| < \delta\ \Rightarrow\ |Z(\tau, x) - Z(\gamma, x)| < \varepsilon.$$

Следствие 1. Пусть в банаховом пространстве B выполнены условия V, C_0, оператор $K : B \to B$ является вполне непрерывным вольтерровым на системе v. Тогда уравнение (3) локально разрешимо, любое локальное решение является частью либо глобального решения, либо предельно продолженного решения.

Доказательство. Образом шара U произвольного радиуса r является предкомпактное множество KU, элементы которого имеют равностепенно непрерывные нормы ([12], с. 25). Таким образом, выполнено условие (5). Кроме того, для всех $y \in B$ имеет место $Z(0, Ky) = 0$, т. е. верно также и (4). Итак, оператор K улучшающий на v, и можно воспользоваться теоремой 4. $\square$

Аналогично доказывается

Следствие 2. Пусть в банаховом пространстве B выполнены условия V, C, оператор $K : B \to B$ является вполне непрерывным вольтерровым на системе v и имеет место неравенство (4). Тогда уравнение (3) локально разрешимо, любое локальное решение является частью либо глобального решения, либо предельно продолженного решения.

В формулировке теоремы 4 можно несколько ослабить требование улучшаемости оператора K.

Теорема 5. *Пусть банахово пространство B удовлетворяет V-условию, для вполне непрерывного, вольтеррового на системе v оператора $K : B \to B$ имеет место* (5) *и существуют такие числа $\varrho_2 \geqslant \varrho_1 \geqslant 0$, что при всех $x \in B$, если $Z(0, x) \in [\varrho_1, \varrho_2]$, то $Z(0, Kx) \in [\varrho_1, \varrho_2]$. Тогда уравнение* (3) *локально разрешимо, любое локальное решение является частью либо глобального решения, либо предельно продолженного решения.*

Доказательство этого утверждения использует те же идеи, что и доказательство предыдущей теоремы.

Большое значение в теории нелинейных интегральных уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений имеют оценки вертикальных асимптот решений. Например, промежуток существования непрерывного решения уравнения Рикатти является промежутком неосцилляции решений соответствующего линейного дифференциального уравнения второго порядка ([16], с. 42). Метод приближенного построения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих вертикальные асимптоты, предложен в [17]. В терминологии данной работы наличие вертикальной асимптоты $t=\eta$ означает, что решение z_η является предельно продолженным. В случае, когда уравнение (3) имеет бесконечное множество $\{z_\eta\}$ предельно продолженных решений, интерес представляют оценки нижней грани η_0 всевозможных чисел η — мер множеств e_η, на которых определены предельно продолженные решения. Для уравнений и включений с вольтерровыми по А.Н. Тихонову операторами в пространстве непрерывных функций такую задачу поставил и решил А.И. Булгаков. В [18] он доказал, что $\eta_0>0$, т. е. асимптоты решений отделены от начальной точки $t=a$, и существует промежуток, входящий в область определения любого предельно продолженного решения. Сформулируем соответствующий результат для уравнеий в банаховом пространстве.

Теорема 6. *Пусть оператор $K:B\to B$ является вольтерровым и улучшающим на системе v. Тогда для произвольного r_0, $r_0>\varrho$, существует такое $\delta>0$, что для любого локального решения z_γ уравнения (3), определенного на некотором множестве $e_\gamma\in v$, если $\|z_\gamma\|_{B(e_\gamma)}\geqslant r_0$, то $\gamma=\mu(e_\gamma)\geqslant\delta$. В частности, существует такое положительное β, что для области определения $\bigcup\limits_{\gamma<\eta} e_\gamma$ любого предельно продолженного решения z_η выполнено $\eta=\mu(\bigcup\limits_{\gamma<\eta} e_\gamma)>\beta$.*

Доказательство. Выберем числа r, $r>r_0>\varrho$, $\varepsilon=0{,}5(r_0-\varrho)$ и найдем $\delta>0$, удовлетворяющее условию (5) в определении улучшаемости оператора K.

Возьмем произвольное решение z_γ, норма которого $\|z_\gamma\|_{B(e_\gamma)}\geqslant r_0$. Для любого $\xi\in(0,\gamma]$ обозначим через $z_\xi=\Pi_\xi P_\gamma z_\gamma$ сужение решения z_γ на множество e_ξ. Функция $\|z_\xi\|_{B(e_\xi)}$ аргумента $\xi\in[0,\gamma]$ не убывает и непрерывна. Доопределим ее в нуле значением $Z_0=\lim\limits_{\xi\to0}\|z_\xi\|_{B(e_\xi)}$. Согласно (4) имеем $Z_0\le\varrho$. Существует такое $\gamma_0\in[0,\gamma]$, что $\|z_{\gamma_0}\|_{B(e_{\gamma_0})}=r_0$. Продолжим функцию z_{γ_0} до некоторой функции $z\in B$ так, что $\|z\|\leqslant r$. Из (5) следует $Z(\delta,Kz)=Z_0+(Z(\delta,Kz)-Z_0)\leqslant Z_0+\varepsilon<0{,}5(r_0+\varrho)<r_0$. Это означает, что $\gamma_0>\delta$. $\square$

Существенность условий приведенного утверждения подтверждается уравнением

$$x(t)=x(0)\Big(\Big(\int_0^t x(s)ds\Big)^2+1\Big)$$

в пространстве $C_{[0,1]}$ непрерывных на $[0,1]$ функций. Здесь оператор $K:C_{[0,1]}\to C_{[0,1]}$, $(Kx)(t)=x(0)\Big(\Big(\int\limits_0^t x(s)ds\Big)^2+1\Big)$, является вольтерровым (согласно определению А.Н. Тихонова), вполне непрерывным и удовлетворяет неравенству (5) в условии улучшаемости оператора. Не выполнено лишь неравенство (4). Решением рассматриваемого уравнения являются функции $x(t)=\frac{c}{\cos^2(ct)}$, где действительное число c принимает любые значения. Каждое решение, кроме нулевого, имеет вертикальную асимптоту $t=\frac{\pi}{2c}$. Имеем $\frac{\pi}{2c}\to0$ при $c\to\infty$, т. е. утверждение теоремы 6 не выполнено.

Для того чтобы оценить число β, определим точную верхнюю границу $\overline{\delta}(\varepsilon,r)$ всевозможных чисел δ, удовлетворяющих условию (5). Заметим, что само число $\overline{\delta}(\varepsilon,r)$ также удовлетворяет условию (5). Функция $\overline{\delta}(\cdot,\cdot)$ не убывает по первому аргументу и не возрастает по второму аргументу. Выберем $\varepsilon>0$. Пусть сужение z_{γ_1} предельно продолженного решения z_η на некоторое множество e_{γ_1} имеет норму $\|z_{\gamma_1}\|_{B(e_{\gamma_1})}=\varrho+\varepsilon$. Продолжим эту функцию до элемента $z\in B$, $\|z\|\leqslant\varrho+2\varepsilon$. Вследствие улучшаемости оператора K выполнено неравенство $Z(\overline{\delta}(\varepsilon,\varrho+2\varepsilon),Kz)\leqslant\varrho+\varepsilon$. Отсюда $\gamma_1\geqslant\overline{\delta}(\varepsilon,\varrho+2\varepsilon)$. Аналогично, мера γ_2 множества e_{γ_2}, на котором $\|z_{\gamma_2}\|_{B(e_{\gamma_2})}=\varrho+2\varepsilon$, удовлетворяет неравенству $\gamma_2\geqslant\overline{\delta}(\varepsilon,\varrho+2\varepsilon)+\overline{\delta}(\varepsilon,\varrho+3\varepsilon)$ и т. д. Таким образом, $\eta\geqslant\sum\limits_{n=2}^{\infty}\overline{\delta}(\varepsilon,\varrho+n\varepsilon)$. Так как члены этого знакоположительного ряда образуют невозрастающую последовательность, то его сумма $S(\varepsilon)$ удовлетворяет неравенству $S(\varepsilon)\geqslant\int\limits_2^{\infty}\overline{\delta}(\varepsilon,\varrho+t\varepsilon)dt$. (Здесь подинтегральная функция аргумента t не возрастает и поэтому измерима.) Вследствие произвольности $\varepsilon > 0$ окончательно получаем следующую оценку асимптоты решения.

Теорема 7. *Пусть оператор $K : B \to B$ является вольтерровым и улучшающим на системе v. Если*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_2^\infty \overline{\delta}(\varepsilon, \varrho + t\varepsilon) dt > b - a, \tag{12}$$

то уравнение (3) *не имеет предельно продолженных решений. В противном случае для любого предельно продолженного решения z_η выполнено*

$$\eta \geqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \int_2^\infty \overline{\delta}(\varepsilon, \varrho + t\varepsilon) dt. \tag{13}$$

Замечание. Если при некотором $\varepsilon > 0$ несобственный интеграл в (12) расходится или при $\varepsilon \to 0$ интеграл неограниченно возрастает, то неравенство (12), естественно, считаем выполненным.

Точность оценки (13) проиллюстрируем следующим примером. Рассмотрим в пространстве непрерывных функций уравнение

$$x(t) = \int_0^t (x^2(s) + 1) ds, \quad t \geqslant 0.$$

Его единственное решение $x(t) = \operatorname{tg} t$ имеет вертикальную асимптоту $t = \frac{\pi}{2}$. Для оператора $(Kx)(t) = \int\limits_0^t (x^2(s) + 1) ds$ имеем $\varrho = 0$. Из неравенства $\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} (r^2 + 1) ds < \varepsilon$ находим $\overline{\delta}(\varepsilon, r) = \tau_2 - \tau_1 = \frac{\varepsilon}{r^2+1}$. Следовательно, на основании формулы (13) получаем

$$\eta \geqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \int_2^\infty \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 t^2 + 1} dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2\varepsilon \right) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Непрерывная зависимость решений от параметров уравнения

Операторы $K_i : B \to B$, $i = 1, 2, \ldots$, назовем *в совокупности локально сжимающими на системе* v, если существуют такие числа $q < 1$, $\delta > 0$, что выполнены условия

1) $\forall \xi \in (0, \delta)$ $\forall x, y \in B$ $\forall i$ $Z(\xi, K_i x - K_i y) \leqslant q Z(\xi, x - y)$;
2) $\forall \tau, \gamma \in (0, b - a]$ $\tau < \gamma < \tau + \delta$ $\forall x, y \in B$ $\forall i$

$$\{x(t) = y(t), \ \forall t \in e_\tau \ \Rightarrow \ Z(\gamma, K_i x - K_i y) \leqslant q Z(\gamma, x - y)\}.$$

Если последовательность в совокупности локально сжимающих на v операторов $K_i : B \to B$, $i = 1, 2, \ldots$, сходится на каждом $x \in B$ к оператору $K : B \to B$, то оператор K будет локально сжимающим на v.

Теорема 8. *Пусть в банаховом пространстве B выполнено V-условие. Пусть, далее, вольтерровые на системе v операторы $K_i : B \to B$, $i = 1, 2, \ldots$, являются в совокупности локально сжимающими и для любой сходящейся последовательности $\{x_i\} \subset B$, $\|x_i - x\| \to 0$, имеет место $\|K_i x_i - Kx\| \to 0$, где $K : B \to B$. Тогда при каждом i уравнение*

$$x_i(t) - (K_i x_i)(t) = 0, \quad t \in [a, b], \tag{14}$$

имеет единственное глобальное решение z_i, всякое локальное решение будет частью соответствующего глобального решения. Уравнение

$$x(t) - (Kx)(t) = 0, \quad t \in [a, b], \tag{15}$$

также имеет единственное глобальное решение z, всякое локальное решение будет его частью и

$$\|z_i - z\| \to 0. \tag{16}$$

Доказательство. Из условий теоремы следует сходимость последовательности $\{K_i\}$ на каждом $x \in B$ к оператору K. Поэтому оператор K будет локально сжимающим и согласно теореме 1 вольтерровым на v. Из теоремы 3 следует однозначная разрешимость уравнений (14), (15). Докажем,что для их решений z_i, z выполнено (16).

Возьмем числа $q < 1$, $\delta > 0$, удовлетворяющие условию совокупной локальной сжимаемости операторов K_i, K. Для любого $\varepsilon > 0$ найдем такие $\sigma_1 > 0$, $I_1 \in N$, что при всех $x \in B$, $i \in N$ из неравенств $\|x - z\| < \sigma_1$, $i > I_1$ следует $\|K_i x - Kz\| = \|K_i x - z\| < \frac{(1-q)\varepsilon}{6}$. Без ограничения общности можем считать, что $\sigma_1 < \frac{(1-q)\varepsilon}{6}$. Определим $\sigma_2 > 0$, $I_2 \in N$ так, чтобы при всех $x \in B$, $i \in N$, если $\|x - z\| < \sigma_2$, $i > I_2$, то $\|K_i x - Kz\| = \|K_i x - z\| < \frac{(1-q)\sigma_1}{6}$. Считаем $\sigma_2 < \frac{(1-q)\sigma_1}{6}$, $I_2 > I_1$. Далее, существуют такие $\sigma_3 > 0$, $I_3 \in N$, что для любых $x \in B$, $i \in N$, удовлетворяющих условию $\|x - z\| < \sigma_3$, $i > I_3$, выполнено $\|K_i x - Kz\| = \|K_i x - z\| < \frac{(1-q)\sigma_2}{6}$, $\sigma_3 < \frac{(1-q)\sigma_2}{6}$, $I_3 > I_2$ и т. д. Всего сделаем $l = \left[\frac{b-a}{\delta}\right]$ вычислений, и на последнем шаге найдем σ_l, I_l. Считаем $\sigma_l < \frac{(1-q)\sigma_{l-1}}{6}$, $I_l > I_{l-1}$.

Рассмотрим сужения $z_{i\delta}$, z_δ функций z_i, z на множество e_δ, являющиеся неподвижными точками операторов $K_{i\delta} = \Pi_\delta K_i P_\delta : B(e_\delta) \to B(e_\delta)$, $K_\delta = \Pi_\delta K P_\delta : B(e_\delta) \to B(e_\delta)$. При всех $i > I_l$ выполнено $\|K_{i\delta} z_\delta - z_\delta\| < \frac{(1-q)\sigma_l}{6}$. Поэтому для каждого натурального n получаем $\|K_{i\delta}^n z_\delta - z_\delta\| \leqslant \|K_{i\delta}^n z_\delta - K_{i\delta}^{n-1} z_\delta\| + \|K_{i\delta}^{n-1} z_\delta - K_{i\delta}^{n-2} z_\delta\| + \dots + \|K_{i\delta} z_\delta - z_\delta\| \leqslant (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1)\frac{(1-q)\sigma_l}{6} \leqslant \frac{\sigma_l}{6}$. Учитывая сходимость последовательных приближений $K_{i\delta}^n z_\delta$ к неподвижной точке $z_{i\delta}$ оператора $K_{i\delta}$, получаем оценку $\|z_{i\delta} - z_\delta\| \leqslant \frac{\sigma_l}{6}$.

Пусть $z_{i2\delta}$, $z_{2\delta}$ — сужения функций z_i, z на множество $e_{2\delta}$, $K_{i2\delta} = \Pi_{2\delta} K_i P_{2\delta} : B(e_{2\delta}) \to B(e_{2\delta})$, $K_{2\delta} = \Pi_{2\delta} K P_{2\delta} : B(e_{2\delta}) \to B(e_{2\delta})$. Построим такое продолжение $w_{i2\delta} \in B(e_{2\delta})$ функции $z_{i\delta} \in B(e_\delta)$, что $\|w_{i2\delta} - z_{2\delta}\| \leqslant \sigma_l$. При всех $i > I_l \geqslant I_{l-1}$ выполнено $\|K_{i2\delta} w_{i2\delta} - K_{2\delta} z_{2\delta}\| = \|K_{i2\delta} w_{i2\delta} - z_{2\delta}\| < \frac{(1-q)\sigma_{l-1}}{6}$. Следовательно, $\|K_{i2\delta} w_{i2\delta} - w_{i2\delta}\| < \sigma_l + \frac{(1-q)\sigma_{l-1}}{6} < \frac{(1-q)\sigma_{l-1}}{3}$. Так как при любом n имеет место равенство $(K_{i2\delta}^n w_{i2\delta})(t) = w_{i2\delta}(t)$, $t \in e_\delta$, то можно пользоваться локальной сжимаемостью операторов $K_{i2\delta}^n$. Получаем $\|K_{i2\delta}^n w_{i2\delta} - w_{i2\delta}\| \leqslant \|K_{i2\delta}^n w_{i2\delta} - K_{i2\delta}^{n-1} w_{i2\delta}\| + \|K_{i2\delta}^{n-1} w_{i2\delta} - K_{i2\delta}^{n-2} w_{i2\delta}\| + \dots + \|K_{i2\delta} w_{i2\delta} - w_{i2\delta}\| \leqslant (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1)\frac{(1-q)\sigma_{l-1}}{3} \leqslant \frac{\sigma_{l-1}}{3}$. Отсюда $\|K_{i2\delta}^n w_{i2\delta} - z_{2\delta}\| \leqslant \frac{\sigma_{l-1}}{3} + \sigma_l \leqslant \frac{\sigma_{l-1}}{3} + \frac{\sigma_{l-1}}{6} = \frac{\sigma_{l-1}}{2}$. Так как последовательные приближения $K_{i2\delta}^n w_{2\delta}$ сходятся к неподвижной точке $z_{i2\delta}$ оператора $K_{i2\delta}$, то получаем неравенство $\|z_{i2\delta} - z_{2\delta}\| \leqslant \frac{\sigma_{l-1}}{2}$.

На следующем шаге вычислений находим такое продолжение $w_{i3\delta} \in B(e_{3\delta})$ функции $z_{i2\delta} \in B(e_{2\delta})$, что $\|w_{i3\delta} - z_{3\delta}\| \leqslant \sigma_{l-1}$. Здесь $i > I_l \geqslant I_{l-1} \geqslant I_{l-2}$. Воспользовавшись сходимостью последовательных приближений $K_{i3\delta}^n w_{3\delta}$ к неподвижной точке $z_{i3\delta}$ оператора $K_{i3\delta} = \Pi_{3\delta} K_i P_{3\delta} : B(e_{3\delta}) \to B(e_{3\delta})$, получаем оценку $\|z_{i3\delta} - z_{3\delta}\| \leqslant \frac{\sigma_{l-2}}{2}$. И т. д. На последнем l-м шаге вычислений докажем, что при всех $i > I_l$ имеет место $\|z_i - z\| < \varepsilon$. $\square$

В случае, когда операторы K_i не являются в совокупности локально сжимающими, условия сходимости решений уравнений (14) к решению уравнения (15) можно получить, используя идеи работ [19] и [20].

Операторы $K_i : B \to B$, $i = 1, 2, \dots$, называют *в совокупности компактными* [20], если для всякого ограниченного множества $U \subset B$ множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i U$ компактно.

Нам потребуется следующее утверждение, полученное в [20].

Лемма 1. *Пусть операторы $K_i : B \to B$, $i = 1, 2, \dots$, в совокупности компактны и для любой сходящейся последовательности $\{x_i\} \subset B$, $\|x_i - x\| \to 0$, имеет место $\|K_i x_i - Kx\| \to 0$, где $K : B \to B$. Тогда любая ограниченная последовательность z_i неподвижных точек операторов K_i является компактной, всякая ее предельная точка является неподвижной для оператора K. Если неподвижная точка z оператора K единственна, то $\|z_i - z\| \to 0$.*

Отметим существенность условия ограниченности последовательности неподвижных точек операторов K_i в этом утверждении. Рассмотрим, например, последовательность операторов

$$K_i : R \to R, \quad K_i x = \begin{cases} x-1, & \text{если } x \leqslant i; \\ 2x-i-1, & \text{если } i < x \leqslant i+1; \\ x, & \text{если } x > i+1. \end{cases}$$

Эти операторы в совокупности компактны, т. к. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i[\alpha,\beta] \subset [\alpha-1,\beta]$. Далее, для любого $x \in R$ и любой его окрестности U существует такой номер I, что при всех $i > I$, $y \in U$ выполнено $K_i y = y - 1$. Таким образом, для любой сходящейся последовательности $\{x_i\} \subset R$, $\|x_i - x\| \to 0$, имеет место $\|K_i x_i - Kx\| \to 0$, где $Kx = x - 1$. Неподвижные точки оператора K_i образуют множество $\aleph_i = [i+1,\infty)$. Любая последовательность элементов $\{x_i\}$, выбранных по одному из каждого множества $\aleph_i$, будет бесконечно большой, а предельный оператор K не имеет неподвижных точек.

Проверка ограниченности последовательности неподвижных точек z_i операторов K_i бывает достаточно сложной. Для уравнений общего вида обычно предполагаются выполненными априорные оценки решений [2], [3], [20], [21], из которых следует ограниченность последовательности z_i. Нахождению таких неравенств в пространстве суммируемых функций на основе теорем о неподвижных точках монотонных операторов посвящена работа [22]. Можно также воспользоваться оценками решений, полученными в предыдущем параграфе (теоремы 6, 7). Еще одним препятствием к применению леммы в случае вольтерровости операторов K_i является тот факт, что уравнения (14) могут иметь предельно продолженные решения, более того, определенные на разных множествах. Для преодоления этих трудностей также целесообразно воспользоваться результатами предыдущего параграфа.

Операторы $K_i : B \to B$, $i = 1,2,\ldots$, будем называть *в совокупности улучшающими на системе* v, если

$$\exists \varrho \ \forall x \in B \ \forall i \ \ Z(0, K_i x) \leqslant \varrho, \tag{17}$$

$$\forall r > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in B \ \forall i \ \forall \tau,\gamma \in [0, b-a] \ \begin{cases} |\tau-\gamma| < \delta, \\ \|x\| \leqslant r \end{cases} \Rightarrow \ |Z(\gamma, K_i x) - Z(\tau, K_i x)| < \varepsilon. \tag{18}$$

Лемма 2. *Пусть операторы $K_i : B \to B$, $i = 1,2,\ldots$, являются в совокупности улучшающими на системе v. Тогда для произвольного r_0, $r_0 > \varrho$, существует такое $\delta > 0$, что для любого натурального i и любого локального решения $z^i_{\gamma_i}$ уравнения* (14)*, определенного на некотором множестве $e_{\gamma_i} \in v$, если $\|z^i_{\gamma_i}\|_{B(e_{\gamma_i})} \geqslant r_0$, то $\gamma_i = \mu(e_{\gamma_i}) \geqslant \delta$.*

Доказательство. Выберем числа r, $r > r_0 > \varrho$, $\varepsilon = 0{,}5(r_0 - \varrho)$ и найдем $\delta > 0$, удовлетворяющее условию (18). Возьмем произвольное локальное решение $z^i_{\gamma_i}$ уравнения (14), норма которого $\|z^i_{\gamma_i}\|_{B(e_{\gamma_i})} \geqslant r_0$. Существует такое его сужение $z^i_{\xi_i}$ на некоторое множество $e_{\xi_i} \subset e_{\gamma_i}$, что $\|z_{\xi_i}\|_{B(e_{\xi_i})} = r_0$. Продолжим функцию $z^i_{\xi_i}$ до некоторой функции $z^i \in B$ так, что $\|z^i\| \leqslant r$. Тогда $Z(\delta, Kz) = Z(0, Kz) + (Z(\delta, Kz) - Z(0, Kz)) \leqslant \varrho + \varepsilon < r_0$. Поэтому $\gamma_i \geqslant \xi_i > \delta$.

Прежде чем сформулировать утверждение о непрерывной зависимости решения от параметров уравнения отметим следующее. Пусть операторы $K_i : B \to B$, $i = 1,2,\ldots$, на каждом $x \in B$ сходятся к оператору $K : B \to B$. Если операторы K_i являются в совокупности улучшающими на v, то оператор K также будет улучшающим; если операторы K_i в совокупности компактны, то и оператор K будет компактным.

Теорема 9. *Пусть в банаховом пространстве B выполнено V-условие. Пусть, далее, вольтерровые на системе v, непрерывные операторы $K_i : B \to B$, $i = 1,2,\ldots$, являются в совокупности компактными и в совокупности улучшающими. Пусть, наконец, для любой сходящейся* *последовательности* $\{x_i\} \subset B$, $\|x_i - x\| \to 0$, *имеет место* $\|K_i x_i - Kx\| \to 0$, *где* $K : B \to B$. *Тогда при каждом* i *уравнения* (14) *и* (15) *локально разрешимы, всякое локальное решение продолжаемо до глобального или предельно продолженного решения. Кроме того, существует такое* $\beta > 0$, *что*

1) *для любого* i *и для каждого предельно продолженного решения* $z^i_{\eta_i}$ *уравнения* (14), *определенного на* $\bigcup\limits_{\gamma<\eta} e_\gamma$, *выполнено* $\eta_i > \beta$;
2) *для каждого предельно продолженного решения* z_η *уравнения* (15), *определенного на* $\bigcup\limits_{\gamma<\eta} e_\gamma$, *выполнено* $\eta > \beta$;
3) *если при каждом* i *выбрать произвольно локальное решение* z^i_β *уравнения* (14), *определенное на* e_β, *то полученная последовательность будет компактна в пространстве* $B(e_\beta)$, *все ее предельные точки будут локальными решениями уравнения* (15);
4) *если локальное определенное на* e_β *решение* z_β *уравнения* (15) *единственно, то*

$$\|z^i_\beta - z_\beta\|_{B(e_\beta)} \to 0.$$

Доказательство локальной разрешимости уравнений (14), (15) и продолжаемости решений следует из теоремы 4, существование числа β и сходимость последовательности z^i_β — из лемм 1, 2.

Условия теоремы 9 можно несколько изменить, исходя из следующих соображений. Совокупная улучшаемость операторов $K_i : B \to B$, $i = 1, 2, \dots$, будет следовать из их совокупной компактности, если в пространстве B выполнено условие C и операторы K_i удовлетворяют неравенству (17), или если в пространстве B выполнено условие C_0. Таким образом, получаем

Следствие. Пусть выполнено одно из условий: либо банахово пространство B обладает свойствами V, C_0, либо банахово пространство B обладает свойствами V, C, а операторы K_i удовлетворяют неравенству (17). Пусть, далее, вольтерровые на системе v, непрерывные операторы $K_i : B \to B$, $i = 1, 2, \dots$, являются в совокупности компактными. Пусть, наконец, для любой сходящейся последовательности $\{x_i\} \subset B$, $\|x_i - x\| \to 0$, выполнено $\|K_i x_i - Kx\| \to 0$, где $K : B \to B$. Тогда имеет место утверждение теоремы 9.

Оценим число β — меру множества, на котором последовательность локальных решений уравнений (14) сходится к решению уравнения (15). Обозначим через $\overline{\delta}(\varepsilon, r)$ точную верхнюю границу всевозможных чисел δ, удовлетворяющих условию (18).

Теорема 10. *Пусть выполнены условия теоремы* 9. *Тогда утверждение теоремы имеет место при любом* β, *удовлетворяющем неравенству*

$$\beta < \lim_{\varepsilon \to 0} \int_2^\infty \overline{\delta}(\varepsilon, \varrho + t\varepsilon)\, dt. \tag{19}$$

В частном случае, если $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_2^\infty \overline{\delta}(\varepsilon, \varrho + t\varepsilon)\, dt > b - a$, *то*

1) *для любого* i *уравнение* (14) *не имеет предельно продолженных решений, т. е. каждое локальное решение продолжаемо только до глобального*;
2) *уравнение* (15) *не имеет предельно продолженных решений, т. е. каждое локальное решение продолжаемо только до глобального*;
3) *если при каждом* i *выбрать произвольно глобальное решение* z^i *уравнения* (14), *то полученная последовательность будет компактна в пространстве* B, *все ее предельные точки будут глобальными решениями уравнения* (15);
4) *если глобальное решение* z *уравнения* (15) *единственно, то* $\|z^i - z\|_B \to 0$.

Доказательство. Достаточно показать, что если $\beta \in (0, b-a]$ удовлетворяет неравенству (19), то, во-первых, при всех i для любого предельно продолженного решения $z^i_{\eta_i}$ уравнения (14) выполнено $\eta_i > \beta$ и, во-вторых, существует такое число Δ, что при всех i любое локальное решение z^i_β уравнения (14), определенное на e_β, имеет норму $\|z^i_\beta\| \leqslant \Delta$.

Итак, пусть β выбрано из условия (19). Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $\beta < \int\limits_2^\infty \overline{\delta}(\varepsilon, \varrho + t\varepsilon)dt \leqslant \sum\limits_{n=2}^\infty \overline{\delta}(\varepsilon, \varrho + n\varepsilon)$. Следовательно, найдется такой номер I, что $\beta \leqslant \sum\limits_{n=2}^I \overline{\delta}(\varepsilon, \varrho + n\varepsilon)$. Пусть сужение $z^i_{\gamma_1}$ на некоторое множество e_{γ_1} предельно продолженного решения $z^i_{\eta_i}$ уравнения (14) имеет норму $\|z^i_{\gamma_1}\|_{B(e_{\gamma_1})} = \varrho + \varepsilon$. Продолжим эту функцию до элемента $z \in B$, $\|z\| < \varrho + 2\varepsilon$. Вследствие совокупной улучшаемости операторов K_i выполнено неравенство $Z(\overline{\delta}(\varepsilon, \varrho + 2\varepsilon), K_i z) < \varrho + \varepsilon$. Отсюда $\gamma_1 \geqslant \overline{\delta}(\varepsilon, \varrho + 2\varepsilon)$. Аналогично, если сужение $z^i_{\gamma_2}$ на некоторое множество e_{γ_2} предельно продолженного решения $z^i_{\eta_i}$ уравнения (14) имеет норму $\|z^i_{\gamma_2}\|_{B(e_{\gamma_2})} = \varrho + 2\varepsilon$, то $\gamma_2 \geqslant \overline{\delta}(\varepsilon, \varrho + 2\varepsilon) + \overline{\delta}(\varepsilon, \varrho + 3\varepsilon)$ и т. д. Таким образом, $\eta > \gamma_I \geqslant \sum\limits_{n=2}^I \overline{\delta}(\varepsilon, \varrho + n\varepsilon) \geqslant \beta$. Кроме того, здесь установлено, что любое локальное определенное на e_β решение z^i_β уравнения (14) имеет норму $\|z^i_\beta\| \leqslant I\varepsilon$. $\square$

Автор выражает искреннюю признательность профессору А.И. Булгакову за советы и замечания, во многом повлиявшие на это исследование.

Литература

1. *Математическая энциклопедия.* Т. 1. – М.: Советская энциклопедия, 1977. – 1152 с.
2. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
3. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения.* – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 384 с.
4. Азбелев Н.В., Симонов П.М. *Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными.* – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. – 230 с.
5. Тихонов А.Н. *О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики* // Бюлл. Моск. ун-та. Секц. А. – 1938. – Вып. 8. – Т. 1. – С. 1–25.
6. Бродский М.С. *Треугольные и жордановы представления линейных операторов.* – М.: Наука, 1969. – 364 с.
7. Бухгейм А.Л. *Уравнения Вольтерра и обратные задачи.* – Новосибирск: Наука, 1983. – 208 с.
8. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения.* – М.: Наука, 1967. – 508 с.
9. Гусаренко С.А. *Об одном обобщении понятия вольтеррова оператора* // ДАН СССР. – 1987. – Т. 295. – № 5. – С. 1046–1049.
10. Жуковский Е.С. *К теории уравнений Вольтерра* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 9. – С. 1599–1605.
11. Жуковский Е.С. *Вольтерровость и спектральные свойства оператора внутренней суперпозиции* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 2. – С. 147–149.
12. Жуковский Е.С. *Линейные эволюционные функционально-дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* – Тамбов: Изд-во Тамбовск. ун-та. – 2003. – 148 с.
13. Курбатов В.Г. *Линейные дифференциально-разностные уравнения.* – Воронеж: Изд-во Воронежск. ун-та, 1990. – 168 с.
14. Лившиц М.С. *О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов* // Матем. сб. – 1954. – Т. 34. – № 1. – С. 145–198.

15. Сумин В.И. *Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами* // ДАН СССР. – 1989. – Т. 305. – № 5. – С. 1056–1059.
16. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* – М.: Наука, 1976. – 576 с.
17. Жуковский Е.С. *О параметрическом задании решения дифференциального уравнения и его приближенном построении* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 4. – С. 31–34.
18. Булгаков А.И. *Элементы теории краевых задач для функционально-дифференциальных включений*: Дисс. … докт. физ.-матем. наук. – Тамбов. Тамбовский институт химического машиностроения, 1993. – 300 с.
19. Artstein Z. *Continuous dependence of solutions of operator equations* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 231. – № 1. – P. 143–166.
20. Максимов В.П. *О предельном переходе в краевых задачах для функционально-дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17. – № 11. – С. 1984–1994.
21. Гусаренко С.А., Жуковский Е.С., Максимов В.П. *К теории функционально-дифференциальных уравнений с локально вольтерровыми операторами* // ДАН СССР. – 1986. – Т. 287. – № 2. – С. 268–272.
22. Жуковский Е.С. *Об интегральных неравенствах в пространствах суммируемых функций* // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 4. – С. 580–584.

Тамбовский государственный университет

Поступила 26.12.2003