ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 10 (521)

УДК 517.548

В.В. АСЕЕВ, Д.Г. КУЗИН, А.В. ТЕТЕНОВ

УГЛЫ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ И СКЛЕЙКА КВАЗИСИММЕТРИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Введение. В данной работе изучается угловая характеристика пары множеств с непустым пересечением в произвольных метрических пространствах, обобщающая понятие топологического угла, введенного в [1] для пары жордановых дуг на плоскости, выходящих из одной точки. Новое определение [2] включает в себя как частный случай понятие топологического конуса. Аналогом известных теорем об искажении топологических углов при квазиконформных отображениях является теорема 2.1, в которой доказывается, что наличие двусторонних оценок искажения угловой характеристики произвольных пар множеств при гомеоморфизме метрических пространств является критерием квазисимметричности этого гомеоморфизма. В третьей части теоремы 2.1 получены двусторонние оценки искажения угла между множествами в точках их пересечения при локально квазисимметрических вложениях. Так как квазиконформные отображения областей в R^n являются локально квазисимметрическими, то это утверждение содержит теоремы об искажении топологических углов и конусов при квазиконформных отображениях ([3], предложение 2, с. 16; [2], теорема 3.1, с. 184). Основным результатом статьи является теорема 3.1 о склейке квазисимметрических отображений в метрических пространствах. Ее прообразом послужила теорема ([4], теорема 4, с. 238) о склейке квазисимметрических функций, заданных на отрезках числовой прямой. В теореме 3.1 установлена квазисимметричность склейки двух квазисимметрических отображений f_0, f_1, заданных на множествах K_0, K_1 с угловой характеристикой $\alpha > 0$ и таких, что множества $f_0(K_0)$ и $f_1(K_1)$ имеют угловую характеристику $\beta > 0$. При этом должно выполняться естественное условие склейки в точках множества $K_0 \cap K_1$, полностью аналогичное условию склейки в [4]. Более слабый вариант теоремы 3.1 о квазисимметрической склейке на конусах в пространстве R^n использовался в [5] при решении задачи о квазиконформном продолжении на плоскости с областей типа криволинейного треугольника.

1. Определения, обозначения и терминология. В метрическом пространстве $\mathcal{M}$ символом $B(x,r)$ обозначается открытый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке x.

1.1. Пусть $\mathcal{M}$ — метрическое пространство с метрикой ρ. *Угловой характеристикой* $\angle(A_1, A_2)$ пары множеств $A_1, A_2 \subset \mathcal{M}$ с непустым пересечением называется точная верхняя грань множества всех чисел c таких, что для любых $x \in A_1$, $y \in A_2$ имеется такая точка $z \in A_1 \cap A_2$, что $\rho(x,y) \geq c[\rho(x,z) + \rho(z,y)]$. (Если $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то по определению полагаем $\angle(A_1, A_2) = 0$.)

Пусть $p \in A_1 \cap A_2$ и $\mathcal{U}(p)$ — семейство всех открытых окрестностей точки p, частично упорядоченное по обратному включению, т. е. $U \leq V$, если $U \supset V$. Положив для каждого $U \in \mathcal{U}(p)$

$$\angle_U(A_1, A_2) = \inf\{\angle(A_1 \cap V, A_2 \cap V) : V \in \mathcal{U}(p),\ V \subset U\},$$

получаем ограниченную сверху монотонно возрастающую направленность на отрезке $[0,1]$, у которой, как известно (напр., [6], предложение 4.2, с. 95 или [7], гл. 2, задача E(a), с.111), существует предел $\angle(A_1, A_2, p) = \lim\limits_{U \in \mathcal{U}(p)} \angle_U(A_1, A_2)$, который называем угловой характеристикой пары множеств A_1, A_2 в точке p.

Заметим, что всегда выполняются неравенства $0 \le \angle(A_1, A_2) \le 1$ и $\angle(A_1, A_2, p) \ge \angle(A_1, A_2)$ для любой точки $p \in A_1 \cap A_2$. Из включений $A_1' \subset A_1$ и $A_2' \subset A_2$ в общем случае не следует никаких соотношений между $\angle(A_1', A_2')$ и $\angle(A_1, A_2)$. Однако, если при этом $A_1' \cap A_2' = A_1 \cap A_2$, то $\angle(A_1', A_2') \ge \angle(A_1, A_2)$. Отметим также свойство инвариантности угловой характеристики относительно подобий, которое непосредственно следует из того, что преобразования подобия сохраняют отношения расстояний.

1.2. Пусть $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ — метрические пространства с метриками ρ и ρ' соответственно. Пусть топологическое вложение $Q : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ является *подобием*, т. е. существует такое $k > 0$, что $\rho'(Q(x), Q(y)) = k\rho(x, y)$ для всех $x, y \in \mathcal{M}$. Тогда для любой пары множеств $A_0, A_1 \subset \mathcal{M}$ и любой точки $p \in A_0 \cap A_1$ выполняются равенства

$$\angle(Q(A_0), Q(A_1)) = \angle(A_0, A_1) \ \text{ и } \ \angle(Q(A_0), Q(A_1), Q(p)) = \angle(A_0, A_1, p).$$

Угловая характеристика пары множеств является прямым обобщением следующего понятия, введенного на плоскости в [1]: *топологическим углом* между двумя жордановыми дугами γ_1 и γ_2, выходящими из точки z_0, называется величина

$$A(\gamma_1, \gamma_2) = \lim_{z_1, z_2 \to z_0;\ z_i \in \gamma_i} \inf 2 \arcsin(|z_1 - z_2| / (|z_1 - z_0| + |z_2 - z_0|)).$$

В [8] были изучены топологические углы между дугами в пространстве R^n, а в ([2], п. 2.3, с. 181) введено аналогичное понятие *топологического конуса* в R^3, под которым понимался угол между поверхностью γ_1 и жордановой дугой γ_2, выходящей из точки $z_0 \in \gamma_1$. Определение 1.1 угловой характеристики пары множеств γ_1, γ_2 в точке z_0 их пересечения согласуется с понятием топологического угла в названных выше частных случаях; при этом имеет место равенство $A(\gamma_1, \gamma_2) = 2 \arcsin(\angle(\gamma_1, \gamma_2, z_0))$.

1.3. Гомеоморфизм $\eta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ вещественной полуоси на себя, удовлетворяющий условию $\eta(1) \ge 1$, называется *функцией искажения*. Каждой функции искажения η сопоставляется *сопряженная* к ней функция искажения $\widetilde{\eta} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, определяемая формулой

$$\widetilde{\eta}(t) = \frac{1}{\eta^{-1}(1/t)} \quad \text{при} \quad t \ne 0, \quad \widetilde{\eta}(0) = 0.$$

Пусть $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — метрические пространства с метриками ρ_1 и ρ_2 соответственно, η — функция искажения и $f : K \to \mathcal{M}_2$ — топологическое вложение подмножества $K \subset \mathcal{M}_1$ в пространство $\mathcal{M}_2$. Отображение f называется *η-квазисимметрическим*, если для любых попарно различных точек $x_0, x_1, x_2 \in \mathcal{M}_1$ выполняется оценка

$$\frac{\rho_2(f(x_2), f(x_0))}{\rho_2(f(x_1), f(x_0))} \le \eta\Big(\frac{\rho_1(x_2, x_0)}{\rho_1(x_1, x_0)}\Big). \tag{1.1}$$

Отображение f называется *локально η-квазисимметрическим*, если для каждой точки $x \in K$ существует $r(x) > 0$ такое, что ограничение $f|(K \cap B(x, r(x)))$ есть η-квазисимметрическое вложение. Отображение $f : K \to \mathcal{M}$ называем *η-квазисимметрическим в точке* $x_0 \in K$, если оценка (1.1) выполняется для всех пар точек $x_1, x_2 \in K$, отличных от точки x_0. Заметим ([9], теорема 2.2, с. 99), что если f — η-квазисимметрический гомеоморфизм, то обратное к нему отображение f^{-1} является $\widetilde{\eta}$-квазисимметрическим. Любое L-билипшицево отображение $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ (с коэффициентом билипшицевости $L \ge 1$), т. е. такое, что для всех $x, y \in \mathcal{M}_1$ выполняется оценка $L^{-1}\rho_1(x, y) \le \rho_2(f(x), f(y)) \le L\rho_1(x, y)$, является η-квазисимметрическим с функцией искажения $\eta(t) = L^2 t$.

Понятие квазисимметрического вложения, введеное в [9], обобщает на случай произвольных метрических пространств понятие квазисимметрической функции, появившееся в работах Л. Альфорса и А. Бёрлинга о граничных свойствах квазиконформного автоморфизма верхней полуплоскости. Более подробное описание свойств квазисимметрических вложений и их связей с теорией квазиконформных отображений можно найти, например, в [10], [11].

2. Искажение угловой характеристики при квазисимметрических вложениях. Квазисимметрическим аналогом известных теорем об искажении топологических углов при квазиконформных отображениях областей в R^n является

Теорема 2.1. *Пусть задано топологическое вложение* $f:\mathcal{M}_1\to\mathcal{M}_2$.

(a1) *Если f является η-квазисимметрическим, то для любой пары множеств $A_1, A_2\subset\mathcal{M}_1$ выполняются оценки*

$$\angle(f(A_1),f(A_2))\ge\psi(\angle(A_1,A_2)),\quad \angle(A_1,A_2)\ge\widetilde{\psi}(\angle(f(A_1),f(A_2))),\tag{2.1}$$

где ψ и $\widetilde{\psi}$ — монотонно возрастающие функции на отрезке $[0,1]$, заданные формулами $\psi(t)=(2\eta(1/t))^{-1}$ при $0<t\le 1$ и $\psi(0)=0$; $\widetilde{\psi}(t)=(2\widetilde{\eta}(1/t))^{-1}=\eta(t)/2$.

(a2) *Если имеются вещественные непрерывные монотонно возрастающие функции ψ и φ на отрезке $[0,1]$, $\psi(0)=\varphi(0)=0$, такие, что для любой пары непустых пересекающихся множеств $A_1,A_2\subset\mathcal{M}_1$ выполняются оценки*

$$\angle(f(A_1),f(A_2))\ge\psi(\angle(A_1,A_2)),\quad \angle(A_1,A_2)\ge\varphi(\angle(f(A_1),f(A_2))),\tag{2.2}$$

то f является η-квазисимметрическим отображением с функцией искажения η, зависящей лишь от ψ и φ.

(a3) *Если f является локально η-квазисимметрическим, то для любой точки $p\in\mathcal{M}_1$ и любой пары множеств $A_1,A_2\subset\mathcal{M}_1$ таких, что $p\in A_1\cap A_2$, выполняются оценки*

$$\angle(f(A_1),f(A_2),f(p))\ge\psi(\angle(A_1,A_2,p)),\quad \angle(A_1,A_2,p)\ge\widetilde{\psi}(\angle(f(A_1),f(A_2),f(p)))$$

с теми же функциями ψ и $\widetilde{\psi}$, что и в утверждении (a1).

Доказательство. (a1) Пусть задана пара непустых множеств $A_1,A_2\subset\mathcal{M}_1$. Если $\angle(A_1,A_2)=0$, то требуемое неравенство $\angle(f(A_1),f(A_2))\ge 0=\psi(0)$ тривиально верно. Пусть $\angle(A_1,A_2)=\alpha>0$. Фиксируем произвольное $\alpha'<\alpha$. Тогда для произвольно заданной пары точек $x_1\in A_1$ и $x_2\in A_2$ существует точка $z\in A_1\cap A_2$, для которой $\rho_1(x_1,x_2)\ge\alpha'[\rho_1(x_1,z)+\rho_1(x_2,z)]$. Так как $\rho_1(x_j,z)/\rho_1(x_1,x_2)\le 1/\alpha'$ при $j=1,2$, то из условия η-квазисимметричности f следуют при $j=1,2$ неравенства

$$\frac{\rho_2(f(x_j),f(z))}{\rho_2(f(x_1),f(x_2))}\le\eta\Big(\frac{\rho_1(x_j,z)}{\rho_1(x_1,x_2)}\Big)\le\eta(1/\alpha').$$

Поэтому $\rho_2(f(x_1),f(z))+\rho_2(f(x_2),f(z))\le 2\eta(1/\alpha')\rho_2(f(x_1),f(x_2))$. В силу произвольного выбора точек $f(x_1)\in f(A_1)$ и $f(x_2)\in f(A_2)$ отсюда следует $\angle(f(A_1),f(A_2))\ge(2\eta(1/\alpha'))^{-1}$. В силу произвольности $\alpha'<\alpha$ и непрерывности функции искажения η это означает, что $\angle(f(A_1),f(A_2))\ge(2\eta(1/\alpha))^{-1}=\psi(\alpha)$. Второе неравенство в (2.1) получается из первой оценки, записанной для обратного отображения f^{-1}, которое является $\widetilde{\eta}$-квазисимметрическим.

(a2) Пусть попарно различные точки $z_1,z_2,z_3\in\mathcal{M}_1$ занумерованы так, что $a=\rho_1(z_2,z_3)\le b=\rho_1(z_1,z_3)\le c=\rho_1(z_1,z_2)$. Положим $a'=\rho_2(f(z_2),f(z_3))$, $b'=\rho_2(f(z_1),f(z_3))$ и $c'=\rho_2(f(z_1),f(z_2))$. Для попарно различных индексов $i,j,k\in\{1,2,3\}$, применив первое неравенство в (2.2) к паре двухточечных множеств $A_1=\{z_i,z_j\}$ и $A_2=\{z_i,z_k\}$, получаем оценку

$$\psi(\angle(A_1,A_2))=\psi\Big(\frac{\rho_1(z_j,z_k)}{\rho_1(z_i,z_j)+\rho_2(z_i,z_k)}\Big)\le\frac{\rho_2(f(z_j),f(z_k))}{\rho_2(f(z_i),f(z_j))+\rho_2(f(z_i),f(z_k))}=\angle(f(A_1),f(A_2)),$$

которая после введения монотонно возрастающей функции $\Psi(t)=1/\psi(1/t)$ при $t\in[1,+\infty)$ дает систему неравенств

$$\frac{\rho_2(f(z_i),f(z_j))+\rho_2(f(z_i),f(z_k))}{\rho_2(f(z_j),f(z_k))}\le\Psi\Big(\frac{\rho_1(z_i,z_j)+\rho_1(z_i,z_k)}{\rho_1(z_j,z_k)}\Big).\tag{2.3}$$

Применив второе неравенство в (2.2) и вводя монотонно возрастающую функцию $\Phi(t) = 1/\varphi(1/t)$ при $t \in [1, +\infty)$, аналогичным образом получим систему неравенств

$$\frac{\rho_2(f(z_i), f(z_j)) + \rho_2(f(z_i), f(z_k))}{\rho_2(f(z_j), f(z_k))} \geq \Phi^{-1}\Big(\frac{\rho_1(z_i, z_j) + \rho_1(z_i, z_k)}{\rho_1(z_j, z_k)}\Big). \tag{2.4}$$

Положив в (2.3) $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$, получим неравенство $c'/a' + b'/a' \leq \Psi(c/a + b/a)$. Так как $b \leq c$, то $c'/a' \leq \Psi(2c/a) = \omega_1(c/a)$, где $\omega_1(t) = 1/\psi(1/2t)$ при $t \geq 1$ и $\omega_1(t) = t/\psi(1/2)$ при $0 \leq t \leq 1$.

Так как $c \leq a + b \leq 2b$, то $b'/a' \leq \Psi(3b/a) = \omega_2(b/a)$, где $\omega_2(t) = 1/\psi(1/3t)$ при $t \geq 1$ и $\omega_2(t) = t/\psi(1/3)$ при $0 \leq t \leq 1$.

Положив в (2.3) $i = 3$, $j = 2$, $k = 1$, получим неравенство $a'/c' + b'/c' \leq \Psi(a/c + b/c)$, из которого следует, что $b'/c' \leq \Psi(2)$. Так как $b/c \geq b/(a + b) \geq 1/2$, то $b'/c' \leq 2\Psi(2)(b/c) = \omega_3(b/c)$, где $\omega_3(t) = 2t/\psi(1/2)$ при $t \geq 0$.

Положив в (2.3) $i = 2$, $j = 1$, $k = 3$, получим неравенство $a'/b' + c'/b' \leq \Psi(a/b + c/b)$. Так как $c \leq a + b \leq 2b$ и $a \leq b$, то $c'/b' \leq \Psi(3)$. Так как $c/b \geq 1$, то $c'/b' \leq \Psi(3)(c/b) = \omega_4(c/b)$, где $\omega_4(t) = t/\psi(1/3)$ при $t \geq 0$.

Положив в (2.4) $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$, придем к неравенству $b'/a' + c'/a' \geq \Phi^{-1}(b/a + c/a)$. Так как $b' \leq c'\Psi(2)$, то $(1 + \Psi(2))c'/a' \geq \Phi^{-1}(c/a)$, т. е. $a'/c' \leq (1 + \Psi(2))/\Phi^{-1}(c/a) = \omega_5(a/c)$, где $\omega_5(t) = (1 + 1/\psi(1/2))\varphi^{-1}(t)$ при $0 \leq t \leq \varphi(1)$ и $\omega_5(t) = (1 + 1/\psi(1/2))(t + 1 - \varphi(1))$ при $t \geq \varphi(1)$.

Так как $c' \leq \Psi(3)b'$, то $(1 + \Psi(3))b'/a' \geq \Phi^{-1}(b/a)$, т. е. $a'/b' \leq (1 + \Psi(3))/\Phi^{-1}(b/a) = \omega_6(a/b)$, где $\omega_6(t) = (1+1/\psi(1/3))\varphi^{-1}(t)$ при $0 \leq t \leq \varphi(1)$ и $\omega_6(t) = (1+1/\psi(1/3))(t+1-\varphi(1))$ при $t \geq \varphi(1)$.

Полагая $\eta(t) = \max\{\omega_1(t), \ldots, \omega_6(t)\}$, получим η-квазисимметричность ограничения f на трехточечном множестве $\{z_1, z_2, z_3\}$. В силу произвольности выбора точек z_1, z_2, z_3 отсюда следует η-квазисимметричность отображения f.

(а3) Пусть $p \in A_1 \cap A_2$. В силу локальной квазисимметричности найдется такой шар $B = B(p, r_0) \subset \mathcal{M}_1$, что топологическое вложение $g = f|B : B \to \mathcal{M}_2$ является η-квазисимметрическим. Так как для любой окрестности $V \in \mathcal{U}(p)$, содержашейся в B, $f(V) \in \mathcal{U}(f(p))$ и $f(V) \subset B' = f(B)$, то применение утверждения (а1) к отображению $g : B \to B'$ и множествам $A_1 \cap V$, $A_2 \cap V$ при любом $V \in \mathcal{U}(p)$, $V \subset B$, дает оценку

$$\angle(f(A_1) \cap f(V), f(A_2) \cap f(V)) \geq \psi(\angle(A_1 \cap V, A_2 \cap V)).$$

Для любого фиксированного $U \in \mathcal{U}(p)$, $U \subset B$, и произвольного $V' = f(V) \subset f(U)$, учитывая монотонность функции ψ, получаем оценку $\angle(f(A_1) \cap V', f(A_2) \cap V') \geq \psi(\angle_U(A_1, A_2))$. Взяв точную нижнюю грань левой части этого неравенства по всем $V' \subset f(U)$, приходим к соотношению $\angle_{f(U)}(f(A_1), f(A_2)) \geq \psi(\angle_U(A_1, A_2))$ между элементами двух числовых монотонно возрастающих направленностей, индексированных элементами $U \in \mathcal{U}(p)$, $U \subset B$. Переход к пределу в обеих частях этого неравенства дает первое из требуемых в (а3) неравенств $\angle(f(A_1), f(A_2), f(p)) \geq \psi(\angle(A_1, A_2, p))$. Второе неравенство в (а3) получается применением уже доказанной части утверждения (а3) к обратному отображению f^{-1}, являющемуся локально $\widetilde{\eta}$-квазисимметрическим. $\square$

Остается открытым вопрос, будет ли выполнение лишь первой из оценок в (2.2) достаточным для квазисимметричности отображения f.

3. Теорема о склейке. Основным результатом данной статьи является

Теорема 3.1. *Для любых вещественных чисел $s \geq 1$, $\alpha \in (0, 1]$, $\beta \in (0, 1]$ и функции искажения $\eta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ существует функция искажения $\omega = \omega\langle s, \alpha, \beta, \eta\rangle$, обладающая следующим свойством.*

Для любых метрических пространств $\mathcal{M}_1 = (M_1, \rho_1)$ и $\mathcal{M}_2 = (M_2, \rho_2)$, множеств $K_0 \subset \mathcal{M}_1$ и $K_1 \subset \mathcal{M}_1$ с непустым пересечением и любого отображения $f : K_0 \cup K_1 \to \mathcal{M}_2$ достаточным признаком ω-квазисимметричности отображения f служит выполнение следующих условий:

(a1) *ограничения* $f|K_0$ *и* $f|K_1$ *являются* η-*квазисимметрическими отображениями*;

(a2) $f(K_0) \cap f(K_1) = f(K_0 \cap K_1)$;

(a3) $\angle(K_0, K_1) \geq \alpha$ *и* $\angle(f(K_0), f(K_1)) \geq \beta$;

(a4) *существуют такие множества* $S_0 \subset K_0$, $S_1 \subset K_1$ *с пересечением* $S_0 \cap S_1 = K_0 \cap K_1$, *что*

(b1) *для любого индекса* $j \in \{0, 1\}$ *и любой точки* $x \in K_j$ *существует такая точка* $y \in S_j$, *что неравенства* $s^{-1} \leq \rho_1(x, z)/\rho_1(y, z) \leq s$ *выполняются при всех* $z \in K_0 \cap K_1$;

(b2) *ограничение* $f|(S_0 \cup S_1)$ *является* η-*квазисимметрическим в каждой точке множества* $K_0 \cap K_1$.

Отметим имеющиеся в литературе частные случаи этого утверждения. В работе ([4], теорема 4, с. 238) исследована склейка квазисимметрических функций на двух смежных отрезках, т. е. случай $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = R^1$, $S_0 = K_0 = (-1, 0] \subset R^1$, $S_1 = K_1 = [0, b) \subset R^1$, $s = 1, \alpha = \beta = 1$. В [5] теорема о склейке получена в ситуации, когда $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = R^n$, $\alpha = \beta$, $K_0 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_1 \geq 0, |x| \leq |x_1| \sec(\beta')\}$, $K_1 = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_1 \leq 0, |x| \leq |x_1| \sec(\beta')\}$ и $f(K_j) \subset K_j$, и там же продемонстрировано ее применение в задаче о квазиконформном продолжении. Формулировка теоремы о склейке на конусах в R^n приведена в [12], а в случае $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$, $s = 1$, $S_0 = K_0$, $S_1 = K_1$, $f(K_0) \subset K_0$ и $f(K_1) \subset K_1$ результат был анонсирован в [13]. В пространстве R^n при $n \geq 2$ очень сильная теорема о склейке локально η-квазисимметрических вложений на множествах K_j ($j = 1, \ldots, m$), объединение которых образует область, доказана в ([14], теорема 3.10, с. 107), но этот результат не переносится на случай произвольных метрических пространств и, в частности, на случай отображений в R^1.

Отметим также следующий частный случай теоремы 3.1, включающий в себя известный для квазисимметрических функций *принцип отражения* ([4], следствие 2, с. 238).

Следствие 3.1. Пусть на $K_0 \subset \mathcal{M}_1$ заданы η-квазисимметрическое вложение $f_0 : K_0 \to \mathcal{M}_2$ и L-билипшицевы вложения $g_1 : K_0 \to \mathcal{M}_1$, $g_2 : K_0'(= f_0(K_0)) \to \mathcal{M}_2$. Пусть имеется такое непустое множество $\Sigma \subset K_0$, что g_1 тождественно на Σ, g_2 тождественно на $f_0(\Sigma)$, $g_1(K_0) \cap K_0 = \Sigma$, $g_2(K_0') \cap K_0' = f_0(\Sigma)$. Если

$$\angle(K_0, g_1(K_0)) = \alpha > 0, \quad \angle(K_0', g_2(K_0')) = \beta > 0, \tag{3.1}$$

то отображение $f : K_0 \cap g_1(K_0) \to \mathcal{M}_2$, совпадающее с f_0 на K_0 и равное $f_1 = g_2 \circ f_0 \circ g_1^{-1}$ на $g_1(K_0)$, является ω-квазисимметрическим на множестве $K_0 \cup g_1(K_0)$ с функцией искажения ω, зависящей лишь от η, L, α и β.

Доказательство. Отображение f_1 является η_1-квазисимметрическим на множестве $K_1 = g_1(K_0)$ с функцией искажения $\eta_1(t) = L^2\eta(L^2 t)$. Так как $L \geq 1$, то $\eta(t) \leq \eta_1(t)$, и поэтому отображения f_0, f_1 являются η_1-квазисимметрическими, что соответствует условию (a1) в теореме 3.1. Равенства $K_1 \cap K_0 = g_1(K_0) \cap K_0 = \Sigma$ и $f(K_1) \cap f(K_0) = g_2(K_0') \cap K_0' = f_0(\Sigma) = f(\Sigma)$ дают выполнение условия (a2) теоремы 3.1. Выполнение условия (a3) предусмотрено в (3.1). Положив $S_0 = K_0$, $S_1 = K_1$, получим выполнение условия (b1) с константой $s = 1$. Для произвольной точки $x \in K_0 \cap K_1$ и любой пары отличных от нее точек $d_0 \in K_0$, $d_1 \in K_1$, положив $y = g_1^{-1}(d_1)$ и используя L-билипшицевость отображений g_1^{-1} и g_2, получаем оценку

$$\frac{\rho_2(f_0(d_0), f_0(x))}{\rho_2(f_1(d_1), f_0(x))} = \frac{\rho_2(f_0(d_0), f_0(x))}{\rho_2(g_2(f_0(y)), g_2(f_0(x)))} \leq$$
$$\leq L\frac{\rho_2(f_0(d_0), f_0(x))}{\rho_2(f_0(y), f_0(x))} \leq L\eta\left(\frac{\rho_1(d_0, x)}{\rho_1(y, x)}\right) = L\eta\left(\frac{\rho_1(d_0, x)}{\rho_1(g_1^{-1}(d_1), g_1^{-1}(x))}\right) \leq$$
$$\leq L\eta\left(L\frac{\rho_1(d_0, x)}{\rho_1(d_1, x)}\right) \leq \eta_1\left(\frac{\rho_1(d_0, x)}{\rho_1(d_1, x)}\right).$$

Оценка

$$\frac{\rho_2(f_1(d_1),f(x))}{\rho_2(f_0(d_0),f(x))} \le L\eta\left(L\frac{\rho_1(d_1,x)}{\rho_1(d_0,x)}\right) \le \eta_1\left(\frac{\rho_1(d_1,x)}{\rho_1(d_0,x)}\right)$$

выводится аналогичным образом. Следовательно, отображение f является η_1-квазисимметрическим в любой точке $x \in K_0 \cap K_1$, т. е. выполняется (b2). Таким образом, выполнены все условия теоремы 3.1 с параметром $s = 1$ и функцией искажения η_1. Следовательно, в силу этой теоремы отображение f является ω-квазисимметрическим с функцией искажения $\omega = \omega\langle 1, \alpha, \beta, \eta_1\rangle$. $\square$

4. Доказательство теоремы о склейке. Для вещественных $\alpha, \varepsilon \in (0,1]$ и функции искажения η полагаем $\Phi(\alpha,\eta,\varepsilon) = (2+2/(\alpha\eta^{-1}(\varepsilon)))^{-1}$. Так как $\eta^{-1}(\varepsilon) \le \eta^{-1}(1) \le 1$, то $\Phi(\alpha,\eta,\varepsilon) \le 1/2$.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — метрические пространства с метриками ρ_1 и ρ_2 соответственно. Пусть множества $K_0 \subset \mathcal{M}_1$ и $K_1 \subset \mathcal{M}_2$ имеют непустое пересечение. Пусть отображение $f : K_0 \cup K_1 \to \mathcal{M}_2$ таково, что ограничения $f|K_0$ и $f|K_1$ являются η-квазисимметрическими вложениями. Тогда для любых $b_0 \in K_0$, $b_1 \in K_1$ и $b \in K_0 \cap K_1$ справедливы два утверждения.*

(a1) *Если $\angle(K_0, K_1) = \alpha > 0$, то для любого $\varepsilon \in (0,1]$ из неравенства $\rho_2(f(b_0), f(b_1)) \ge \varepsilon[\rho_2(f(b_0), f(b)) + \rho_2(f(b), f(b_1))]$ следует оценка*

$$\rho_1(b_0,b_1) \ge \Phi(\alpha,\eta,\varepsilon)[\rho_1(b_0,b) + \rho_1(b,b_1)]. \tag{4.1}$$

(a2) *Если $f(K_0 \cap K_1) = f(K_0) \cap f(K_1)$ и $\angle(f(K_0), f(K_1)) = \beta > 0$, то для любого $\varepsilon \in (0,1]$ из неравенства $\rho_1(b_0,b_1) \ge \varepsilon[\rho_1(b_0,b) + \rho_1(b,b_1)]$ имеем*

$$\rho_2(f(b_0), f(b_1)) \ge \Phi(\beta,\tilde{\eta},\varepsilon)[\rho_2(f(b_0), f(b)) + \rho_2(f(b), f(b_1))]. \tag{4.2}$$

Доказательство. (a1) Если $b_0 = b_1 \in K_0 \cap K_1$, то $f(b_0) = f(b_1) = f(b) \in f(K_0) \cap f(K_1)$. Следовательно, в этом случае $b_0 = b_1 = b$ и оценка (4.1) тривиально верна. Если $b_0 \neq b_1$, но $b_s \in K_0 \cap K_1$ при некотором $s \in \{0,1\}$, то из заданного в (a1) неравенства следует $\rho_2(f(b_j), f(b))/\rho_2(f(b_1), f(b_0)) \le 1/\varepsilon$ при $j = 0,1$. Отсюда в силу η-квазисимметричности ограничения $f|K_s$ и $\tilde{\eta}$-квазисимметричности обратного к нему отображения вытекают оценки $\rho_1(b_j,b)/\rho_1(b_0,b_1) \le \tilde{\eta}(1/\varepsilon) = 1/\eta^{-1}(\varepsilon)$. Поэтому $\rho_1(b_0,b_1) \ge (1/2)\eta^{-1}(\varepsilon)[\rho_1(b_0,b) + \rho_1(b,b_1)]$. Но так как $(1/2)\eta^{-1}(\varepsilon) \ge \Phi(\alpha,\eta,\varepsilon)$ при любом $\alpha \le 1$, то получим оценку (4.1).

Осталось рассмотреть случай, когда $b_0 \in K_0 \setminus K_1$ и $b_1 \in K_1 \setminus K_0$. Пусть $\rho_1(b_0,b) + \rho_1(b,b_1) = R\rho_1(b_0,b_1)$. Если $R \le 2$, то $1/R \ge 1/2 \ge \Phi(\alpha,\eta,\varepsilon)$, и оценка (4.1) верна. Если $R > 2$, то $\rho_1(b_i,b) \ge (R/2)\rho_1(b_1,b_0)$ при некотором $i \in \{0,1\}$, и тогда

$$\rho_1(b_{1-i},b) \ge \rho_1(b_i,b) - \rho_1(b_{1-i},b_i) \ge ((R/2)-1)\rho_1(b_0,b_1).$$

Следовательно,

$$\rho_1(b_0,b_1) \le (2/(R-2))\rho_1(b_j,b) \ \text{ при } \ j = 0,1. \tag{4.3}$$

Так как $\angle(K_0,K_1) = \alpha > 0$, то для произвольно заданного $\alpha_1 < \alpha$ найдется такая точка $d \in K_0 \cap K_1$, что $\rho_1(b_0,b_1) \ge \alpha_1[\rho_1(b_0,d) + \rho_1(d,b_1)]$. Тогда $\rho_1(b_j,d) \le \alpha_1^{-1}\rho_1(b_0,b_1)$ при любом $j = 0,1$, что с учетом (4.3) дает оценку $\rho_1(b_j,d)/\rho_1(b_j,b) \le 2\alpha_1^{-1}/(R-2)$ для $j = 0,1$. В силу η-квазисимметричности ограничения $f|K_j$ получаем оценки

$$\frac{\rho_2(f(b_j),f(d))}{\rho_2(f(b_j),f(b))} \le \eta\left(\frac{\rho_1(b_j,d)}{\rho_1(b_j,b)}\right) \le \eta(2\alpha_1^{-1}/(R-2)),$$

т. е. $\rho_1(f(b_j),f(d)) \le \rho_1(f(b_j),f(b))\eta(2\alpha_1^{-1}/(R-2))$ при $j = 0,1$. С учетом условия (a1) это дает соотношение

$$\varepsilon[\rho_2(f(b_0),f(b)) + \rho_2(f(b_1),f(b))] \le \rho_2(f(b_0),f(b_1)) \le$$
$$\le [\rho_2(f(b_0),f(d)) + \rho_2(f(d),f(b_1))] \le [\rho_2(f(b_0),f(b)) + \rho_2(f(b_1),f(b))]\eta(2\alpha_1^{-1}/(R-2)),$$

приводящее к неравенству $\varepsilon \le \eta(2\alpha_1^{-1}/(R-2))$. В силу произвольного выбора $\alpha_1 < \alpha$ и непрерывности функции искажения η получаем неравенство $\varepsilon \le \eta(2\alpha^{-1}/(R-2))$, равносильное оценке $R \le 1/\Phi(\alpha, \eta, \varepsilon)$, которая и дает соотношение (4.1).

(a2) Заменив в условиях леммы множества K_0, K_1 множествами $K_0' = f(K_0)$ и $K_1' = f(K_1)$, а отображение f — отображением $f' = f^{-1}$, у которого ограничения $f'|(K_0')$ и $f'|(K_1')$ являются $\widetilde{\eta}$-квазисимметрическими вложениями, применим утверждение (a1) к точкам $b_0' = f(b_0)$, $b_1' = f(b_1)$, $b' = f(b)$ и получим соотношение (4.2). $\square$

Лемма 4.2. *Пусть заданы числа $s \ge 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и функция искажения η. Пусть метрические пространства $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, подмножества $S_0 \subset K_0 \subset \mathcal{M}_1$, $S_1 \subset K_1 \subset \mathcal{M}_1$ и топологическое вложение $f : K_0 \cup K_1 \to \mathcal{M}_2$ удовлетворяют условиям* (a1)–(a4) *теоремы* 3.1. *Тогда*

(a4$'$) *отображение f является η_1-квазисимметрическим в любой точке $x \in K_0 \cap K_1$, где $\eta_1(t) = (\eta(s))^2\eta(s^2 t)$.*

Доказательство. Пусть заданы попарно различные точки $d_0 \in K_0$, $d_1 \in K_1$ и $x \in K_0 \cap K_1$. В силу условия (b1) теоремы 3.1 найдутся точки $y_0 \in S_0$ и $y_1 \in S_1$ такие, что $(1/s)\rho_1(y_0, x) \le \rho_1(d_0, x) \le s\rho_1(y_0, x)$ и $(1/s)\rho_1(y_1, x) \le \rho_1(d_1, x) \le s\rho_1(y_1, x)$. Соединив эти неравенства с условием (a1) для троек точек $d_0, y_0, x \in K_0$ и $d_1, y_1, x \in K_1$ и применив условие (b2) η-квазисимметричности ограничения $f|(S_0 \cup S_1)$ в точке $x \in K_0 \cap K_1$ к паре точек y_0, y_1, при каждом $j \in \{0, 1\}$ получим требуемую оценку квазисимметричности отображения f в точке x

$$\frac{\rho_2(f(d_j), f(x))}{\rho_2(f(d_{1-j}), f(x))} = \frac{\rho_2(f(d_j), f(x))}{\rho_2(f(y_j), f(x))}\frac{\rho_2(f(y_j), f(x))}{\rho_2(f(y_{1-j}), f(x))}\frac{\rho_2(f(y_{1-j}), f(x))}{\rho_2(f(d_{1-j}), f(x))} \le$$
$$\le \eta\left(\frac{\rho_1(d_j, x)}{\rho_1(y_j, x)}\right)\eta\left(\frac{\rho_1(y_j, x)}{\rho_1(y_{1-j}, x)}\right)\eta\left(\frac{\rho_1(y_{1-j}, x)}{\rho_1(d_{1-j}, x)}\right) \le (\eta(s))^2\eta\left(\frac{\rho_1(y_j, x)}{\rho_1(y_{1-j}, x)}\right) \le$$
$$\le (\eta(s))^2\eta\left(\frac{\rho_1(y_j, x)}{\rho_1(d_j, x)}\frac{\rho_1(d_j, x)}{\rho_1(d_{1-j}, x)}\frac{\rho_1(d_{1-j}, x)}{\rho_1(y_{1-j}, x)}\right) \le (\eta(s))^2\eta\left(s^2\frac{\rho_1(d_j, x)}{\rho_1(d_{1-j}, x)}\right). \quad \square$$

Лемма 4.3. *Пусть заданы числа $s \ge 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и функция искажения η. Если метрические пространства $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, подмножества $S_0 \subset K_0 \subset \mathcal{M}_1$, $S_1 \subset K_1 \subset \mathcal{M}_1$ и топологическое вложение f удовлетворяют условиям* (a1)–(a3), (b1), (b2) *теоремы* 3.1, *и Q_j $(j = 1, 2)$ является отображением подобия пространства $\mathcal{M}_j$ на пространство $\mathcal{M}_j' = (M_j', \rho_j')$, то метрические пространства $\mathcal{M}_1'$, $\mathcal{M}_2'$, подмножества $S_0' = Q_1(S_0)$, $S_1' = Q_1(S_1)$, $K_0' = Q_1(K_0)$, $K_1' = Q_1(K_1)$ и топологическое вложение $f' = Q_2 \circ f \circ Q_1^{-1} : K_0' \cup K_1' \to \mathcal{M}_2'$ также удовлетворяют условиям* (a1)–(a3), (b1), (b2) *теоремы* 3.1 *с теми же самыми s, α, β и η.*

Доказательство. Отображения Q_1 и Q_2, будучи гомеоморфизмами, сохраняют все соотношения, выраженные в терминах операций над множествами, в частности, сохраняется условие (a2). Будучи подобиями, они сохраняют как угловые характеристики пар множеств (см. утверждение в п. 1.2), так и все соотношения, выраженные в терминах отношения расстояний, в частности, сохраняются условия (b1) и (b2). И наконец, композиция η-квазисимметрического вложения с отображениями подобия остается η-квазисимметрическим вложением, что дает сохранение условия (a1). $\square$

Лемма 4.4. *Для заданных чисел $s \ge 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и функции искажения η существует функция искажения $\omega'\langle s, \alpha, \beta, \eta\rangle$, обладающая следующим свойством.*

Пусть метрические пространства $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, подмножества $S_0 \subset K_0 \subset \mathcal{M}_1$, $S_1 \subset K_1 \subset \mathcal{M}_1$ и топологическое вложение $f : K_0 \cup K_1 \to \mathcal{M}_2$ удовлетворяют условиям (a1)–(a4) *теоремы* 3.1. *Тогда для любой тройки попарно различных точек $a_0, a_1, a_2 \in K_0 \cup K_1$ таких, что $\rho_1(a_0, a_1) = \rho_2(f(a_0), f(a_1)) = 1$ выполняется оценка*

$$\rho_2(f(a_2), f(a_0)) \le \omega'(\rho_1(a_2, a_0)). \tag{4.4}$$

Доказательство. В тексте доказательства будем использовать польский способ обозначения расстояний в метрических пространствах $|x-y|$ ([15], гл. 2, § 21). Это не приводит к недоразумению, ибо конкретный вид функции расстояния однозначно определяется принадлежностью точек x, y конкретному метрическому пространству. В силу леммы 4.2 для любых попарно различных точек $d_0 \in K_0$, $d_1 \in K_1$ и $x \in K_0 \cap K_1$ выполняются оценки

$$\frac{|f(d_0)-f(x)|}{|f(d_1)-f(x)|} \le \eta_1\left(\frac{|d_0-x|}{|d_1-x|}\right), \quad \frac{|f(d_1)-f(x)|}{|f(d_0)-f(x)|} \le \eta_1\left(\frac{|d_1-x|}{|d_0-x|}\right) \tag{4.5}$$

с функцией искажения $\eta_1(t) = (\eta(s))^2\eta(s^2t) \ge \eta(t)$.

Дальнейшие рассуждения сводятся к анализу всех случаев расположения заданной тройки точек относительно множеств K_0 и K_1.

Ситуация 1. Пусть $a_0, a_1, a_2 \in K_j$ при $j=0$ или $j=1$. Тогда требуемая оценка (4.4) вытекает из условия (a1) η-квазисимметричности отображения f на множестве

$$K_j : |f(a_2)-f(a_0)| \le \eta(|a_2-a_0|).$$

Ситуация 2. Пусть $a_0 \in K_m$, $a_1 \in K_{1-m}$, $a_2 \in K_{1-m}$ при $m=0$ или $m=1$. Положим $C_1 = \Phi(\beta, \tilde{\eta}, \alpha/2)$, $C_2 = \Phi(\alpha, \eta_1, \beta/2)$ и

$$\omega_1(t) = \max\left[\frac{2\eta_1(4t)}{C_1}, 4\eta_1\left(\frac{3t}{\alpha}\right), \left(\frac{12+12\eta_1(2C_2^{-1}+4\alpha^{-1})}{\alpha\beta\eta_1^{-1}(1/2)}\right)t\right].$$

Случай 2.1. Пусть $|a_2-a_0| \ge 2/\alpha$. Тогда найдется точка $p \in K_0 \cap K_1$ такая, что $1 = |a_1-a_0| \ge (\alpha/2)(|a_1-p|+|a_0-p|)$. Так как $|a_0-p| \le 2/\alpha \le |a_2-a_0|$, то выполняется

(c1): $|a_2-p| \le |a_2-a_0|+|a_0-p| \le 2|a_2-a_0|$.

Применение леммы 4.1 (a2) к точкам a_0, a_1 и p дает оценку

(c2): $1 = |f(a_0)-f(a_1)| \ge C_1(|f(a_1)-f(p)|+|f(a_0)-f(p)|)$.

Так как $1 = |a_1-a_0| \le |a_0-p|+|a_1-p|$, то $|a_j-p| \ge 1/2$ либо при $j=0$, либо при $j=1$. Применив соответственно либо условие (4.5), либо условие η-квазисимметричности ограничения $f|K_{1-m}$, получаем неравенство $|f(a_2)-f(p)|/|f(a_j)-f(p)| \le \eta_1(|a_2-p|/|a_j-p|)$, из которого с учетом оценки (c1) следует $|f(a_2)-f(p)| \le |f(a_j)-f(p)|\eta_1(4|a_2-a_0|)$. В силу оценки (c2) отсюда вытекает неравенство

(c3): $|f(a_2)-f(p)| \le C_1^{-1}\eta_1(4|a_2-a_0|)$.

Так как $|f(a_0)-f(p)| \le C_1^{-1} \le C_1^{-1}\eta_1(1) \le C_1^{-1}\eta_1(\alpha|a_2-a_0|/2) \le C_1^{-1}\eta_1(4|a_2-a_0|)$, то, используя неравенство (c3), приходим к оценке

$$|f(a_2)-f(a_0)| \le |f(a_2)-f(p)|+|f(p)-f(a_0)| \le 2C_1^{-1}\eta_1(4|a_2-a_0|) \le \omega_1(|a_2-a_0|).$$

Случай 2.2. Пусть $|a_2-a_0| \le \eta_1^{-1}(1/2)\alpha/6 \le \alpha/6$ (неравенство $\eta_1^{-1}(1/2) \le 1$ следует из монотонности функции η_1 и неравенства $1 \le \eta_1(1)$). Отметим точку $q \in K_0 \cap K_1$, для которой справедливо

(c4): $\eta_1^{-1}(1/2)\alpha/6 \ge |a_2-a_0| \ge (\alpha/2)(|a_2-q|+|a_0-q|)$.

Так как $|a_0-q| \le (2/\alpha)|a_2-a_0| \le \eta_1^{-1}(1/2)/3 \le 1/3$, то $|q-a_1| \ge |a_1-a_0|-|a_0-q| \ge 2/3$. Используя оценку (4.5), получаем неравенства

$$\frac{|f(a_0)-f(q)|}{|f(a_1)-f(q)|} \le \eta_1\left(\frac{|a_0-q|}{|a_1-q|}\right) \le \eta_1\left(\frac{3|a_0-q|}{2}\right) \le \eta_1\left(\frac{3|a_0-a_2|}{\alpha}\right). \tag{4.6}$$

Из левой части (c4) следует $\eta_1(3|a_0-a_2|/\alpha) \le \eta_1(\eta_1^{-1}(1/2)/2) \le 1/2$, поэтому оценка (4.6) дает неравенство

(c5): $|f(a_0)-f(q)| \le |f(a_1)-f(q)|/2$.

Следовательно, $|f(a_1)-f(q)| \le |f(a_1)-f(a_0)|+|f(a_0)-f(q)| \le 1+|f(a_1)-f(q)|/2$, т. е. выполняется

(c6): $|f(a_1)-f(q)| \le 2$.

В силу η_1-квазисимметричности ограничения $f|K_{1-m}$ имеет место оценка

(c7): $|f(a_2)-f(q)| \le |f(q)-f(a_1)|\eta_1(|a_2-q|/|q-a_1|) \le |f(q)-f(a_1)|\eta_1(3|a_2-a_0|/\alpha)$.

Из оценок (c7) и (4.6) получаем неравенство $|f(a_2) - f(a_0)| \leq |f(a_1) - f(q)|2\eta_1(3|a_2 - a_0|/\alpha)$. Учитывая (c6), приходим к требуемому соотношению

$$|f(a_2) - f(a_0)| \leq 4\eta_1(3|a_2 - a_0|/\alpha) \leq \omega_1(|a_2 - a_0|).$$

Случай 2.3. Пусть $\alpha\eta_1^{-1}(1/2)/6 \leq |a_2 - a_0| \leq 2/\alpha$. Отметим точку $p \in K_0 \cap K_1$, для которой $1 = |f(a_0) - f(a_1)| \geq (\beta/2)(|f(a_1) - f(p)| + |f(a_0) - f(p)|)$. В силу леммы 4.1 (a1) отсюда следует оценка $1 = |a_0 - a_1| \geq C_2(|a_1 - p| + |a_0 - p|)$. В частности, $|a_0 - p| \leq C_2^{-1}$ и $|a_1 - p| \leq C_2^{-1}$. Следовательно, выполняется неравенство

(c8): $|a_2 - p| \leq |a_2 - a_0| + |a_0 - p| \leq 2/\alpha + C_2^{-1}$.

Так как $1 \leq |a_0 - p| + |a_1 - p|$, то неравенство $|a_j - p| \geq 1/2$ выполняется либо при $j = 0$, либо при $j = 1$. Используя (при $j = 1 - m$) η_1-квазисимметричность ограничения $f|K_{1-m}$ или (при $j = m$) условие (4.5), получаем неравенство

$$\frac{|f(a_2) - f(p)|}{|f(a_j) - f(p)|} \leq \eta_1\left(\frac{|a_2 - p|}{|a_j - p|}\right) \leq \eta_1\left(\frac{2\alpha^{-1} + C_2^{-1}}{1/2}\right) = \eta_1(2C_2^{-1} + 4\alpha^{-1}),$$

из которого следует $|f(a_2) - f(p)| \leq |f(a_j) - f(p)|\eta_1(2C_2^{-1} + 4\alpha^{-1}) \leq 2\beta^{-1}\eta_1(2C_2^{-1} + 4\alpha^{-1})$. Так как $|f(a_0) - f(p)| \leq 2\beta^{-1}$, то $|f(a_2) - f(a_0)| \leq M_0 := 2\beta^{-1}[1 + \eta_1(2C_2^{-1} + 4\alpha^{-1})]$. Учитывая, что $1 \leq |a_2 - a_0|6\alpha^{-1}/\eta_1^{-1}(1/2)$, приходим к оценке

$$|f(a_2) - f(a_0)| \leq (6M_0\alpha^{-1}/\eta_1^{-1}(1/2))|a_2 - a_0| \leq \omega_1(|a_2 - a_0|).$$

Ситуация 3. Пусть $a_2 \in K_m$, $a_1 \in K_{1-m}$ и $a_0 \in K_{1-m}$, где $m = 0$ или $m = 1$. Положим $\omega_2(t) = \eta_1(4\alpha^{-1}t)(1 + \eta_1(1 + 4\alpha^{-1}t))$. Отметим точку $q \in K_0 \cap K_1$, для которой выполняется неравенство

(d1): $|a_2 - a_0| \geq (\alpha/2)(|a_2 - q| + |a_0 - q|)$.

В силу η_1-квазисимметричности ограничения $f|K_{1-m}$ имеем оценки

$$|f(q) - f(a_j)| = \frac{|f(q) - f(a_j)|}{|f(a_1) - f(a_0)|} \leq \eta_1\left(\frac{|q - a_j|}{|a_1 - a_0|}\right) = \eta_1(|q - a_j|), \tag{4.7}$$

выполняющиеся при $j = 0, 1$. Так как $1 \leq |q - a_0| + |q - a_1|$, то либо $|q - a_0| \geq 1/2$, либо $|q - a_1| \geq 1/2$.

Случай 3.1. Пусть $|q - a_1| \geq 1/2$. Используя условие (4.5), получаем неравенство $|f(q) - f(a_2)| \leq |f(q) - f(a_1)|\eta_1(|q - a_2|/|q - a_1|) \leq |f(q) - f(a_2)|\eta_1(2|q - a_2|)$, из которого в силу (d1) и (4.7) следует $|f(q) - f(a_2)| \leq \eta_1(|q - a_1|)\eta_1(4\alpha^{-1}|a_2 - a_0|)$. Так как $|q - a_1| \leq 1 + |q - a_0| \leq 1 + 2\alpha^{-1}|a_2 - a_0|$, то выполняется неравенство

(d2): $|f(q) - f(a_2)| \leq \eta_1(1 + 2\alpha^{-1}|a_0 - a_2|)\eta_1(4\alpha^{-1}|a_0 - a_2|)$.

Из (4.7) вытекает неравенство $|f(q) - f(a_0)| \leq \eta_1(|q - a_0|) \leq \eta_1(2\alpha^{-1}|a_0 - a_2|)$, которое вместе с (d2) приводит к оценке $|f(a_2) - f(a_0)| \leq \eta_1(4\alpha^{-1}|a_2 - a_0|)[1 + \eta_1(1 + 2\alpha^{-1}|a_2 - a_0|)] \leq \omega_2(|a_2 - a_0|)$.

Случай 3.2. Пусть $|q - a_1| < 1/2$ и $|q - a_0| \geq 1/2$. В силу соотношений (4.7) (при $j = 0$) и (d1) выполняется неравенство

(d3): $|f(q) - f(a_0)| \leq \eta_1(|q - a_0|) \leq \eta_1(2\alpha^{-1}|a_2 - a_0|)$.

Из условия (4.5) следует неравенство

$$|f(q) - f(a_2)|/|f(q) - f(a_0)| \leq \eta_1(|q - a_2|/|q - a_0|) \leq \eta_1(2|q - a_2|) \leq \eta_1(4\alpha^{-1}|a_2 - a_0|).$$

В силу (d3) это означает, что $|f(q) - f(a_2)| \leq \eta_1(2\alpha^{-1}|a_2 - a_0|)\eta_1(4\alpha^{-1}|a_2 - a_0|)$. Сложив полученное неравенство с неравенством (d3), приходим к оценке

$$|f(a_2) - f(a_0)| \leq \eta_1(2\alpha^{-1}|a_2 - a_0|)[1 + \eta_1(4\alpha^{-1}|a_2 - a_0|)] \leq \omega_2(|a_2 - a_0|).$$

Ситуация 4. Пусть $a_1 \in K_m$, $a_0 \in K_{1-m}$, $a_2 \in K_{1-m}$, где $m = 0$ или $m = 1$. Положим

$$\omega_3(t) = C_1^{-1} \max\left[\eta_1(2t), (3/2)\eta_1(2(1 + \eta_1^{-1}(1/3))t), \eta_1(t^{1/2}), \eta_1(1/\eta_1^{-1}(1/3))\eta_1(2t^{1/2})\right].$$

Отметим точку $q \in K_0 \cap K_1$, для которой $1 = |a_0 - a_1| \geq (\alpha/2)(|a_0 - q| + |q - a_1|)$. Тогда в силу леммы 4.1 (a2) имеем соотношение $1 = |f(a_0) - f(a_1)| \geq C_1(|f(a_1) - f(q)| + |f(a_0) - f(q)|)$. Так как $1 \leq |a_0 - q| + |a_1 - q|$, то реализуется один из случаев: $|a_0 - q| \geq 1/2$ или $|a_1 - q| \geq 1/2$.

Случай 4.1. Пусть $|a_0 - q| \geq 1/2$. Из η_1-квазисимметричности ограничения $f|K_{1-m}$ и неравенства $|f(a_0) - f(q)| \leq C_1^{-1}$ следует оценка

$$|f(a_2) - f(a_0)| \leq |f(q) - f(a_0)|\eta_1(|a_2 - a_0|/|q - a_0|) \leq C_1^{-1}\eta_1(2|a_2 - a_0|) \leq \omega_3(|a_2 - a_0|).$$

Случай 4.2. Пусть $|a_0 - q| < 1/2$ и $|a_1 - q| \geq 1/2$.

Подслучай (a). Пусть $|a_2 - a_0| \geq \varepsilon|a_0 - q|$, где $\varepsilon = 1/\eta_1^{-1}(1/3)$. В силу η_1-квазисимметричности ограничения $f|K_{1-m}$ и неравенства $|a_0 - q|/|a_2 - a_0| \leq 1/\varepsilon$ имеем оценку $|f(a_0) - f(q)|/|f(a_2) - f(a_0)| \leq \eta_1(1/\varepsilon) = 1/3$, из которой следует $|f(a_0) - f(q)| \leq |f(a_2) - f(a_0)|/3$. Поэтому

$$|f(a_2) - f(q)| \geq |f(a_2) - f(a_0)| - |f(a_0) - f(q)| \geq 2|f(a_2) - f(a_0)|/3.$$

Учитывая $|f(a_1) - f(q)| \leq C_1^{-1}$ и неравенство $|f(a_2) - f(q)| \leq |f(a_1) - f(q)|\eta_1(|a_2 - q|/|a_1 - q|) \leq |f(a_1) - f(q)|\eta_1(2|a_2 - q|)$, вытекающее из (4.5), приходим к оценке $|f(a_2) - f(a_0)| \leq (3/2)|f(a_2) - f(q)| \leq (3/2)|f(a_1) - f(q)|\eta_1(2(|a_2 - a_0| + |a_0 - q|)) \leq (3C_1^{-1}/2)\eta_1(2(1+\varepsilon^{-1})|a_2 - a_0|) \leq \omega_3(|a_2 - a_0|)$.

Подслучай (b). Пусть $|a_2 - a_0| \leq |a_0 - q|^2$. Используя неравенство $|f(a_0) - f(q)| \leq C_1^{-1}$ и η_1-квазисимметричность ограничения $f|K_{1-m}$, получаем оценку

$$|f(a_2) - f(a_0)| \leq |f(q) - f(a_0)|\eta_1(|a_2 - a_0|/|q - a_0|) \leq C_1^{-1}\eta_1(|a_2 - a_0|^{1/2}) \leq \omega_3(|a_2 - a_0|).$$

Подслучай (c). Пусть $|a_0 - q|^2 < |a_2 - a_0| < \varepsilon|a_0 - q|$. Так как $|f(a_1) - f(q)| \leq C_1^{-1}$ и ограничение $f|K_{1-m}$ является η_1-квазисимметрическим, то $|f(a_2) - f(a_0)| \leq |f(q) - f(a_0)|\eta_1(|a_2 - a_0|/|q - a_0|) \leq \eta_1(\varepsilon)|f(q) - f(a_0)| \leq C_1^{-1}\eta_1(\varepsilon)(|f(q) - f(a_0)|/|f(a_1) - f(q)|)$. Используя соотношение (4.5), получаем

$$|f(a_2) - f(a_0)| \leq C_1^{-1}\eta_1(\varepsilon)\eta_1(|a_0 - q|/|a_1 - q|) \leq C_1^{-1}\eta_1(\varepsilon)\eta_1(2|a_2 - a_0|^{1/2}) \leq \omega_3(|a_2 - a_0|).$$

Таким образом, положив $\omega'(t) = \max\{\eta_1(t), \omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t)\}$, приходим к оценке

$$|f(a_2) - f(a_0)| \leq \omega'(|a_2 - a_0|).$$

При этом ω' зависит лишь от s, η, α и β. $\square$

4.1. **Доказательство теоремы 3.1.** Покажем, что функция искажения ω, построенная в лемме 4.4 для заданных s, η, α и β, является требуемой. Пусть метрические пространства $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ наделены метриками ρ_1 и ρ_2 соответственно. Пусть множества $S_j \subset K_j \subset \mathcal{M}_1$ $(j = 0, 1)$ и отображение $f : K_0 \cup K_1 \to \mathcal{M}_2$ удовлетворяют условиям (a1)–(a4) теоремы 3.1. Пусть a_0, a_1, a_2 — произвольно заданная тройка попарно различных точек в $K_0 \cup K_1$. Положив $\rho_1'(x,y) \equiv \rho_1(x,y)/\rho_1(a_0,a_1)$ и $\rho_2'(x,y) \equiv \rho_2(x,y)/\rho_2(f(a_0),f(a_1))$, получим метрические пространства $\mathcal{M}_1'$ и $\mathcal{M}_2'$ (на тех же множествах, что и исходные пространства $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, но с модифицированными метриками). Тождественные отображения $Q_1 = \mathrm{id} : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_1'$ и $Q_2 = \mathrm{id} : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2'$ являются отображениями подобия. Тогда в силу леммы 4.3 метрические пространства $\mathcal{M}_1'$ и $\mathcal{M}_2'$, подмножества $Q_1(S_j) \subset Q_1(K_j) \subset \mathcal{M}_1'$ и отображение $f' = Q_2 \circ f \circ Q_1^{-1}$ удовлетворяют условиям леммы 4.4 с теми же параметрами s, η, α и β. Так как $\rho_1'(Q_1(a_0), Q_1(a_1)) = 1 = \rho_2'(f'(Q_1(a_0)), f'(Q_1(a_1)))$, то в силу леммы 4.4 выполняется оценка $\rho_2'(f'(Q_1(a_2)), f'(Q_1(a_0))) \leq \omega(\rho_1'(Q_1(a_2), Q_1(a_0)))$, равносильная неравенству

$$\frac{\rho_2(f(a_2), f(a_0))}{\rho_2(f(a_1), f(a_0))} \leq \omega\left(\frac{\rho_1(a_2, a_0)}{\rho_1(a_1, a_0)}\right).$$

В силу произвольности выбора тройки попарно различных точек $a_0, a_1, a_2 \in K_0 \cup K_1$ это означает, что f является ω-квазисимметрическим отображением. $\square$

Авторы признательны профессору А.В. Сычеву, внимательно просмотревшему рукопись этой статьи и сделавшему ряд ценных замечаний по улучшению ее содержания.

Литература

1. Agard S.B., Gehring F.W. *Angles and quasiconformal mappings* // Proc. London Math. Soc. – 1965. – V. 14A. – № 3. – P. 1–21.
2. Agard S.B. *Angles and quasiconformal mappings in space* // J. d'Analyse Math. – 1969. – V. 22. – P. 177–200.
3. Taari O. *Characterisierung der Quasikonformitat mit Hilfe der Winkelverzerrung* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1965. – V. 362. – P. 1–11.
4. Kelingos J.A. *Boundary correspondence under quasiconformal mappings* // Michigan Math. J. – 1966 – V. 13. – P. 235–249.
5. Асеев В.В., Сычев А.В., Тетенов А.В. *Склейка квазисимметрических вложений в задаче о квазиконформном продолжении* // Укр. матем. журн. – 2004. – Т. 56. – № 6. – С. 737–744.
6. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология.* – М.: Высш. школа, 1979. – 336 с.
7. Келли Дж.Л. *Общая топология.* – М.: Наука, 1981. – 432 с.
8. Caraman P. *Characterization of the quasiconformality by means of angle distortion* / Proc. of the Romanian-Finnish seminar on Teichmüller spaces and quasiconformal mappings. Brasov, 1969. – Publ. House Acad. SRR. – 1971. – P. 147–170.
9. Tukia P., Väisälä J. *Quasisymmetric embeddings of metric spaces* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. – 1980. – V. 5. – P. 97–114.
10. Väisälä J. *Domains and maps* // Quasiconformal Space Mappings (A collection of surveys 1960–1990) (ed. Matti Vuorinen). – Lect. Notes Math. – 1992. – V. 1508. – P. 119–131.
11. Aseev V.V. *Quasisymmetric embeddings* // Complex analysis and representation theory. 3 – J. Math. Sci. – 2002. – V. 108. – № 3. – P. 375–410.
12. Асеев В.В., Сычев А.В., Тетенов А.В. *О квазиконформном продолжении с семейства плоских областей специального вида* // Докл. РАН – 2003. – Т. 398. – № 6. – С. 727–729.
13. Асеев В.В., Тетенов А.В. *Общая теорема о склейке квазисимметрических отображений* // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции. – Воронеж: Изд-во Воронежск. ун-та. – 2003. – С. 16–17.
14. Väisälä J. *Quasisymmetry and unions* // Manuscripta math. – 1990. – V. 68. – P. 101–111.
15. Куратовский К. *Топология.* Т. 1. – М.: Мир, 1966. – 594 с.

Институт математики
Сибирского отделения
Российской академии наук

Горно-алтайский государственный
университет

Поступила
30.05.2003