ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 2 (513)

УДК 517.977

А.Г. ИВАНОВ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В статье приводятся достаточные условия, при которых решение овыпукленной[1] задачи оптимального управления почти периодическими (п. п.) движениями является оптимальным процессом в смысле работы [8].

1. Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство со стандартной нормой; $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ — пространство линейных операторов $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ с нормой $|L|\doteq\max\limits_{|x|\le 1}|Lx|$; $\mathfrak{V}_n\doteq\mathfrak{V}(\mathbb{T}\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$, где $\mathfrak{U}\in\mathrm{comp}(\mathbb{R}^m)$, а в качестве $\mathbb{T}$ рассматривается либо отрезок прямой, либо вся прямая, — совокупность функций $\varphi:\mathbb{T}\times\mathfrak{U}\to\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих следующим условиям: $\varphi(t,\cdot)\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$ при почти всех (п. в.) $t\in\mathbb{T}$, для каждого $u\in\mathfrak{U}$ отображение $t\mapsto\varphi(t,u)$ измеримо (по Лебегу) и существует такая функция $\psi_\varphi\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{T},\mathbb{R}_+)$ ($\mathbb{R}_+\doteq[0,\infty)$), что $\max\limits_{u\in\mathfrak{U}}|\varphi(t,u)|\le\psi_\varphi(t)$ при п. в. $t\in\mathbb{T}$. Отображение

$$\varphi\mapsto\|\varphi\|_{\mathfrak{V}_n}\doteq\int_{\mathbb{T}}\max_{u\in\mathfrak{U}}|\varphi(t,u)|dt,\quad\varphi\in\mathfrak{V}_n,$$

является нормой в $\mathfrak{V}_n$. Нормированное пространство $(\mathfrak{V}_n,\|\cdot\|_{\mathfrak{V}_n})$ сепарабельно, и в дальнейшем через $\mathfrak{V}^0(\mathbb{T}\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)\subset\mathfrak{V}(\mathbb{T}\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$ обозначаем его счетное всюду плотное множество и $\mathfrak{V}^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$ — совокупность таких отображений $\varphi:\mathbb{R}\times\mathfrak{U}\mapsto\mathbb{R}^n$, что $\varphi\in\mathfrak{V}(\mathbb{T}\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$ для каждого отрезка $\mathbb{T}\subset\mathbb{R}$. В дальнейшем $(\mathrm{frm}(\mathfrak{U}),|\cdot|_w)$ — нормированное пространство мер Радона на $\mathbb{R}^m$, носитель которых содержится в $\mathfrak{U}$ ([2], с. 297), $\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$ — его подмножество, состоящее из вероятностных мер Радона и $\mathrm{DIR}(\mathfrak{U})$ — совокупность мер Дирака δ_u, сосредоточенных в точках $u\in\mathfrak{U}$; $\mathbb{M}(\mathbb{T},\mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$ — совокупность таких измеримых отображений $\mu:\mathbb{T}\to(\mathrm{frm}(\mathfrak{U}),|\cdot|_w)$, что $\|\mu\|_{\mathbb{T}}\doteq\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in\mathbb{T}}|\mu(t)(\mathfrak{U})|<\infty$ ($|\mu(t)|(\mathfrak{U})$ — вариация меры $\mu(t)\in\mathrm{frm}(\mathfrak{U})$), $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}\doteq\mathbb{M}(\mathbb{T},\mathrm{rpm}(\mathfrak{U}))$ и $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}^{(1)}$ — совокупность измеримых отображений $t\mapsto\delta_{u(t)}\in\mathrm{DIR}(\mathfrak{U})\subset(\mathrm{frm}(\mathfrak{U}),|\cdot|_w)$, которая изоморфна $\mathcal{U}_{\mathbb{T}}$ — множеству измеримых отображений[2] $u:\mathbb{T}\to\mathfrak{U}$ и, следовательно, каждое $u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\mathbb{T}}$ можно рассматривать как элемент из $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}^{(1)}$, отождествляя его с отображением $t\mapsto\delta_{u(t)}\in\mathrm{DIR}(\mathfrak{U})$. В $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ выделим подмножество APM_1 [8], состоящее из таких измеримых отображений $\mu:\mathbb{R}\to\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, что для любой функции $c\in C(\mathfrak{U},\mathbb{R})$ отображение $t\mapsto\langle\mu(t),c(u)\rangle\doteq\int\limits_{\mathfrak{U}}c(u)\mu(t)(du)$ принадлежит пространству $S(\mathbb{R},\mathbb{R})\subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ п. п. по Степанову функций [9]; через $\mathrm{APM}_1^{(1)}$ обозначим совокупность таких $\mu\in\mathrm{APM}_1$, что $\mu(t)=\delta_{u(t)}$ при п. в. $t\in\mathbb{R}$ и некотором измеримом отображении $u:\mathbb{R}\to\mathfrak{U}$. Можно показать, что $S(\mathbb{R},\mathfrak{U})\cong\mathrm{APM}_1^{(1)}$ и, следовательно, каждое $u(\cdot)\in S(\mathbb{R},\mathfrak{U})$ можно рассматривать также как элемент множества $\mathrm{APM}_1^{(1)}\subset\mathrm{APM}_1$, отождествляя его с отображением $t\mapsto\delta_{u(t)}\in\mathrm{DIR}(\mathfrak{U})$.

---

[1] О важности процедуры расширения или овыпукления в задачах оптимального управления см., напр., [1]–[5], а в игровых задачах [6], [7].

[2] Этот факт и приведенные ниже свойства пространства $\mathbb{M}(\mathbb{T},\mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$ в случае, когда в качестве $\mathbb{T}$ рассматривается отрезок прямой, приведены в [2] и без труда переносятся на случай, когда $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ [9].

Далее, отображение

$$\mu \mapsto \|\mu\|_{w,\mathbb{T}} \doteq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{-j}}{1+\|\varphi_j\|_{\mathfrak{B}_1}} \left| \int_{\mathbb{T}} \langle \mu(t), \varphi_j(t,u)\rangle dt \right|, \quad \mu \in \mathbb{M}(\mathbb{T}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U})), \tag{1.1}$$

где $\langle \mu(t), \varphi_j(t,u)\rangle \doteq \int\limits_{\mathfrak{U}} \varphi_j(t,u)\mu(t)(du)$, $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{V}^0(\mathbb{T}\times\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$, является (слабой) нормой на $\mathbb{M}(\mathbb{T}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U}))$, относительно которой множества $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}$ и $\mathfrak{S}_1 \doteq \{\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{T}, \mathrm{frm}(\mathfrak{U})) : \|\mu\|_{\mathbb{T}} \le 1\}$ компактны, причем, если μ_j, $\mu \in \mathfrak{S}_1$, $j \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{j\to\infty} \|\mu_j - \mu\|_{w,\mathbb{T}} = 0$ в том и только том случае, если $\lim\limits_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{T}} \langle \mu_j(t), \varphi(t,u)\rangle dt = \int\limits_{\mathbb{T}} \langle \mu(t), \varphi(t,u)\rangle dt$ для каждой функции $\varphi \in \mathfrak{V}(\mathbb{T}\times V, \mathbb{R}^n)$.

Будем говорить, что функция $f : G\times\mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ (G — область в $\mathbb{R}^n$) удовлетворяет *условию* 1), если в каждой точке $(x,u) \in G\times\mathfrak{U}$ существует $f'_x(x,u)$, при этом $f \in C(G\times\mathfrak{U}, \mathbb{R}^n)$, $f'_x \in C(G\times\mathfrak{U}, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n))$. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = \langle \mu(t), f(x,u)\rangle dt \doteq \int_{\mathfrak{U}} f(x,u)\mu(t)(du), \quad \mu(\cdot) \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}}, \tag{1.2}$$

для которой через $\mathfrak{A}_c(\mathbb{T})$ обозначим совокупность (допустимых) пар $(x(\cdot), \mu(\cdot))$, в которых $x(t)$, $t \in \mathbb{T}$, — такое решение системы (1.2), отвечающее (обобщенному) управлению $\mu(\cdot) \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}}$, что $\overline{\mathrm{orb}}(x;\mathbb{T}) \subset G$, где $\overline{\mathrm{orb}}(x;\mathbb{T})$ — замыкание в $\mathbb{R}^n$ множества $\mathrm{orb}(x;\mathbb{T}) \doteq \{x(t),\ t\in\mathbb{T}\}$. В множестве $\mathfrak{A}_c(\mathbb{R})$ выделим подмножество $\mathcal{A}_c$ таких пар $(x(\cdot), \mu(\cdot))$, в которых $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — п. п. по Бору [10] решение системы (1.2), отвечающее $\mu(\cdot) \in \mathrm{APM}_1$.

Замечание 1.1. Поскольку $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}^{(1)} \cong \mathcal{U}_{\mathbb{T}}$, то множество $\mathfrak{A}(\mathbb{T}) \doteq \{(x(\cdot), u(\cdot)) : (x(\cdot), \delta_{u(\cdot)}) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{T})\}$ является множеством допустимых пар системы $\dot{x} = f(x, u(t))$.

Далее, на $\mathfrak{A}_c[t_0,t_1]$ зададим функционал

$$(x(\cdot), \mu(\cdot)) \mapsto \mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot); t_0, t_1) \doteq \int_{t_0}^{t_1} \langle \mu(t), g(x(t),u)\rangle dt, \tag{1.3}$$

где функция $g \in C(G\times\mathfrak{U}, \mathbb{R})$.

По аналогии с определением в ([8], с. 24) дадим

Определение 1.1. Допустимый процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c[t_0,t_1]$ системы (1.2) называется оптимальным для задачи $\mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot); t_0, t_1) \to \min$, $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c[t_0,t_1]$, если для любого другого процесса $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c[t_0,t_1]$ такого, что $x(t_0) = \widehat{x}(t_0)$, $x(t_1) = \widehat{x}(t_1)$, выполнено неравенство $\mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot); t_0, t_1) \ge \mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot); t_0, t_1)$.

Совокупность решений в смысле определения 1.1 обозначим $O\mathcal{P}[t_0,t_1]$ и в дальнейшем $O\mathcal{P}(\mathbb{R}) \doteq \{(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}) : \text{для каждого отрезка } [t_0,t_1] \subset \mathbb{R}\ (\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))|_{[t_0,t_1]} \in O\mathcal{P}[t_0,t_1]\}$.

Замечание 1.2. Целесообразность расширения множества $\mathfrak{A}(\mathbb{T})$ до $\mathfrak{A}_c(\mathbb{T})$ объясняется, в частности, тем, что при фиксированном $K \in \mathrm{comp}(G)$ множество $O\mathcal{P}([t_0,t_1];K)$ решений задачи $\mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot); t_0, t_1) \to \min$, $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c[t_0,t_1]$, $x(t) \in K$, $t \in [t_0,t_1]$, непусто.

Напомним, что для каждой п. п. функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (как по Бору, так и по Степанову) существует среднее $M\{f(t)\} \doteq \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \in \mathbb{R}^n$ [10]. Поэтому, если $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathcal{A}_c$, то отображение $(t,u) \mapsto g(x(t),u)$ принадлежит пространству $B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U}, \mathbb{R})$ п. п. по $t \in \mathbb{R}$ в смысле Бора равномерно по $u \in \mathfrak{U}$ [11], а функция $t \mapsto \langle \mu(t), g(x(t),u)\rangle \doteq \int\limits_{\mathfrak{U}} g(x(t),u)\mu(t)(du)$ является [9] п. п. по Степанову. Следовательно, корректно определена следующая задача оптимального управления п.п. движениями (напр., [12]):

$$I(x(\cdot), \mu(\cdot)) \doteq M\{\langle \mu(t), g(x(t),u)\rangle\} \to \inf, \quad (x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathcal{A}_c, \tag{1.4}$$

для которой пара $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathcal{A}_c$ называется решением, если $I(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \le I(x(\cdot),\mu(\cdot))$ для всех $(x(\cdot),\mu(\cdot)) \in \mathcal{A}_c$.

Основной целью работы является указание достаточных условий, когда решение задачи (1.4) принадлежит $O\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Эти условия приведем в п. 5, поскольку они опираются на ряд утверждений, связанных с понятием равномерной локальной управляемости системы (1.2) на заданную полутраекторию фиксированного решения этой системы.

2. Фиксированной паре $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+)$ поставим в соответствие линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x + \langle \Delta\mu(t), f(\widehat{x}(t),u)\rangle, \tag{2.1}$$

в которой

$$A(t) \doteq \langle \widehat{\mu}(t), f'_x(\widehat{x}(t),u)\rangle, \quad \Delta\mu(t) \doteq \widehat{\mu}(t) - \mu(t), \tag{2.2}$$

и по аналогии с определением для непрерывных систем управления вида $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$, $(t,x,u) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathfrak{U}$, при условии $0 \in \mathrm{ri}\,(\mathrm{co}\,(\mathfrak{U}))$ [13] говорим, что система (2.1) равномерно локально управляема (РЛУ), если найдутся такие константы $\varepsilon,\vartheta > 0$, что при каждом $\tau \ge 0$ и всяком $x_0 \in O_\varepsilon[0] \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le \varepsilon\}$ найдется такое $\mu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta} \doteq \mathcal{M}_{[\tau,\tau+\vartheta]}$, при котором (см. обозначение (2.2)) система (2.1) имеет решение $x(t)$, $\tau \le t \le \tau+\vartheta$, удовлетворяющее условиям $x(\tau) = x_0$, $x(\tau+\vartheta) = 0$.

Используя выпуклость множества $\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, несложно доказать следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть система* (2.1) *РЛУ. Тогда существуют такие константы* $\varepsilon,\vartheta,\eta > 0$, *что для каждого* $\tau \ge 0$ *и всякого* $x_0 \in O_\varepsilon[0]$ *найдется такое* $\mu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, *что* $\|\Delta\mu\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} \le \eta|x_0|$ *и состояние* (τ,x_0) *системы* (2.1) *переводится в состояние* $(\tau+\vartheta,0)$.

Определение РЛУ системы (2.1) и лемма 2.1 оправдывают

Определение 2.1. Пусть $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c$. Система (1.2) называется РЛУ на $\mathrm{orb}_+(\widehat{x}) \doteq \mathrm{orb}(\widehat{x};\mathbb{R}_+)$, если существуют такие константы $\varepsilon,\vartheta,\eta > 0$, что при каждом $\tau \ge 0$ для любого $x_0 \in O_\varepsilon[\widehat{x}(\tau)]$ найдется управление $\mu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, при котором выполнено неравенство

$$\|\Delta\mu\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} \le \eta|\widehat{x}(\tau) - x_0| \tag{2.3}$$

и система (1.2) имеет решение $x(t)$, $\tau \le t \le \tau+\vartheta$, удовлетворяющее условиям $x(\tau) = x_0$, $x(\tau+\vartheta) = \widehat{x}(\tau+\vartheta)$.

В дальнейшем предполагаем, что фиксируется пара $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+)$, для которой найдется такое $r > 0$, что при всех $t \ge 0$ компактное множество

$$K \doteq \widehat{x}(t) + O_r[0] \subset G \tag{2.4}$$

и функции $f : G\times\mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяют следующим условиям.

Условие 2). Существует такое $r > 0$, что одновременно при всех $t \ge 0$ выполняются включение (2.4) и условие

$$\sup\{|f(x,u)| + |f'_x(x,u)|,\ (x,u) \in K(t)\times\mathfrak{U},\ t \ge 0\} \doteq \gamma < \infty. \tag{2.5}$$

Условие 3). Существуют такие константы $\widehat{r} \in (0,r]$, $\alpha > 0$ и функция $\mathfrak{f} \in C(\mathbb{R}_+\times\mathfrak{U},\mathbb{R}_+)$, что

$$\mathfrak{F} \doteq \sup_{(t,u)\in\mathbb{R}_+\times\mathfrak{U}} \mathfrak{f}(t,u) < \infty \tag{2.6}$$

и для всех $(t,z,u) \in \mathbb{R}_+\times O_{\widehat{r}}[0]\times\mathfrak{U}$ выполнено неравенство

$$\max_{\theta\in[0,1]} |f'_x(\widehat{x}(t)+\theta z,u) - f'_x(\widehat{x}(t),u)| \le \mathfrak{f}(t,u)|z|^\alpha. \tag{2.7}$$

Замечание 2.1. Если $\overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x}) \in \mathrm{comp}(G)$, то всегда найдется такое $r > 0$, что компактное множество $K \doteq \overline{\mathrm{orb}}(\widehat{x}) + O_r[0] \subset G$. Поскольку $K(t) \subset K$ (см. (2.4)), то условие (2.5) в этом случае будет выполнено. Вместе с тем, это условие может выполняться и в случае, когда решение $\widehat{x}$ и функция $f : G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ неограничены. Действительно, рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = 1 - x_1 - x_2,$$
$$\dot{x}_2 = u,$$

определенную на $\mathbb{R}^2 \times [-1, 1]$. Для этой системы (см. замечание 1.1) пара $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$, в которой $\widehat{x}(t) = (t, t)^*$, $\widehat{u}(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$, допустима и условие вида (2.5) выполняется при каждом $r > 0$.

Лемма 2.2. *Пусть функция $f : G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию 1), на заданном процессе $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+)$ выполняется условие 2) и система (1.2) РЛУ на $\mathrm{orb}_+(\widehat{x})$. Пусть далее последовательность $\{x_0^{(j)}\}_{j=1}^{\infty} \subset O_\varepsilon[\widehat{x}(\tau)]$ $(\tau \geq 0)$ такая, что $\lim\limits_{j\to\infty} |x_0^{(j)} - \widehat{x}(\tau)| = 0$ и $\mu_j \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$ — управление, удовлетворяющее неравенству*

$$\|\widehat{\mu} - \mu_j\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} \leq \eta |\widehat{x}(\tau) - x_0^{(j)}|, \tag{2.8}$$

при котором система (1.2) имеет решение $x_j(t) \in K(t)$, $t \in [\tau, \tau + \vartheta]$, для которого $x_j(\tau) = x_0^{(j)}$, $x_j(\tau + \vartheta) = \widehat{x}(\tau + \vartheta)$. Тогда $\lim\limits_{j\to\infty} \|x_j - \widehat{x}\|_{C[\tau,\tau+\vartheta]} = 0$ $(C[\tau, \tau + \vartheta] \doteq C([\tau, \tau + \vartheta], \mathbb{R}^n))$.

Доказательство. Для всех $t \in [\tau, \tau + \vartheta]$ имеем соотношения

$$|\widehat{x}(t) - x_j(t)| \leq |\widehat{x}(\tau) - x_0^{(j)}| + I_j + \int_\tau^t \left| \left\langle \mu_j(s), \int_0^1 f'_x(\widehat{x}(s) - \theta(x_j(t) - \widehat{x}(t)), u) d\theta \right\rangle \right| |x_j(s) - \widehat{x}(s)| ds \leq$$
$$\leq |\widehat{x}(\tau) - x_0^{(j)}| + I_j + \gamma \int_\tau^t |x_j(s) - \widehat{x}(s)| ds,$$

где $I_j \doteq \max\limits_{t\in[\tau,\tau+\vartheta]} \left| \int\limits_\tau^t \langle \widehat{\mu}(s) - \mu_j(s), f(\widehat{x}(s), u) \rangle ds \right|$, а $\gamma > 0$ определено в (2.5). Отсюда в силу неравенства Гроноулла–Беллмана получаем $\|x_j - \widehat{x}\|_{C[\tau,\tau+\vartheta]} \leq e^{\gamma\vartheta}(|\widehat{x}(\tau) - x_0^{(j)}| + I_j)$. Так как $\lim\limits_{j\to\infty} |x_0^{(j)} - \widehat{x}(\tau)| = 0$, то $\lim\limits_{j\to\infty} \|\widehat{\mu} - \mu_j\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} = 0$ (см. (2.8)), а значит [3], $\lim\limits_{j\to\infty} I_j = 0$. Поэтому из последнего неравенства вытекает нужное предельное соотношение.

Таким образом, если следовать определению 1.1 из [14], то в силу леммы 2.2 РЛУ системы (1.2) на $\mathrm{orb}_+(\widehat{x})$ влечет ее локальную управляемость в малом на $\mathrm{orb}_+(\widehat{x}; [\tau, \tau + \vartheta])$ при каждом фиксированном τ.

Теорема 2.1. *Пусть функция $f : G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию 1) и на процессе $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+)$ выполняются условия 2), 3). Тогда, если система (2.1) РЛУ, то система (1.2) РЛУ на $\mathrm{orb}_+(\widehat{x})$.*

Доказательство теоремы 2.1 приведем в п. 4, поскольку оно опирается на ряд вспомогательных утверждений в следующем пункте.

3. В системе (1.2) сделаем замену $z \doteq \widehat{x}(t) - x$, которая относительно z запишется в виде

$$\dot{z} = A(t)z + \langle \Delta\mu(t), f(\widehat{x}(t) - z, u) \rangle + \langle \widehat{\mu}(t), g(t, z, u) \rangle, \tag{3.1}$$

где

$$g(t, z, u) \doteq f(\widehat{x}(t), u) - f(\widehat{x}(t) - z, u) - f'_x(\widehat{x}(t), u)z. \tag{3.2}$$

В следующей лемме 3.1 (и далее) $X(t, s)$ — оператор Коши системы $\dot{y} = A(t)y$ (см. (2.2)).

Лемма 3.1. *Пусть функция $f : G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию 1) и на процессе $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+)$ выполняется условие 2). Тогда, если система (2.1) РЛУ, то найдутся такие константы $\varepsilon_1, \vartheta_1 > 0$ и $\delta_1 \in (0,\widehat{r})$, что при каждом $\tau \geq 0$ и любой функции $y \in C([\tau,\tau+\vartheta], O_{\delta_1}[0])$ шар $O_{\varepsilon_1}[0]$ содержится в множестве*

$$\mathbb{D}_\tau(\vartheta_1, y) \doteq \Big\{ -\int_\tau^{\tau+\vartheta_1} X(\tau,s)\langle \Delta\mu(s), f(s,\widehat{x}(s)-y(s),u)\rangle ds,\ \mu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta_1}\Big\} \tag{3.3}$$

управляемости на отрезке $[\tau,\tau+\vartheta_1]$ системы

$$\dot{z} = A(t)z + \langle \Delta\mu(t), f(\widehat{x}(t)-y(t),u)\rangle. \tag{3.4}$$

Доказательство леммы 3.1 можно получить с использованием свойств опорных функций, если следовать схеме доказательства леммы 2.1 из [15]. Отметим лишь, что если $\varepsilon_2, \vartheta_2 > 0$ — константы, входящие в определение РЛУ системы (2.1), то $\varepsilon_1 \doteq \varepsilon_2/2$.

Лемма 3.2. *Пусть функция $f : G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию 1) и на процессе $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+)$ выполняются условия 2), 3). Тогда, если система (2.1) РЛУ, то найдутся такие константы $\varepsilon, \vartheta, \eta > 0$, что для каждого $z_0 \in O_\varepsilon[0]$ существует такое $\delta = \delta(z_0) > 0$, что для всякого $\tau \geq 0$ и любой функции $y \in C([\tau,\tau+\vartheta], O_\delta[0])$ найдется $\mu_{z_0,y} \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, удовлетворяющее неравенству*

$$\|\Delta\mu_{z_0,y}\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} \leq \eta\,|z_0| \tag{3.5}$$

и при этом система

$$\dot{z} = A(t)z + \langle \Delta\mu(t), f(\widehat{x}(t)-y(t),u)\rangle + \langle \widehat{\mu}(t), g(t,y(t),u)\rangle$$

имеет такое решение $z(t)$, $\tau \leq t \leq \tau+\vartheta$, что $z(\tau) = z_0$, $z(\tau+\vartheta) = 0$ и

$$\max_{\tau\leq t\leq \tau+\vartheta} |z(t)| \leq \delta. \tag{3.6}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon_2, \vartheta_2 > 0$ входят в определение РЛУ системы (2.1) и $\varepsilon_1 \doteq \varepsilon_2/2$, $\vartheta_1 > 0$, $\delta_1 \in (0,\widehat{r})$ — отвечающие им константы, указанные в лемме 3.1. Полагаем $\vartheta \doteq \vartheta_1$ и рассмотрим (см. (2.4)–(2.6))

$$\varkappa \doteq \frac{\varepsilon_2}{2(1+\vartheta e^{\gamma\vartheta}\mathfrak{F})}, \quad \sigma \doteq 1 + \frac{2\gamma\vartheta}{\varkappa} + \vartheta\mathfrak{F}. \tag{3.7}$$

Фиксируем константу ε, удовлетворяющую условиям

$$0 < \varepsilon \leq k \doteq \min\Big\{\varkappa, \delta_1^{1+\alpha}, \Big(\frac{e^{-2\gamma\vartheta}}{\sigma}\Big)^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}\Big\}, \tag{3.8}$$

точку $z_0 \in O_\varepsilon[0]$ и пусть $\delta = \delta(z_0) > 0$ — решение уравнения

$$\delta^{1+\alpha} = |z_0|. \tag{3.9}$$

Поскольку $\delta \leq \varepsilon^{\frac{1}{1+\alpha}} \leq k^{\frac{1}{1+\alpha}} \overset{(3.8)}{\leq} \delta_1$, то $|g(t,y(t),u)| \leq \mathfrak{f}(t,u)\delta^{1+\alpha} \overset{(3.9)}{=} \mathfrak{f}(t,u)|z_0|$ (см. (2.7), (3.2)) для каждой функции $y \in C([\tau,\tau+\vartheta], O_\delta[0])$ при всех $(t,u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathfrak{U}$ и, значит, в силу неравенства $\max\limits_{\tau\leq s\leq\tau+\vartheta_1} |X(\tau,s)| \leq e^{\gamma\vartheta_1}$ получаем

$$\Big|\int_\tau^{\tau+\vartheta} X(\tau,s)\langle \widehat{\mu}(s), g(s,y(s),u)\rangle ds\Big| \leq \vartheta e^{\gamma\vartheta}\mathfrak{F}|z_0|.$$

Выберем точку

$$\xi_0 \doteq \frac{\varkappa}{|z_0|}\Big(z_0 + \int_\tau^{\tau+\vartheta} X(\tau,s)\langle \widehat{\mu}(s), g(s,y(s),u)\rangle ds\Big). \tag{3.10}$$

Из предыдущего неравенства, определения константы $\varkappa$ (см. (3.7)) получаем, что $|\xi_0| \leq \varkappa(1+\vartheta e^{\gamma\vartheta}\mathfrak{F}) = \varepsilon_2/2 \doteq \varepsilon_1$, т. е. $\xi_0 \in O_{\varepsilon_1}[0]$, а т. к. $O_{\varepsilon_1}[0] \subset \mathbb{D}_\tau(\vartheta, y)$, то найдется такое $\mu_{\xi_0,y} \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$ (см. (3.3)), что $\xi_0 = -\int\limits_\tau^{\tau+\vartheta} X(\tau,s)\langle\mu_{\xi_0,y}(s), f(s,\widehat{x}(s)-y(s),u)\rangle ds$ (см. (2.2)). Поэтому в силу (3.10) $z_0 = -\int\limits_\tau^{\tau+\vartheta} X(\tau,s)[\frac{|z_0|}{\varkappa}\langle\Delta\mu_{\xi_0,y}(s), f(\widehat{x}(s)-y(s),u)\rangle + \langle\widehat{\mu}(s), g(s,y(s),u)\rangle]ds$. Поскольку $\mu_{\xi_0,y}, \widehat{\mu} \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, а $|z_0| \leq \varepsilon \overset{(3.8)}{\leq} \varkappa$, то для отображения

$$t \mapsto \mu_{z_0,y}(t) \doteq \frac{|z_0|}{\varkappa}\mu_{\xi_0,y}(t) + \frac{\varkappa - |z_0|}{\varkappa}\widehat{\mu}(t), \quad t \in [\tau, \tau+\vartheta], \tag{3.11}$$

во-первых, $\mu_{z_0,y} \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, а, во-вторых, из равенства $\Delta\mu_{z_0,y}(t) \overset{(3.11)}{=} \frac{|z_0|}{\varkappa}\Delta\mu_{\xi_0,y}(t)$ получаем неравенство (3.5) при $\eta \doteq 2/\varkappa$ и принадлежность точки z_0 множеству

$$\mathfrak{D}_\tau(\vartheta, y) \doteq \Big\{ -\int_\tau^{\tau+\vartheta} X(\tau,s)[\langle\Delta\mu(s), f(\widehat{x}(s)-y(s),u)\rangle + \langle\widehat{\mu}(s), g(s,y(s),u)\rangle]ds,\ \mu \in \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}\Big\}$$

управляемости системы (3.4) на $[\tau, \tau+\vartheta]$. Поэтому решение

$$z(t) = X(t,\tau)\Big\{z_0 + \int_\tau^t X(\tau,s)[\langle\Delta\mu_{z_0,y}(s), f(\widehat{x}(s)-y(s),u)\rangle + \langle\widehat{\mu}(s), g(s,y(s),u)\rangle]ds\Big\}$$

этой системы при $\mu(t) = \mu_{z_0,y}(t)$ удовлетворяет условиям $z(\tau) = z_0$, $z(\tau+\vartheta) = 0$.

Покажем, наконец, что $z(t)$ удовлетворяет неравенству (3.6). Действительно, учитывая, что $|z_0| \overset{(3.11)}{=} \delta|z_0|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \leq \delta\varepsilon^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$, при каждом $t \in [\tau, \tau+\vartheta]$ имеем соотношения

$$|z(t)| \leq e^{\gamma\vartheta}\Big\{|z_0| + 2e^{\gamma\vartheta}\frac{|z_0|}{\varkappa}\gamma + e^{\gamma\vartheta}\int_\tau^{\tau+\vartheta}\Big|\Big\langle\widehat{\mu}(s), \int_0^1(f'_x(\widehat{x}(s)-\theta y(s),u) - f'_x(\widehat{x}(s),u))d\theta\Big\rangle y(s)\Big|ds\Big\} \leq$$
$$\leq e^{2\gamma\vartheta}\Big(1 + \frac{2\gamma\vartheta}{\varkappa} + \vartheta\mathfrak{F}\Big)\delta\varepsilon^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \overset{(3.7)}{=} \sigma\delta e^{2\gamma\vartheta}\varepsilon^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \overset{(3.8)}{\leq} \delta. \quad \square$$

4. Доказательство теоремы 2.1. Пусть $\varepsilon, \vartheta, \eta > 0$ — константы, указанные в лемме 3.2, $\tau \geq 0$ и точка $x_0 \in O_\varepsilon[\widehat{x}(\tau)]$ представлена в виде $x_0 = \widehat{x}(\tau) - z_0$, где $z_0 \in O_\varepsilon[0]$. Для точки z_0 выбираем константу $\delta > 0$, также указанную в лемме 3.2. Используя утверждение этой леммы и следуя рассуждениям в ([16], с. 748), получим последовательность абсолютно непрерывных на $[\tau, \tau+\vartheta]$ функций $\{y_j\}_{j=1}^\infty$, а также последовательность управлений $\{\mu_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$ таких, что $y_j(t) \in O_\delta[0]$, $\tau \leq t \leq \tau+\vartheta$, $y_j(\tau) = z_0$, $y_j(\tau+\vartheta) = 0$, $j \in \mathbb{N}$, и (см. обозначения в (2.2) и (3.2))

$$y_{j+1}(t) = X(t,\tau)\Big\{z_0 + \int_\tau^t X(\tau,s)[\langle\Delta\mu_j(s), f(\widehat{x}(s)-y_j(s),u)\rangle + \langle\widehat{\mu}(s), g(s,y_j(s),u)\rangle]ds\Big\}, \tag{4.1}$$

где $\mu_j(s) \doteq \mu_{z_0,y_j}(s)$. Кроме того, при всех $j \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\|\Delta\mu_j\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]} \leq \eta|z_0|. \tag{4.2}$$

Из (4.1), используя ограничения на функцию f и свойства оператора Коши, несложно показать, что последовательность функций $\{y_j\}_{j=1}^\infty$ равностепенно непрерывна на $[\tau, \tau+\vartheta]$. Следовательно, по теореме Арцела–Асколи ([2], с. 111) из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на $[\tau, \tau+\vartheta]$ к некоторой функции $z \in C([\tau, \tau+\vartheta], O_\delta[0])$. Будем считать

$$y_j(t) \underset{t\in[\tau,\tau+\vartheta]}{\rightrightarrows} z(t) \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{4.3}$$

Так как $\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$ — компактное множество в $(\mathbb{M}([\tau,\tau+\vartheta],\mathrm{frm}(\mathfrak{U})),\|\cdot\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]})$, то из последовательности $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ также можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $\mu\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$. Чтобы не загромождать обозначений, будем считать

$$\|\nu_j\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]}\to 0 \ \text{ при } \ j\to\infty, \ \ \nu_j(\cdot)\doteq\mu_j(\cdot)-\mu(\cdot). \tag{4.4}$$

Последнее предельное соотношение означает, что для каждой функции $\varphi\in\mathfrak{V}([\tau,\tau+\vartheta]\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$, в частности, и для функций вида $\varphi(s,u)\doteq\chi_{[\tau,t]}(s)X(\tau,s)f(s,\widehat{x}(s)-z(s),u)$, $t\in[\tau,\tau+\vartheta]$ ($\chi_{[\tau,t]}(s)$ — характеристическая функция отрезка $[\tau,t]$) выполнено равенство $\lim\limits_{j\to\infty}\int\limits_{\tau}^{\tau+\vartheta}\langle\nu_j(t),\varphi(t,u)\rangle dt=0$. Поэтому, переходя в (4.1) к пределу при $j\to\infty$, учитывая (4.3), получим, что при каждом $t\in[\tau,\tau+\vartheta]$ справедливо равенство

$$z(t)=X(t,\tau)\Big\{z_0+\int_{\tau}^{t}X(\tau,s)[\langle\Delta\mu(s),f(\widehat{x}(s)-z(s),u)\rangle+\langle\widehat{\mu}(s),g(s,z(s),u)\rangle]ds\Big\}.$$

При этом $z(\tau)=z_0$, $z(\tau+\vartheta)=0$, $z(t)\in O_\delta[0]$, $t\in[\tau,\tau+\vartheta]$, и, кроме того, в силу (4.2) и (4.4) выполняется неравенство $\|\mu\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]}\le\eta|z_0|$. Для завершения доказательства теоремы 2.1 осталось заметить, что $z(t)$ — решение системы (2.1) и, следовательно, $x(t)=\widehat{x}(t)-z(t)$, $t\in[\tau,\tau+\vartheta]$, — решение системы (1.1), отвечающее управлению $\mu\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$ с неравенством (2.3), такое, что $x(\tau)=\widehat{x}(\tau)-z_0=x_0$, $x(\tau+\vartheta)=\widehat{x}(\tau+\vartheta)$ и $\max\limits_{\tau\le t\le\tau+\vartheta}|x(t)-\widehat{x}(t)|\le\delta$.

Замечание 4.1. Определение 1.1 равносильно РЛУ (в нуль) системы (3.1), или иначе (2.2) системы $\dot z=\langle\widehat{\mu}(t),f(\widehat{x}(t),u)\rangle-\langle\widehat{\mu}(t)-\Delta\mu(t),f(\widehat{x}(t)-z,u)\rangle$. Поэтому доказанная теорема 2.1 указывает достаточные условия возможности возвращения на любом отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$ каждого возмущенного движения $t\mapsto\widehat{x}(t)-z(t)$, $z(\tau)\in O_\varepsilon[0]$ на $\mathrm{orb}_+(\widehat{x})$ [1] с помощью управлений вида $\widehat{\mu}(\cdot)-\Delta\mu(\cdot)\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, в которых возмущениями $\Delta\mu(\cdot)$ служат измеримые функции $t\mapsto\Delta\mu(\cdot)\in\widehat{\mu}(t)-\mathrm{rpm}(\mathfrak{U})$, $t\in[\tau,\tau+\vartheta]$, удовлетворяющие неравенству (2.3) при $x_0=z(\tau)$. Более того, как видно из приведенного доказательства, $x(t)\in O_\varepsilon[\widehat{x}(t)]$ при всех $t\in[\tau,\tau+\vartheta]$. Следовательно (см. лемму 2.2), в условиях теоремы 2.1 система (1.2) обладает на каждом отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$ свойством локальной управляемости в малом на $\mathrm{orb}_+(\widehat{x};[\tau,\tau+\vartheta])$.

В дальнейшем наряду со свойством РЛУ системы (1.2) на $\mathrm{orb}_+(\widehat{x})$ (см. определение 2.1) важную роль будет играть возможность достижения при каждом $\tau\ge0$ из состояния $(\tau,\widehat{x}(\tau))$ по траекториям системы (1.2) состояния $(\tau+\vartheta,x_0)$, где x_0 — точка из некоторой окрестности точки $\widehat{x}(\tau+\vartheta)$.

Определение 4.1. Пусть $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c$. Система (1.2) называется равномерно локально достижимой (РЛД) с $\mathrm{orb}_+(\widehat{x})$, если существуют такие константы $\varepsilon,\vartheta,\eta>0$, что при каждом $\tau\ge0$ для любого $x_0\in O_\varepsilon[\widehat{x}(\tau+\vartheta)]$ найдется такое управление $\mu\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$, что будет выполнено неравенство $\|\Delta\mu\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]}\le\eta|\widehat{x}(\tau+\vartheta)-x_0|$ и при этом система (1.2) имеет решение $x(t)$, $\tau\le t\le\tau+\vartheta$, удовлетворяющее условиям $x(\tau)=\widehat{x}(\tau)$, $x(\tau+\vartheta)=x_0$.

Теорема 4.1. *Пусть функция $f:G\times\mathfrak{U}\to\mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию* 1) *и на процессе $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot))\in\mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+)$ выполняются условия* 2), 3). *Тогда, если система* (2.1) *РЛУ, то система* (1.2) *РЛД с* $\mathrm{orb}_+(\widehat{x})$.

Доказательство. Рассмотрим при $\tau\ge0$ и $\vartheta>0$ множество

$$\mathbb{A}_\tau(\vartheta)\doteq\Big\{\int_{\tau}^{\tau+\vartheta}X(\tau+\vartheta,s)\langle\Delta\mu(s),f(\widehat{x}(s),u)\rangle ds,\ \mu\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}\Big\}, \tag{4.5}$$

[1] О важности указанного свойства в теории управления динамических систем отмечено в работах Н.Н. Красовского (напр., [17]). В [18] исследован вопрос о наблюдении нелинейной управляемой системы вдоль заданной траектории.

совпадающее с концами $x(\tau+\vartheta)$ решений $x(t)=\int\limits_{\tau}^{t} X(t,s)\langle \Delta\mu(s), f(\widehat{x}(s),u)\rangle ds$ системы (2.1), отвечающих $\mu\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$ и выходящих в момент времени τ из нуля. По аналогии с определением для линейных систем управления ([19], с. 183) множество $\mathbb{A}_\tau(\vartheta)$, принадлежащее $\operatorname{conv}(\mathbb{R}^n)$, назовем множеством достижимости системы (2.1) на $t\in[\tau,\tau+\vartheta]$ из нуля и говорим, что система (2.1) РЛД (из нуля), если существуют такие $\varepsilon,\vartheta>0$, что при каждом $\tau\geq 0$

$$O_\varepsilon[0]\subset\mathbb{A}_\tau(\vartheta). \tag{4.6}$$

Так как система (2.1) РЛУ, то найдутся такие $\varepsilon_1,\vartheta>0$, что при каждом $\tau\geq 0$ и любом $\psi\in\mathbb{R}^n$ (в частности, $\psi=1$) и при $q=-X^*(\tau+\vartheta,\tau)\psi/|X^*(\tau+\vartheta,\tau)\psi|$ будет выполнено неравенство $c(\psi,\mathfrak{D}_\tau(\vartheta))\doteq\max\limits_{x\in\mathfrak{D}_\tau(\vartheta)}\psi^*x\geq\varepsilon_1$, где

$$\mathfrak{D}_\tau(\vartheta)\doteq\Big\{-\int_\tau^{\tau+\vartheta} X(\tau,s)\langle\Delta\mu(s), f(\widehat{x}(s),u)\rangle ds,\ \mu\in\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}\Big\} \tag{4.7}$$

— множество управляемости системы (2.1) на $[\tau,\tau+\vartheta]$. Поэтому, учитывая равенство (см. (4.5)) $\mathbb{A}_\tau(\vartheta)=-X(\tau+\vartheta,\tau)\mathfrak{D}_\tau(\vartheta)\doteq\{-X(\tau+\vartheta,\tau)x_0,\ x_0\in\mathfrak{D}_\tau(\vartheta)\}$ при каждом $\psi\in\mathbb{R}^n$, $\psi=1$, имеем следующие соотношения: $c(\psi,\mathbb{A}_\tau(\vartheta))=|X^*(\tau+\vartheta,\tau)\psi|c(q,\mathfrak{D}_\tau(\vartheta))\geq\varepsilon_1e^{-\gamma\vartheta}\doteq\varepsilon$. Из них получаем включение (4.6) при $\varepsilon\doteq\varepsilon_1e^{-\gamma\vartheta}$, т. е. из РЛУ системы вытекает ее РЛД. Теперь по схеме доказательства теоремы 2.1 можно доказать теорему 4.1.

Замечание 4.2. Поскольку (см. доказательство теоремы 4.1) $\varepsilon<\varepsilon_1$, то $O_\varepsilon[0]\subset O_{\varepsilon_1}[0]$, т. е. при каждом $\tau\geq 0$ одновременно будут выполнены включения $O_\varepsilon[0]\subset\mathfrak{D}_\tau(\vartheta)$ и (4.6), которые означают, что система (2.1) одновременно является РЛУ и РЛД в том смысле, что каждые состояния (τ,x_0), $x_0\in O_\varepsilon[0]$, с помощью допустимых управлений из $\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$ могут быть переведены в состояния $(\tau+\vartheta,0)$, а состояния $(\tau+\vartheta,x_0)$ достижимы из $(\tau,0)$. Подчеркнем, что здесь не идет речи об одновременной достижимости и управляемости заданных состояний системы (2.1) в смысле ([20], с. 42).

В заключение сделаем ряд замечаний, связанных с РЛУ системы (1.3).

Поскольку $\operatorname{rpm}(\mathfrak{U})$ совпадает [21] с замыканием по норме $|\cdot|_w$ выпуклой оболочки множества $\operatorname{DIR}(\mathfrak{U})$, гомеоморфного $\mathfrak{U}$, с использованием теоремы Ляпунова ([22], с. 349) и ограничений на f несложно доказать, что при каждых $\tau\geq 0$ и $\vartheta>0$ (см. (4.7))

$$\mathfrak{D}_\tau(\vartheta)=\Big\{-\int_\tau^{\tau+\vartheta} X(\tau+\vartheta,s)[\langle\widehat{\mu}(s), f(\widehat{x}(s),u)\rangle-f(\widehat{x}(s),u(s))]ds,\ u(\cdot)\in\mathcal{U}_{\tau,\vartheta}\Big\},$$

т. е. РЛУ системы (2.1) равносильна РЛУ системы $\dot{x}=A(t)x+\langle\widehat{\mu}(t),f(\widehat{x}(t),u)\rangle-f(\widehat{x}(t),u(t))$ в классе управлений из $\mathcal{U}_{\tau,\vartheta}$. Отсюда получаем, что в случае $\widehat{\mu}(\cdot)=\delta_{\widehat{u}(\cdot)}$, т. е. если изначально рассматривается допустимый процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))\in\mathfrak{A}$, то РЛУ системы (2.1) равносильна РЛУ системы

$$\dot{x}=A(t)x+v(t),\quad v(t)\in V(t)\doteq f(\widehat{x}(t),\widehat{u}(t))-f(\widehat{x}(t),\mathfrak{U}). \tag{4.8}$$

Отметим, что при п. в. $t\in\mathbb{R}_+$ нуль принадлежит множеству $V(t)\in\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, причем не исключена возможность того, что нуль лежит на границе[1] $V(t)$, при этом отображение $t\mapsto(A(t),V(t))\in\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n)\times\operatorname{comp}(\mathbb{R}^n)$, $t\in\mathbb{R}_+$, локально интегрируемо и d-ограничено. Вопрос о РЛУ такого класса систем управления исследовался в [24], [25]. В силу теоремы 2.1 из [24], в частности, получаем, что система (4.8) РЛУ в том и только том случае, если РЛУ система

$$\dot{x}=A(t)x+v(t),\quad v(t)\in K(t)\doteq\mathcal{K}(t)\cap O_1[0], \tag{4.9}$$

[1]Последний случай возникает, например, в ситуации, когда $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{u}(\cdot))\in\mathfrak{A}$ — решение некоторой оптимизационной задачи с уравнением связи вида $\dot{x}=f(x,u)$ (см. подробнее [16], с. 752; [23], с. 209).

где $\mathcal{K}(t)$ — опорный конус с вершиной в нуле к $V(t)$. Отметим, что исследование вопроса о РЛУ системы (4.9) в ряде случаев легче, нежели системы (4.8), т. к. структура множества допустимых управлений становится проще. В силу сказанного из теоремы 2.1 получаем

Следствие 4.1. Пусть функция $f : G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию 1) и на процессе $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c(\mathbb{R}_+)$ выполняются условия 2), 3). Тогда, если система (4.8) РЛУ, то система (1.2) РЛУ на $\mathrm{orb}_+(\widehat{x})$.

Замечание 4.3. Поскольку $\mathcal{U}_{\tau,\vartheta} \cong \mathcal{M}^{(1)}_{\tau,\vartheta} \subset \mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$ при каждом $\tau \geq 0$, то из РЛУ на $\mathrm{orb}_+(\widehat{x})$ системы $\dot{x} = f(x, u(t))$ следует РЛУ на $\mathrm{orb}_+(\widehat{x})$ системы (1.2). Обратное же утверждение без дополнительных предположений (включающих в себя выпуклость множества $f(t, x, \mathfrak{U})$ при всех $(t, x) \in [\tau, \tau + \vartheta] \times G$), вообще говоря, неверно. Тем не менее, т. к. $\mathcal{M}_{\tau,\vartheta}$ является замыканием множества $\mathcal{M}^{(1)}_{\tau,\vartheta}$ по норме $\|\cdot\|_{w,[\tau,\tau+\vartheta]}$ [2], [3], то, как и в теореме 2.2 ([16], с. 749), можно указать достаточные условия, когда по следствию 4.1 при каждом $\tau \geq 0$ всякую точку $x_0 \in O_\varepsilon[\widehat{x}(\tau)]$ можно перевести на $[\tau, \tau + \vartheta]$ с помощью управлений из $\mathcal{U}_{\tau,\vartheta}$ в любую наперед заданную окрестность точки $\widehat{x}(\tau + \vartheta)$.

5. В этом пункте приведем и докажем основное утверждение работы.

Теорема 5.1. *Пусть $g \in C(G \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$, функция $f : G \times \mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию* 1) *и на допустимом процессе $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathcal{A}_c$, являющемся решением задачи* (1.4)*, выполняются условия* 2) (*см. замечание* 2.1) *и* 3)*. Тогда, если система* (2.1) *РЛУ, то $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathcal{OP}(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Предположим, что найдутся такие точки $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $t_0 < t_1$, и допустимый процесс системы (1.2) $(x(\cdot), \mu(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c[t_0, t_1]$, что

$$x(t_0) = \widehat{x}(t_0), \quad x(t_1) = \widehat{x}(t_1) \tag{5.1}$$

и для (1.3)

$$\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot); t_0, t_1) - \mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot); t_0, t_1) \doteq \delta > 0. \tag{5.2}$$

Отметим, что из РЛУ системы (2.1) (в нуль) на $[0, \infty)$ вытекает ее РЛУ на $[t_0, \infty)$. Поэтому по теоремам 2.1 и 4.1 (см. также замечания 4.1 и 4.2) следует, что найдутся общие константы $\varepsilon, \vartheta, \eta > 0$, входящие в определение РЛУ системы (1.2) на $\mathrm{orb}(\widehat{x}; [t_0, \infty))$, а также ее РЛД с $\mathrm{orb}(\widehat{x}; [t_0, \infty))$. Далее, поскольку $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathcal{A}_c$, то, как отмечалось в п. 1, отображения

$$(t, u) \mapsto \mathfrak{g}(t, u) \doteq g(\widehat{x}(t), u), \quad t \mapsto \mathcal{G}(t) \doteq \langle \widehat{\mu}(t), \mathfrak{g}(t, u) \rangle \tag{5.3}$$

принадлежат пространствам п. п. функций $B(\mathbb{R} \times \mathfrak{U}, \mathbb{R})$ и $S(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ соответственно. Поэтому для константы $\varkappa = \varkappa(\delta) \in (0, \varepsilon]$ (конкретное значение которой будет указано далее в процессе доказательства) по теоремам о существовании общих почти периодов [10], [11] найдется такое $l' = l'(\varkappa) > 0$, что каждый отрезок

$$\mathbb{T}_i \doteq [t_1 - t_0 + \vartheta + il, t_1 - t_0 + \vartheta + il + l'], \quad i \in \mathbb{Z}_+,$$

где $l \doteq 2(t_1 - t_0) + 3\vartheta + l'$, содержит такое $\tau_i = \tau_i(\varkappa)$, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}(\max_{u\in\mathfrak{U}} |\mathfrak{g}(t + \tau_i, u) - \mathfrak{g}(t, u)|) + \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{t_1 - t_0} \int\limits_t^{t+(t_1-t_0)} |\mathcal{G}(s + \tau_i) - \mathcal{G}(s)| ds + \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t + \tau_i) - x(t)| < \varkappa. \tag{5.4}$$

Заметим, что из определения константы $l > 0$ и выбора точек τ_i при каждом $i \in \mathbb{Z}_+$

$$t_0 + il < t_1 + il < t_0 + \tau_i - \vartheta < t_0 + \tau_i < t_1 + \tau_i < t_1 + \tau_i + \vartheta < t_0 + (i + 1)l - \vartheta < t_0 + (i + 1)l. \tag{5.5}$$

Принимая во внимание, что при каждом $\tau \in \mathbb{R}$ функция $t \mapsto \widehat{x}_\tau(t) \doteq \widehat{x}(t+\tau)$, $t \in [0,\vartheta]$, является решением задачи Коши

$$\dot{x} = \langle \widehat{\mu}_\tau(t), f(x,u)\rangle, \quad \widehat{\mu}_\tau(t) \doteq \widehat{\mu}(\tau+t), \quad t \in [0,\vartheta],$$
$$x(0) = \widehat{x}_\tau(0),$$

получаем, что при каждом $i \in \mathbb{Z}_+$ для точки $\widehat{x}_{t_0}(0) \in O_\varkappa[\widehat{x}_{t_0+\tau_i}(0)]$ найдется такое управление $\nu_i^- \in \mathcal{M}_\vartheta \doteq \mathcal{M}_{[0,\vartheta]}$, что будут выполнены соотношения

$$\|\widehat{\mu}_{t_0+\tau_i-\vartheta} - \nu_i^-\|_{w,[0,\vartheta]} \leq \eta|\widehat{x}_{t_0+\tau_i}(0) - \widehat{x}_{t_0}(0)| \overset{(5.4)}{\leq} \eta\varkappa \tag{5.6}$$

и система (1.2) имеет решение $y_i^-(t) \in O_\varepsilon[\widehat{x}_{t_0+\tau_i-\vartheta}(t)]$, $t \in [0,\vartheta]$, удовлетворяющее условиям

$$y_i^-(0) = \widehat{x}_{t_0+\tau_i-\vartheta}(0), \quad y_i^-(\vartheta) = \widehat{x}_{t_0}(0),$$

а для точки $\widehat{x}_{t_1}(0) \in O_\varkappa[\widehat{x}_{t_1+\tau_i}(0)]$ найдется такое управление $\nu_i^+ \in \mathcal{M}_\vartheta$, что

$$\|\widehat{\mu}_{t_1+\tau_i} - \nu_i^+\|_{w,[0,\vartheta]} \leq \eta|\widehat{x}_{t_1+\tau_i}(0) - \widehat{x}_{t_1}(0)| \overset{(5.4)}{\leq} \eta\varkappa \tag{5.7}$$

и система (1.2) имеет решение $y_i^+(t) \in O_\varepsilon[\widehat{x}_{t_1+\tau_i}(t)]$, $t \in [0,\vartheta]$, удовлетворяющее условиям

$$y_i^+(0) = \widehat{x}_{t_1+\tau_i}(0), \quad y_i^+(\vartheta) = \widehat{x}_{t_1+\tau_i+\vartheta}(0).$$

В следующих двух леммах $E_B(\widehat{x},\Delta)$ — совокупность Δ-почти периодов функции $\widehat{x} \in B(\mathbb{R},K)$, где $K \in \mathrm{comp}(G)$ определено в замечании 2.1 при $r = \varepsilon$.

Лемма 5.1. *Для любого $\Delta > 0$ существует такое $\varkappa_1 > 0$, что $J_i^- < \Delta$, $J_i^+ < \Delta$ для всякого $\varkappa \in (0,\varkappa_1]$ и каждого $i \in \mathbb{Z}_+$, при любом $\tau_i \in \mathbb{T}_i \cap E_B(\widehat{x},\varkappa)$, где*

$$J_i^- \doteq \left|\int_0^\vartheta \langle \widehat{\mu}_{\theta_i^-}(t) - \nu_i^-(t), g(\widehat{x}_{t_0-\vartheta}(t),u)\rangle dt\right|, \quad \theta_i^- \doteq t_0+\tau_i-\vartheta, \tag{5.8}$$

$$J_i^+ \doteq \left|\int_0^\vartheta \langle \widehat{\mu}_{t_1+\tau_i}(t) - \nu_i^+(t), g(\widehat{x}_{t_1}(t),u)\rangle dt\right|. \tag{5.9}$$

Доказательство. Поскольку функция $(t,u) \mapsto g(\widehat{x}_{t_0-\vartheta}(t),u)$ принадлежит пространству $\mathfrak{V}_{1,\vartheta} \doteq \mathfrak{V}([0,\vartheta]\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$, то найдется такая функция $\varphi_k \in \mathfrak{V}^0_{1,\vartheta}$, что $\int\limits_0^\vartheta \max\limits_{u\in\mathfrak{U}}|g(\widehat{x}_{t_0-\vartheta}(t),u) - \varphi_k(t,u)|dt < \Delta/4$. Теперь полагаем $\varkappa_1^- \doteq \Delta/\eta 2^{k+1}(1+\|\varphi_k\|_{\mathfrak{V}_{1,\vartheta}})$. Тогда для любого $\varkappa \in (0,\varkappa_1^-]$, зафиксировав произвольное $\tau_i \in \mathbb{T}_i \cap E_B(\widehat{x},\varkappa)$, $i \in \mathbb{Z}_+$, получаем

$$J_i^- \leq \Delta/2 + 2^k(1+\|\varphi_k\|_{\mathfrak{V}_{1,\vartheta}})\|\widehat{\mu}_{\theta_i^-} - \nu_i^-\|_{w,[0,\vartheta]} \overset{(5.6)}{\leq} \Delta/2 + \eta 2^k(1+\|\varphi_k\|_{\mathfrak{V}_{1,\vartheta}})\varkappa < \Delta.$$

Точно так же доказывается существование такого $\varkappa_1^+ > 0$, что $J_i^- < \Delta$ для каждого $\varkappa \in (0,\varkappa_1^+]$ при всяком $\tau_i \in \mathbb{T}_i \cap E_B(\widehat{x},\varkappa)$, $i \in \mathbb{Z}_+$. Поэтому константа $\varkappa \doteq \min(\varkappa_1^-,\varkappa_1^+)$ искомая. $\square$

Лемма 5.2. *Для любого $\Delta > 0$ существует такое $\varkappa_2 > 0$, что для всякого $\varkappa \in (0,\varkappa_2]$ и каждого $i \in \mathbb{Z}_+$, при любом $\tau_i \in \mathbb{T}_i \cap E_B(\widehat{x},\varkappa)$ выполнены неравенства $\gamma_i^- < \Delta$, $\gamma_i^+ < \Delta$, где*

$$\gamma_i^- \doteq \max_{t\in[0,\vartheta]}|\widehat{x}_{\theta_i^-}(t) - y_i^-(t)|, \quad \gamma_i^+ \doteq \max_{t\in[0,\vartheta]}|\widehat{x}_{t_1+\tau_i}(t) - y_i^+(t)|. \tag{5.10}$$

Доказательство. Поскольку функция $(t,u) \mapsto f(\widehat{x}_{t_0-\vartheta}(t),u)$ принадлежит пространству $\mathfrak{V}_{n,\vartheta} \doteq \mathfrak{V}([0,\vartheta]\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$, то по теореме Лебега об абсолютной непрерывности интеграла для константы $\sigma \doteq \Delta/16e^{\gamma\vartheta}$, где $\gamma > 0$ определено в (2.5), для компакта $K(t)$, заданного равенством (2.4) при $r = \varepsilon$, найдется такое $\varsigma > 0$, что для всякого измеримого множества $E \subset [0,\vartheta]$, мера Лебега которого не превосходит ς, выполнено неравенство $\int\limits_E \max\limits_{u\in\mathfrak{U}}|f(\widehat{x}_{t_0-\vartheta}(s),u)|ds < \sigma$.

Фиксируем далее точки $\mathfrak{t}_1,\dots,\mathfrak{t}_{N(\varsigma)}$, образующие конечную ς-сеть отрезка $[0,\vartheta]$, и для отображений $(t,u)\mapsto\psi_p(t,u)\doteq\chi_{[0,\mathfrak{t}_p]}(t)f(\widehat{x}_{t_0-\vartheta}(t),u)$, принадлежащих $\mathfrak{V}_{n,\vartheta}$, выбираем функции $\varphi_{l_1},\dots,\varphi_{l_{N(\varsigma)}}\in\mathfrak{V}^0([0,\vartheta]\times\mathfrak{U},\mathbb{R}^n)$ такие, что $I(p)\doteq\|\psi_p-\varphi_{l_p}\|_{\mathfrak{V}_{n,\vartheta}}<\sigma$, $p=1,\dots,N(\varsigma)$. Пусть $\Gamma\doteq\eta e^{\gamma\vartheta}\max\limits_{1\le p\le N(\varsigma)}2^{l_p}(1+\|\varphi_{l_p}\|_{\mathfrak{V}_{n,\vartheta}})$ и $\varkappa_2^-\doteq\min\{\Delta/4\gamma\vartheta e^{\gamma\vartheta},\Delta/4\eta\Gamma\}$. Теперь, если $\varkappa\in(0,\varkappa_2^-]$, то при $\tau_i\in\mathbb{T}_i\cap E_B(\widehat{x},\varkappa)$, выбирая для $t\in[0,\vartheta]$ такое $\mathfrak{t}_p$, что $|t-\mathfrak{t}_p|\le\varsigma$, получаем (см. (1.1), (5.6) и обозначение для θ_i^- в (5.8)) соотношения

$$J_i(t)\doteq\left|\int_0^t\langle\widehat{\mu}_{\theta_i^-}(s)-\nu_i^-(s),f(\widehat{x}_{t_0-\vartheta}(s),u)\rangle ds\right|\le 2I(p)+2^{l_p}(1+\|\varphi_{l_p}\|_{\mathfrak{V}_n})\|\widehat{\mu}_{\theta_i^-}-\nu_i^-\|_{w,[0,\vartheta]}+$$
$$+\left|\int_{\mathfrak{t}x_p}^t\langle\widehat{\mu}_{\theta_i^-}(s)-\nu_i^-(s),f(\widehat{x}_{t_0-\vartheta}(s),u)\rangle ds\right|<4\sigma+\eta\varkappa\Gamma<\Delta/2e^{\gamma\vartheta},$$

т. е. при всех $i\in\mathbb{Z}_+$

$$\max_{t\in[0,\vartheta]}J_i(t)\le\Delta/2e^{\gamma\vartheta}. \tag{5.11}$$

Так как при всех $t\in[0,\vartheta]$

$$y_i^-(t)=\widehat{x}_{\theta_i^-}(0)+\int_0^t\langle\nu_i^-(s),f(y_i^-(s),u)\rangle ds\in K(t),$$

то из соотношений

$$|\widehat{x}_{\theta_i^-}(t)-y_i^-(t)|\le\left|\int_0^t\langle\widehat{\mu}_{\theta_i^-}(s)-\nu_i^-(s),f(\widehat{x}_{\theta_i^-}(s),u)-f(\widehat{x}_{t_0-\vartheta}(s),u)\rangle ds\right|+J_i(t)+$$
$$+\int_0^t|\langle\nu_i^-(s),f(\widehat{x}_{\theta_i^-}(s),u)-f(y_i^-(s),u)\rangle|ds\le 2\gamma\vartheta\|\widehat{x}_{\tau_i}-\widehat{x}\|_C+J_i(t)+\gamma\int_0^t|\widehat{x}_{\theta_i^-}(s)-y_i^-(s)|ds$$

в силу неравенства Гронуолла–Беллмана и выбора $\varkappa$ получаем

$$\gamma_i^-\le(2\gamma\vartheta\varkappa+\max_{t\in[0,\vartheta]}J_i(t))e^{\gamma\vartheta}\overset{(5.11)}{<}\Delta\quad\text{при всех}\quad i\in\mathbb{Z}_+.$$

Точно так же, принимая во внимание, что функция $(t,u)\mapsto f(\widehat{x}_{t_1}(t),u)$ принадлежит пространству $\mathfrak{V}_{n,\vartheta}$, неравенство (5.7) и определение $y_i^+(t)$, получим существование такого $\varkappa_2^+>0$, что для каждого $\varkappa\in(0,\varkappa_2^+]$ при всяком $\tau_i\in\mathbb{T}_i\cap E_B(\widehat{x},\varkappa)$, $i\in\mathbb{Z}_+$, будет выполнено неравенство $\gamma_i^+<0$.

Для завершения доказательства леммы 5.1 достаточно взять $\varkappa_2\doteq\min(\varkappa_2^-,\varkappa_2^+)$. $\square$

Рассмотрим управление $\mathfrak{m}_0\in\mathcal{M}_{[t_0,t_0+l]}$, определенное равенством (см. (5.5))

$$\mathfrak{m}_0(t)=\begin{cases}\mu(t), & t\in[t_0,t_1];\\ \widehat{\mu}(t), & t\in[t_1,t_0+l].\end{cases} \tag{5.12}$$

Тогда в силу (5.1) решение $y_0(t)$, $t\in[t_0,t_0+l]$, системы (1.2), отвечающее $\mathfrak{m}_0\in\mathcal{M}_{[t_0,t_0+l]}$, представимо в виде

$$y_0(t)=\begin{cases}x(t), & t\in[t_0,t_1];\\ \widehat{x}(t), & t\in[t_1,t_0+l].\end{cases} \tag{5.13}$$

Далее рекуррентно при $j\in\mathbb{N}$ определяем управления $\mathfrak{m}_j\in\mathcal{M}_{[t_0,t_0+(j+1)l]}$:

$$\mathfrak{m}_j(t)=\mathfrak{m}^{(i)}(t),\quad t\in[t_0+il,t_0+(i+1)l],\quad i=0,1,\dots,j, \tag{5.14}$$

в котором $\mathfrak{m}^{(i)} \in \mathcal{M}_{[t_0+il,t_0+(i+1)l]}$, $1 \le i \le j$, заданы равенством (см. обозначение θ_i^- в (5.8))

$$\mathfrak{m}^{(i)}(t) = \begin{cases} \widehat{\mu}(t), & t \in [t_0+il, \theta_i^-]; \\ \nu_i^-(t-\theta_i^-), & t \in [\theta_i^-, t_0+\tau_i]; \\ \mu(t-\tau_i), & t \in [t_0+\tau_i, t_1+\tau_i]; \\ \nu_i^+(t-t_1-\tau_i), & t \in [t_1+\tau_i, \theta_i^+]; \\ \widehat{\mu}(t), & t \in [\theta_i^+, t_0+(i+1)l], \ \theta_i^+ \doteq t_1+\tau_i+\vartheta. \end{cases} \tag{5.15}$$

Отвечающее $\mathfrak{m}_j \in \mathcal{M}_{[t_0,t_0+(j+1)l]}$ решение $y_j(t)$, $t \in [t_0, t_0+(j+1)l]$, системы (1.2) представимо в виде

$$y_j(t) = y^{(i)}(t), \quad t \in [t_0+il, t_0+(i+1)l], \quad i = 0,1,\ldots,j, \tag{5.16}$$

в котором функции $y^{(i)}(t)$, $t \in [t_0+il, t_0+(i+1)l]$, $1 \le i \le j$, заданы равенством

$$y^{(i)}(t) = \begin{cases} \widehat{x}(t), & t \in [t_0+il, \theta_i^-]; \\ y_i^-(t-\theta_i^-), & t \in [\theta_i^-, t_0+\tau_i]; \\ x(t-\tau_i), & t \in [t_0+\tau_i, t_1+\tau_i]; \\ y_i^+(t-t_1-\tau_i), & t \in [t_1+\tau_i, \theta_i^+]; \\ \widehat{x}(t), & t \in [\theta_i^+, t_0+(i+1)l], \ \theta_i^+ \doteq t_1+\tau_i+\vartheta. \end{cases} \tag{5.17}$$

При каждом $j \in \mathbb{Z}_+$ из определения процесса $(y_j(\cdot), \mathfrak{m}_j(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c[t_0, t_0+(j+1)l]$ имеем следующие соотношения (1.3):

$$(\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)); t_0, t_0+(j+1)l) - (\mathfrak{T}(y_j(\cdot), \mathfrak{m}_j(\cdot)); t_0, t_0+(j+1)l) = \sum_{i=0}^{j} (I^-(i) + I(i) + I^+(i)), \tag{5.18}$$

где

$$I^-(i) \doteq \int_{\theta_i^-}^{t_0+\tau_i} (\langle \widehat{\mu}(t), g(\widehat{x}(t), u)\rangle - \langle \nu_i^-(t-\theta_i^-), g(y_i^-(t-\theta_i^-), u)\rangle) dt,$$
$$I(i) \doteq (\mathfrak{T}(\widehat{x}_{\tau_i}(\cdot), \widehat{\mu}_{\tau_i}(\cdot)); t_0, t_1) - (\mathfrak{T}(x(\cdot), \mu(\cdot)); t_0, t_1),$$
$$I^+(i) \doteq \int_{t_1+\tau_i}^{\theta_i^+} (\langle \widehat{\mu}(t), g(\widehat{x}(t), u)\rangle - \langle \nu_i^+(t-t_1-\tau_i), g(y_i^+(t-t_1-\tau_i), u)\rangle) dt.$$

Принимая во внимание (5.2)–(5.4) и (1.2) при $\varkappa \in (0, \varkappa_0]$, $\varkappa_0 \doteq \delta/6(t_1-t_0)$, для $\tau_i \in \mathbb{T}_i$, $i = 0,\ldots,j$, получаем

$$I(i) \ge \delta - (t_1-t_0) \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{1}{t_1-t_0} \int_t^{t+(t_1-t_0)} |\mathcal{G}(s+\tau_i) - \mathcal{G}(s)| ds > \gamma - \varkappa(t_1-t_0) > 5\delta/6. \tag{5.19}$$

Укажем следующие ограничения для $\varkappa$. С этой целью сначала фиксируем $\mathfrak{h} > 0$, при котором $\mathfrak{h}$-колебание $\omega_{\mathfrak{h}}[g, K\times\mathfrak{U}]$ непрерывной функции g на компактном множестве $K\times\mathfrak{U}$ не превосходит $\gamma/18\vartheta$. Пусть $\varkappa_2$ — константа, указанная в лемме при $\Delta \doteq \mathfrak{h}/2$. Тогда, используя утверждение этой леммы, получаем, что для каждого $\varkappa \in (0, \widehat{\varkappa}_2]$, $\widehat{\varkappa}_2 \doteq \min\{\mathfrak{h}/2, \varkappa_2\}$, существуют такие $\tau_i \in \mathbb{T}_i$, что при каждом $i = 0,\ldots,j$ будет выполняться неравенство (5.4) и (см. обозначения (5.10)) $\gamma_i^- < \mathfrak{h}/2$, $\gamma_i^+ < \mathfrak{h}/2$. Поэтому

$$\beta_i^- \doteq \|\widehat{x}_{t_0-\vartheta} - y_i^-\|_{C[0,\vartheta]} \le \|\widehat{x}_{\tau_i} - \widehat{x}\|_C + \gamma_i^- < \mathfrak{h},$$
$$\beta_i^+ \doteq \|\widehat{x}_{t_1} - y_i^+\|_{C[0,\vartheta]} \le \|\widehat{x}_{\tau_i} - \widehat{x}\|_C + \gamma_i^+ < \mathfrak{h},$$

где $C[0,\vartheta] \doteq C([0,\vartheta], \mathbb{R}^n)$, $C \doteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ и, следовательно,

$$\omega_{\beta_i^-}[g, K\times\mathfrak{U}] < \gamma/18\vartheta, \quad \omega_{\beta_i^+}[g, K\times\mathfrak{U}] < \gamma/18\vartheta, \quad i = 0,\ldots,j. \tag{5.20}$$

Далее, используя лемму 5.1, при $\Delta \doteq \delta/18$ получаем, что для каждого $\varkappa \in (0, \widehat{\varkappa}_1]$, $\widehat{\varkappa}_1 \doteq \min(\delta/18\vartheta, \varkappa_1)$, существуют такие точки $\tau_i \in \mathbb{T}_i$, что при каждом $i = 0, \dots, j$ будет выполняться неравенство (5.4) и (см. обозначения (5.8), (5.9))

$$J_i^- < \delta/18, \quad J_i^+ < \delta/18, \quad i = 0, \dots, j. \tag{5.21}$$

В силу сказанного для $\varkappa \in (0, \widehat{\varkappa}]$, $\widehat{\varkappa} \doteq \min\{\varkappa_0, \widehat{\varkappa}_1, \widehat{\varkappa}_2\}$, найдутся такие $\tau_i \in \mathbb{T}_i$, $i = 0, \dots, j$, что одновременно будут выполняться неравенства (5.4), (5.19), (5.20) и (5.21). Поэтому при каждом $i = 0, \dots, j$

$$|I^-(i)| + |I^+(i)| \leq 2\vartheta \sup_{t\in\mathbb{R}}(\max_{u\in\mathfrak{U}} |\mathfrak{g}(t+\tau_i, u) - \mathfrak{g}(t,u)|) + J_i^- + J_i^+ +$$

$$+ \int_0^\vartheta |\langle \nu_i^-(t), g(\widehat{x}_{t_0-\vartheta}(t), u) - g(y_i^-(t), u)\rangle| dt + \int_0^\vartheta |\langle \nu_i^+(t), g(\widehat{x}_{t_0-\vartheta}(t), u) - g(y_i^+(t), u)\rangle| dt \overset{\substack{(5.4)\\(5.21)}}{<}$$

$$< \delta/9 + \delta/18 + \delta/18 + \vartheta(\omega_{\beta_i^-}[g, K\times\mathfrak{U}] + \omega_{\beta_i^+}[g, K\times\mathfrak{U}]) \overset{(5.20)}{<} \delta/3.$$

Следовательно, в силу (5.19) $\sum\limits_{i=0}^{j-1}(I^-(i) + I(i) + I^-(i)) > \delta(j+1)/2$.

Таким образом, с учетом (5.18) доказано, что при каждом $j \in \mathbb{Z}_+$

$$\frac{1}{(j+1)l}(\mathfrak{T}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot); t_0, t_0+(j+1)l) - \mathfrak{T}(y_j(\cdot), \mathfrak{m}_j(\cdot); t_0, t_0+(j+1)l)) > \delta/2l. \tag{5.22}$$

Так как $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{1}{jl}\int\limits_a^{a+jl} \langle \widehat{\mu}(t), g(\widehat{x}(t), u)\rangle dt = M\{\langle \widehat{\mu}(t), g(\widehat{x}(t), u)\rangle\}$ [10] равномерно по $a \in \mathbb{R}$, то найдется такое $\widehat{j} \in \mathbb{N}$, что при всех $j \geq \widehat{j}$ будет выполнено неравенство

$$\left| M\{\langle \widehat{\mu}(t), g(\widehat{x}(t), u)\rangle\} - \frac{1}{(j+1)l}\int_{t_0}^{t_0+(j+1)l} \langle \widehat{\mu}(t), g(\widehat{x}(t), u)\rangle dt \right| < \delta/4l,$$

из которого в силу (5.22) получаем, что при всех $j \geq \widehat{j}$

$$M\{\langle \widehat{\mu}(t), g(\widehat{x}(t), u)\rangle\} > \frac{1}{(j+1)l}\int_{t_0}^{t_0+(j+1)l} \langle \mathfrak{m}_j(t), g(y_j(t), u)\rangle dt + \delta/4l. \tag{5.23}$$

Напомним, что $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \in \mathcal{A}_c$, т. е. по определению функция $t \mapsto \widehat{x}(t)$ п. п. по Бору, а отображение (см. п. 1 и обозначение в (5.3)) $(t,u) \mapsto \mathfrak{g}(t,u)$ принадлежит пространству п. п. функций $B(\mathbb{R}\times\mathfrak{U}, \mathbb{R})$. Поэтому [11], [9] множество их общих $\varkappa$-почти периодов, являющихся целыми кратными числа l, относительно плотно и найдется такое $j_0 > \widehat{j}$, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}(\max_{u\in\mathfrak{U}} |\mathfrak{g}(t+(j_0+1)l, u) - \mathfrak{g}(t,u)|) + \sup_{t\in\mathbb{R}} |\widehat{x}(t+(j_0+1)l) - \widehat{x}(t)| < \varkappa. \tag{5.24}$$

Теперь для точки $\widehat{x}(t_0) \in O_\varkappa[\widehat{x}(t_0+(j_0+1)l)]$ рассмотрим такое управление $\mathfrak{n} \in \mathcal{M}_{[0,\vartheta]}$, что

$$\|\widehat{\mu}_{\zeta_0} - \mathfrak{n}\|_{w,[0,\vartheta]} \leq \eta |\widehat{x}(t_0+(j_0+1)l) - \widehat{x}(t_0)| \overset{(5.24)}{<} \varkappa, \quad \zeta_0 \doteq t_0 + (j_0+1)l - \vartheta, \tag{5.25}$$

и система (1.2) имеет решение $z(t) \in K(t)$, $t \in [0, \vartheta]$, удовлетворяющее условиям

$$z(0) = \widehat{x}(\zeta_0), \quad z(\vartheta) = \widehat{x}(t_0). \tag{5.26}$$

Далее строим управление $\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_{[t_0, t_0+j_0 l]}$, определенное равенством (см. (5.14) и (5.5) при $j = j_0$)

$$\mathfrak{m}(t) \doteq \begin{cases} \mathfrak{m}_{j_0}(t), & t \in [t_0, \zeta_0]; \\ \mathfrak{n}(t-\zeta_0), & t \in [\zeta_0, t_0+(j_0+1)l]. \end{cases}$$

Тогда (см. (5.16) при $j = j_0$ и (5.26))

$$y(t) \doteq \begin{cases} y_{j_0}(t), & t \in [t_0, \zeta_0]; \\ z(t-\zeta_0), & t \in [\zeta_0, t_0 + (j_0+1)l], \end{cases}$$

является решением системы (1.2), отвечающим этому управлению $\mathfrak{m}$, и т. к. $y(t_0) = \widehat{x}(t_0) = z(\vartheta) = y(t_0 + (j_0+1)\,l)$ (см.(5.1), (5.26)), то построенный процесс $(y(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c[t_0, t_0 + (j_0+1)l]$ может быть $(j_0+1)l$-периодическим образом продолжен на $\mathbb{R}$. Полученный таким образом процесс $(\widetilde{y}(\cdot), \widetilde{\mathfrak{m}}(\cdot))$ принадлежит множеству $\mathcal{A}_c$, поскольку $\mathcal{A}_c$ содержит все периодические процессы.

Покажем[1], что

$$I(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) > I(\widetilde{y}(\cdot), \widetilde{\mathfrak{m}}(\cdot)) = \frac{1}{j_0' l} \int_{t_0}^{t_0 + j_0' l} \langle \mathfrak{m}(t), g(y(t), u) \rangle dt, \quad j_0' \doteq j_0 + 1. \tag{5.27}$$

Действительно, в силу (5.5), (5.12)–(5.17) и определения $(y(\cdot), \mathfrak{m}(\cdot))$ имеем

$$\left| \int_{t_0}^{t_0+j_0' l} \langle \mathfrak{m}_{j_0}(t), g(y_{j_0}(t), u) \rangle dt - \int_{t_0}^{t_0+j_0' l} \langle \mathfrak{m}(t), g(y(t), u) \rangle dt \right| =$$
$$= \left| \int_{\zeta_0}^{\zeta_0+\vartheta} (\langle \widehat{\mu}(t), g(\widehat{x}(t), u) \rangle - \langle \mathfrak{n}(t-\zeta_0), g(z(t-\zeta_0), u) \rangle) dt \right| \le \mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2,$$

где

$$\mathbb{I}_1 \doteq \left| \int_0^{\vartheta} \langle \widehat{\mu}_{\zeta_0}(t) - \mathfrak{n}(t), g(\widehat{x}_{\zeta_0}(t), u) \rangle dt \right|, \quad \mathbb{I}_2 \doteq \left| \int_0^{\vartheta} \langle \mathfrak{n}(t), g(\widehat{x}_{\zeta_0}(t), u) - g(z(t), u) \rangle dt \right|.$$

Поскольку (см. обозначение в (5.3))

$$\mathbb{I}_1 \le 2\vartheta \sup_{t \in \mathbb{R}} (\max_{u \in \mathfrak{U}} |\mathfrak{g}(t + j_0' l, u) - \mathfrak{g}(t, u)|) + \left| \int_0^{\vartheta} \langle \widehat{\mu}_{\zeta_0}(t) - \mathfrak{n}(t), g(\widehat{x}_{t_0 - \vartheta}(t), u) \rangle dt \right|,$$

а $\varkappa \le \widehat{\varkappa}_1 \doteq \min(\delta/18\vartheta, \varkappa_1)$, то (см. доказательство леммы 5.1 при $\Delta \doteq \delta/18$) $\mathbb{I}_1 < \delta/6$. Далее $\mathbb{I}_2 \le \vartheta \omega_\beta[g, K \times \mathfrak{U}]$, где $\beta \doteq \|\widehat{x}_{\zeta_0} - y\|_{C([0,\vartheta], \mathbb{R}^n)}$. Учитывая, что $z(t) = \widehat{x}_{\zeta_0}(0) + \int\limits_0^t \langle \mathfrak{n}(s), f(z(s), u) \rangle ds$, $t \in [0, \vartheta]$, как и при доказательстве леммы 5.2, получаем, что

$$\beta \le (2\vartheta\gamma \|\widehat{x}_{j_0' l} - \widehat{x}\|_C + \max_{t \in [0,\vartheta]} J(t)) e^{\gamma\vartheta} \overset{(5.24)}{<} (2\vartheta\delta\varkappa + \max_{t \in [0,\vartheta]} J(t)) e^{\gamma\vartheta},$$

где $J(t) \doteq \left| \int\limits_0^t \langle \widehat{\mu}_{\zeta_0}(s) - \mathfrak{n}(s), f(\widehat{x}_{t_0 - \vartheta}(s), u) \rangle ds \right|$, а т. к. $\varkappa < \widehat{\varkappa}_2 \doteq \min(\mathfrak{h}/2, \varkappa_2)$, то (см. доказательство неравенства (5.11) в лемме 5.2 при $\Delta \doteq \mathfrak{h}/2$ и (5.28)) $\beta < \mathfrak{h}$, следовательно, $\mathbb{I}_2 < \delta/18$. Поэтому $\mathbb{I}_1 + \mathbb{I}_2 \le 2\delta/9$, а значит (напомним, что $j_0' \doteq j_0 + 1$),

$$\frac{1}{j_0' l} \int_{t_0}^{t_0+j_0' l} \langle \mathfrak{m}_{j_0}(t), g(y_{j_0'}(t), u) \rangle dt > \frac{1}{j_0' l} \int_{t_0}^{t_0+j_0' l} \langle \mathfrak{m}(t), g(y(t), u) \rangle dt - \frac{2\delta}{9 j_0'\, l}.$$

Отсюда в силу неравенства (5.23), справедливого при $j > \widehat{j}$, и выбора j_0 следует

$$I(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) > I(\widetilde{y}(\cdot), \widetilde{\mathfrak{m}}(\cdot)) + \frac{\delta}{4l} - \frac{2\delta}{9 j_0' l} > I(\widetilde{y}(\cdot), \widetilde{\mathfrak{m}}(\cdot)).$$

Тем самым доказано неравенство (5.27), которое противоречит предположению, что п. п. процесс $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot))$ является решением задачи (1.4).

[1]Напомним, что $M\{f(t)\} = \frac{1}{\omega} \int\limits_a^{a+\omega} f(t) dt$ для каждой ограниченной измеримой ω-периодической функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ при каждом $a \in \mathbb{R}$.

Доказанная теорема 5.1 указывает на связь задач оптимального управления п. п. движениями с теорией магистральных процессов.

В следующем пункте дополним утверждение доказанной теоремы 5.1.

6. В $\mathfrak{A}_c(\mathbb{R})$ выделим подмножество $\mathbb{P}_{c,\omega}$ $(\omega > 0)$, состоящее из ω-периодических процессов и рассмотрим (см. сноску на с. 26 и обозначение в (1.4)) задачу периодической оптимизации

$$I(x(\cdot),\mu(\cdot)) \to \inf, \quad (x(\cdot),\mu(\cdot)) \in \mathbb{P}_c \doteq \bigcup_{\omega>0} \mathbb{P}_{c,\omega}, \tag{6.1}$$

в которой процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathbb{P}_{c,\widehat{\omega}}$ называется решением, если для любого $\omega > 0$ и всякой пары $(x(\cdot),\mu(\cdot)) \in \mathbb{P}_{c,\omega}$ будем иметь $I(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) = \frac{1}{\widehat{\omega}}\int\limits_0^{\widehat{\omega}} \langle \widehat{\mu}(t), g(\widehat{x}(t),u)\rangle dt \le \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} \langle \mu(t), g(x(t),u)\rangle dt = I(x(\cdot),\mu(\cdot))$. Задача (6.1), с одной стороны, является овыпуклением (расширением) задачи

$$I(x(\cdot),u(\cdot)) \to \inf, \quad (x(\cdot),u(\cdot)) \in \mathbb{P} \doteq \{(z(\cdot),v(\cdot)) : (z(\cdot),\delta_{v(\cdot)}) \in \mathbb{P}_c\} \tag{6.2}$$

оптимального управления периодическими движениями (напр., [8], [26]–[28], а в [29] см. о целесообразности процедуры овыпукления и ее корректности), а с другой, — сужением задачи (1.4) на множество $\mathbb{P}_c \subset \mathcal{A}_c$. Поэтому

$$\iota_1 \doteq \inf\{I(x(\cdot),\mu(\cdot)),(x(\cdot),\mu(\cdot)) \in \mathcal{A}_c\} \le \inf\{I(x(\cdot),\mu(\cdot)),(x(\cdot),\mu(\cdot)) \in \mathbb{P}_c\} \doteq \iota_2. \tag{6.3}$$

Всюду далее считаем, что $\iota_1 > -\infty$, функция $g \in C(G\times\mathfrak{U},\mathbb{R})$ и отображение $f : G\times\mathfrak{U} \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию 1).

Теорема 6.1. *Пусть $\widehat{\omega}$-периодический процесс $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathbb{P}_{c,\widehat{\omega}}$ является решением задачи* (6.1). *Тогда, если система $\dot{y} = \langle \widehat{\mu}(t), f'_x(\widehat{x}(t),u)\rangle y$, $y \in \mathbb{R}^n$, не имеет $\widehat{\omega}$-периодических решений, отличных от тривиального, то этот процесс будет решением задачи* (1.4).

Для доказательства теоремы 6.1 в силу (6.3) достаточно рассмотреть последовательность [12] п. п. вариаций $\{(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot))\}_{j=1}^\infty$ процесса $(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) \in \mathbb{P}_{c,\widehat{\omega}} \subset \mathcal{A}_c$, для которой в силу ограничений, наложенных на систему $\dot{y} = \langle \widehat{\mu}(t), f'_x(\widehat{x}(t),u)\rangle y$, и теоремы 2.1 из [12] будет выполнено равенство $\lim\limits_{j\to\infty} I(x_j(\cdot),\mu_j(\cdot)) = \frac{1}{\widehat{\omega}}\int\limits_0^{\widehat{\omega}} \langle \widehat{\mu}(t), g(\widehat{x}(t),u)\rangle dt$.

Вместе с тем, одним из аспектов целесообразности изучения задач оптимального управления п.п. движениями служит то обстоятельство, что в некоторых задачах оптимального управления периодическими движениями инфимум целевого функционала, определенного на множестве D_p допустимых периодических процессов, достигается на допустимом п. п. процессе в задачах п. п. оптимизации (напр., [8], [9], [26], [30]). Вообще, расширение множества D_p до п. п. процессов улучшает значение целевого функционала [29], [31].

Теорема 6.2. *В условиях теоремы* 5.1 *имеет место равенство* $I(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) = \iota_2$.

Доказательство. По теореме 4.1 система (1.2) РЛД с $\mathrm{orb}_+(\widehat{x})$ и пусть $\varepsilon,\vartheta,\eta > 0$ — константы, входящие в определение 4.1. Считаем, что $\varepsilon \le r$ (см. (2.4)). Так как функция $t \mapsto \widehat{x}(t)$ п. п. по Бору, а отображение $t \mapsto \langle \widehat{\mu}(t), g(\widehat{x}(t),u)\rangle$ п. п. по Степанову, то для $\varkappa \in (0,\varepsilon]$ найдется такая последовательность $\{\tau_j\}_{j=1}^\infty$ общих их $\varkappa$-почти периодов, что $\lim\limits_{j\to\infty} \tau_j = \infty$, $\tau_{j+1} - \tau_j > \vartheta$ при каждом $j \in \mathbb{N}$ и

$$\left| I(\widehat{x}(\cdot),\widehat{\mu}(\cdot)) - \frac{1}{\tau_j}\int_0^{\tau_j} \langle \widehat{\mu}(t), g(\widehat{x}(t),u)\rangle dt \right| \le \frac{1}{j}. \tag{6.4}$$

Кроме того, в силу РЛД системы (1.2) с $\mathrm{orb}_+(\widehat{x})$, для точки $\widehat{x}(0) \in O_\varkappa[\widehat{x}_{\tau_j}(0)]$ при каждом $j \in \mathbb{N}$ найдется такое управление $\nu_j^- \in \mathcal{M}_{[\tau_j-\vartheta,\tau_j]}$, что $\|\widehat{\mu} - \nu_j^-\|_{w,[\tau_j-\vartheta,\tau_j]} \le \eta|\widehat{x}(0) - \widehat{x}(\tau_j)|$ и система (1.2) имеет решение $y_j^-(t) \in O_\varepsilon[\widehat{x}_{\tau_j}(t)]$, $t \in [\tau_j - \vartheta, \tau_j]$, удовлетворяющее условиям

$$y_j^-(\tau_j - \vartheta) = \widehat{x}(\tau_j - \vartheta), \quad y_j^-(\tau_j) = \widehat{x}(0). \tag{6.5}$$

Теперь рассмотрим управление

$$\mu_j(t) \doteq \begin{cases} \widehat{\mu}(t), & t \in [0, \tau_j - \vartheta); \\ \nu_j^-(t), & t \in [\tau_j - \vartheta, \tau_j], \end{cases}$$

и (6.5), отвечающее ему решение системы (1.2)

$$x_j(t) \doteq \begin{cases} \widehat{x}(t), & t \in [0, \tau_j - \vartheta); \\ y_j^-(t), & t \in [\tau_j - \vartheta, \tau_j]. \end{cases}$$

В силу (6.5) построенный процесс $(x_j(\cdot), \mu_j(\cdot)) \in \mathfrak{A}_c[0, \tau_j]$ допускает τ_j-периодическое продолжение $(\widetilde{x}_j(\cdot), \widetilde{\mu}_j(\cdot))$ на $\mathbb{R}$. Учитывая, что $y_j^-(t) \in O_\varepsilon[\widehat{x}_{\tau_j}(0)] \subset K$ при всех j, где $K \in \operatorname{comp}(G)$ определено в (2.4), принимая во внимание определение τ_j-периодического процесса $(\widetilde{x}_j(\cdot), \widetilde{\mu}_j(\cdot))$, получаем $\Big| I(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) - \frac{1}{\tau_j} \int\limits_0^{\tau_j} \langle \widetilde{\mu}_j(t), g(\widetilde{x}_j(t), u) \rangle dt \Big| \overset{(6.4)}{\leq} \frac{1}{j} + \frac{2\mathfrak{g}}{\tau_j}$, где $\mathfrak{g} \doteq \sup\limits_{(x,u) \in K \times \mathfrak{U}} |g(x, u)|$. Поэтому $I(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\mu}(\cdot)) = \lim\limits_{j \to \infty} \frac{1}{\tau_j} \int\limits_0^{\tau_j} \langle \widetilde{\mu}_j(t), g(\widetilde{x}_j(t), u) \rangle dt$, откуда в силу (6.3) следует нужное равенство. $\square$

Замечание 6.1. По сути при доказательстве теоремы 6.2 использовано лишь свойство РЛД системы (1.2) с $\operatorname{orb}_+(\widehat{x})$. Это свойство для выполнения указанного в этой теореме равенства существенно. В [29] приведен пример задачи вида (6.2), не имеющей решения, а отвечающая ей задача п. п. отпимизации имеет решение и значение целевого функционала на нем строго меньше инфимума значений этого функционала на допустимых периодических процессах. В этом примере система управления не обладает свойством РЛД с точек оптимальной траектории.

Литература

1. Арутюнов А.В. *Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи.* – М.: Изд-во Факториал, 1997. – 256 с.
2. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* – М.: Наука, 1977. – 623 с.
3. Гамкрелидзе Р.В. *Основы оптимального управления.* – Тбилиси.: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. – 230 с.
4. Дмитрук А.В. *Принцип максимума для общей задачи оптимального управления с фазовыми и регулярными смешанными ограничениями* // Оптимальность управляемых динамических систем. Вып. 14. – М.: ВНИИСИ, 1990. – С. 26–42.
5. Ченцов А.Г. *Приложения теории меры к задачам управления.* – Свердловск: Средн.-Урал. кн. изд-во, 1985. – 218 с.
6. Красовский Н.Н. *Управление динамической системой.* – М.: Наука, 1985. – 518 с.
7. Субботин А.И., Ченцов А.Г. *Оптимизация гарантии в задачах управления.* – М.: Наука, 1981. – 288 с.
8. Панасюк А.И., Панасюк В.И. *Оптимальное управление с усредненным вдоль траектории функционалом* // ПММ. – 1985. – Т. 49. – Вып. 4. – С. 526–536.
9. Иванов А.Г. *Элементы математического аппарата задач почти периодической оптимизации.* I // Известия ин-та матем. и информ. УдГУ. Ижевск, 2002. – Вып. 1. – С. 3–100.
10. Левитан Б.М. *Почти-периодические функции.* – М.: Гостехиздат, 1953. – 287 с.
11. Fink A.M. *Almost periodic differential equation* // Lect. Notes Math. – 1973. – V. 377. – 336 p.
12. Иванов А.Г. *К вопросу об оптимальном управлении почти периодическими движениями* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 4. – С. 40–56.
13. Тонков Е.Л. *Динамическая система сдвигов и вопросы равномерной управляемости линейной системы* // ДАН СССР. – 1981. – Т. 21. – № 2. – С. 290–294.
14. Тонков Е.Л. *Управляемость нелинейной системы по первому приближению* // ПММ. – 1974. – Т. 38. – Вып. 4. – С. 599–606.

15. Иванов А.Г. *О равномерной локальной управляемости нелинейной системы* // Нелинейн. колеб. и теор. управл. – Ижевск, 1987. – С. 5–23.
16. Иванов А.Г. *Об управляемости нелинейной системы в классе обобщенных управлений* // ПММ. – 1990. – Т. 54. – Вып. 5. – С. 745–753.
17. Красовский Н.Н. *Теория управления движением. Линейные системы.* – М.: Наука, 1968. – 476 с.
18. Альбрехт Э.Г., Красовский Н.Н. *О наблюдаемости нелинейной управляемой системы в окрестности заданного движения* // АиТ. – 1964. – Т. 25. – № 7. – С. 625–639.
19. Атанс М., Фалб П. *Оптимальное управление.* – М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
20. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. *Очерки по математической теории систем.* – М.: Мир, 1971. – 400 с.
21. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Общая теория.* – М.: Ин. лит., 1976. – 896 с.
22. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Теория экстремальных задач.* – М.: Наука, 1970. – 478 с.
23. Тонков Е.Л. *Равномерная достижимость и ляпуновская приводимость билинейной управляемой системы* // Тр. ИММ УрО РАН. – 2000. – Т. 6. – № 1. – С. 210–238.
24. Иванов А.Г., Тонков Е.Л. *О равномерной локальной управляемости линейной системы* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 9. – С. 1499–1507.
25. Иванов А.Г., Тонков Е.Л. *Методы топологической динамики в задаче о равномерной локальной управляемости* // Докл. РАН. – 1995. – Т. 340. – № 4. – С. 467–469.
26. Панасюк А.И., Панасюк В.И. *Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем.* – Минск: Наука и техника, 1986. – 296 с.
27. Тонков Е.Л. *Оптимальные периодические движения управляемой системы* // Матем. физ. – 1977. – Вып. 21. – С. 45–59.
28. Gilbert E.G. *Optimal periodic control: a general theory of necessary conditions* // SIAM J. Contr. Optimization. – 1977. – V. 15. – № 5. – P. 717–746.
29. Иванов А.Г., Тонков Е.Л. *Задача оптимального управления периодическими процессами и ее расширения* // Функц. дифференц. уравнения. – Пермь, 1992. – С. 35–49.
30. Воронецкая М.А., Иванов А.Г. *О некоторых вариационных задачах в классе почти периодических функций* // Деп. в ВИНИТИ 27.12.03, № 342-В2004. УдГУ, Ижевск, 2003. – 32 с.
31. Иванов А.Г. *О существовании почти периодического решения линейной системы с квадратичным функционалом качества* // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 2. – С. 203–211.

Удмуртский государственный университет

Поступила
06.07.2004