

Л.Д. ЭСКИН

**О НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ О РАСПАДЕ РАЗРЫВА
В ДИНАМИКЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ**

1. Динамика пленочных течений нелинейно-вязкой жидкости со степенным реологическим законом в одномерном приближении описывается уравнением [1]–[3]

$$\frac{\partial l}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial x}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1.1)$$

где l — безразмерная толщина пленки, q — безразмерный поток жидкости

$$q = \operatorname{sgn} \frac{\partial l}{\partial x} \left(\frac{l^{2+n}}{n+2} \left| \frac{\partial l}{\partial x} \right|^n \right), \quad n > 1, \quad (1.2)$$

t — безразмерное время, постоянная n определяется реологическим законом.

Под задачей о распаде разрыва для уравнения (1.1) понимается требование отыскания его невозрастающего неотрицательного непрерывного на всей оси x вместе с потоком q решения $l(t, x)$, удовлетворяющего начальному условию

$$l(0, x) = l_0(x); \quad l_0(x) = 1 \quad (x \leq 0), \quad l_0(x) = 0 \quad (x > 0). \quad (1.3)$$

Важная роль задачи о распаде разрыва при построении решения задачи Коши с разрывными начальными данными хорошо известна [4]. В п. 2 данной работы будет построено единственное автомодельное решение задачи (1.1)–(1.3) — основной результат работы. В п. 3, используя результаты, полученные в п. 2, рассмотрим автомодельные разрывные решения уравнения (1.1), несколько модифицировав с этой целью условие (1.3). В дальнейшем будут использоваться обозначения

$$\alpha = \frac{1}{n+1}, \quad \beta = \frac{1}{n+2}, \quad \gamma = \frac{n+1}{2n+1}, \quad \delta = \frac{1}{2n+1}, \quad \lambda = \frac{1}{n-1}, \quad \mu = \frac{1}{n-2}.$$

2. В этом пункте для задачи о распаде разрыва для уравнения (1.1) построим невозрастающее неотрицательное непрерывное вместе с потоком $q = -\beta l^{n+2}(-l_x)^n$ решение уравнения

$$l_t = -(\beta l^{n+2}(-l_x)^n)_x, \quad (2.1)$$

удовлетворяющее начальному условию (1.3). Уравнение (2.1) вместе с условиями (1.3) допускает группу растяжений с оператором

$$X = t\partial_t + \alpha x\partial_x. \quad (2.2)$$

Решение задачи о распаде разрыва для уравнения (2.1) будем строить в виде $l(t, x) = V(\xi)$, где $\xi = xt^{-\alpha}$ — инвариант группы (2.2). Из уравнения (2.1) и начального условия (1.3) найдем для неотрицательной убывающей функции V нелинейное уравнение

$$\alpha \xi V_\xi = (\beta V^{n+2}(-V_\xi)^n)_\xi \quad (2.3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00128).

и граничные условия

$$V(\infty) = 0, \quad (2.4)$$

$$V(-\infty) = 1. \quad (2.5)$$

Из условия непрерывности потока следует непрерывность функции $q_1 = \beta V^{n+2}(-V_\xi)^n$ при $|\xi| < \infty$. Уравнение (2.3) рассмотрим сначала в полуплоскости $\xi > 0$. С целью понижения порядка уравнения (2.3) положим

$$V = \xi^\gamma \varphi(\xi), \quad \psi = \xi \varphi'_\xi. \quad (2.6)$$

Будем иметь

$$V'_\xi = \xi^{-n\delta} W(\varphi, \psi), \quad (2.7)$$

$W = \psi + \gamma\varphi$. После подстановки соотношений (2.6), (2.7) в уравнение (2.3) найдем, что решения уравнения (2.3), отличные от решений $V = \text{const}$, могут быть получены с помощью (2.6) из уравнения первого порядка

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{P_1(\varphi, \psi)}{Q_1(\varphi, \psi)}, \quad (2.8)$$

где

$$P_1 = -\frac{\alpha}{\beta} + \varphi^{n+1}(-W)^{n-2}[\gamma n\varphi\psi + \delta(3n+2)\varphi W + \frac{1}{\beta}\psi W], \quad Q_1 = n\varphi^{n+2}\psi(-W)^{n-2}.$$

Каждое решение $\psi = \psi(\varphi)$ уравнения (2.8) порождает однопараметрическое семейство решений уравнения с разделяющимися переменными $\psi = \xi \varphi'_\xi$, а затем с помощью первого из соотношений (2.6) и однопараметрическое семейство решений уравнения (2.3).

Прежде всего построим в полуплоскости $\xi > 0$ невозрастающее решение V_1 уравнения (2.3), удовлетворяющее граничному условию (2.4) и условию непрерывности потока q . В силу (2.7) и условия невозрастания решения V_1 уравнение (2.8) следует рассматривать в секторе I, являющемся пересечением полуплоскости $\varphi > 0$ с полуплоскостью $W < 0$. Нетрудно заметить, что сектору I целиком принадлежит непрерывная ветвь $\psi = \psi_1(\varphi)$ изоклины нуля (кривая $P_1(\varphi, \psi) = 0$) уравнения (2.8).

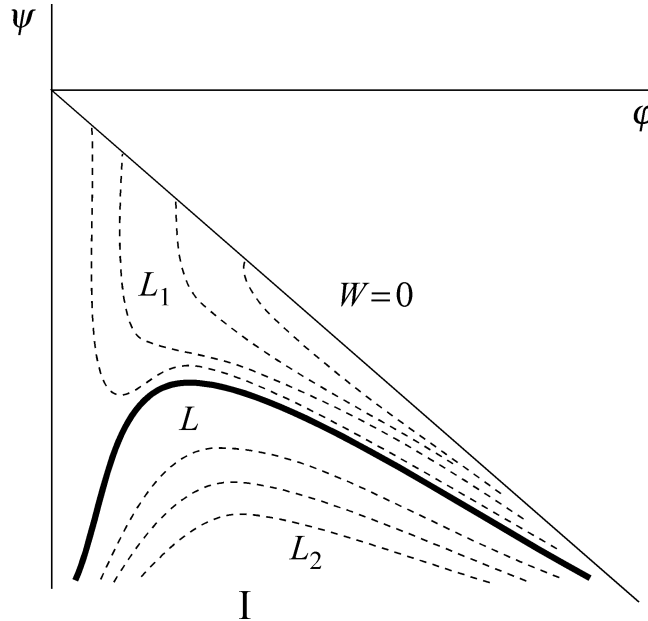


Рис. 1

Эта ветвь при $\varphi \rightarrow 0$ имеет вертикальную асимптоту $\varphi = 0$, а при $\varphi \rightarrow \infty$ — наклонную асимптоту $\psi = k_1\varphi$, где угловой коэффициент

$$k_1 = -\frac{\beta\delta}{2}(2n^2 + 7n + 4 + (4n^4 + 16n^3 + 21n^2 + 8n)^{1/2}),$$

причем $\psi_1 \sim -(\alpha\varphi^{-n-1})^{1/n}$ при $\varphi \rightarrow 0$. Используя этот факт, можно показать, что в секторе I имеется два семейства интегральных кривых уравнения (2.8). Кривые семейства L_1 начинаются (рис. 1) в точках прямой A : $W = 0$. При $\varphi \rightarrow \infty$ они имеют прямую A своей наклонной асимптотой, причем справедлива асимптотика

$$W(\varphi, \psi) \sim B_1\varphi^{-n\alpha}. \quad (2.9)$$

В соотношении (2.9) коэффициент $B_1 = B_1(\varphi_0) < 0$ ($\varphi_0 > 0$) однозначно определяется точкой (φ_0, ψ_0) , в которой начинается интегральная кривая семейства L_1 . Эти кривые либо не имеют экстремальных точек, либо имеют по две экстремальные точки (точку максимума и точку минимума), расположенные на изоклине нуля ψ_1 . Интегральные кривые семейства L_2 имеют вертикальную асимптоту $\varphi = 0$ и наклонную асимптоту — прямую A , причем для них справедливы асимптотики

$$\psi \sim A_1\varphi^{-1/(n\beta)} \quad (\varphi \rightarrow 0), \quad W(\varphi, \psi) \sim c_1(A_1)\varphi^{-n\alpha} \quad (\varphi \rightarrow \infty). \quad (2.10)$$

Здесь коэффициенты $A_1 < 0$ и $c_1 = c_1(A_1) < 0$ определяются интегральной кривой семейства L_2 , всегда $B_1(\varphi_0) > c_1(A_1)$. Кривые семейства L_2 пересекают изоклину нуля ψ_1 в точке максимума. Семейства L_1 и L_2 разделяет также лежащая в секторе I кривая L — интегральная кривая с асимптотикой

$$\psi \sim -\left(\frac{\beta}{\alpha}\varphi^{n+1}\right)^{-1/n} \quad (\varphi \rightarrow 0), \quad (2.11)$$

$$W(\varphi, \psi) \sim B\varphi^{-n\alpha} \quad (\varphi \rightarrow \infty). \quad (2.12)$$

Коэффициент B в соотношении (2.12) может быть определен лишь численно. Отметим, что всегда (т. е. для всех $\varphi_0 > 0$ и $A_1 < 0$) справедливы неравенства $B_1(\varphi_0) > B > c_1(A_1)$.

Однопараметрические семейства L_1 и L_2 порождают в силу соотношений (2.6), (2.7) двухпараметрические семейства неотрицательных убывающих при $\xi > 0$ решений уравнения (2.3), кривая L , в свою очередь, порождает однопараметрическое семейство решений (параметр семейства — точка фронта ξ_0 решения $V(\xi)$). С помощью асимптотических соотношений (2.9), (2.10) нетрудно убедиться, что решения, порождаемые в полуплоскости $\xi > 0$ интегральными кривыми семейств L_1 и L_2 , не могут удовлетворять граничному условию (2.4) и условию непрерывности потока q при $\xi > 0$.

Наоборот, из соотношения (2.11) следует

$$\varphi \sim c_n \left(\frac{\xi_0 - \xi}{\xi_0}\right)^{n\delta} \quad (\xi \rightarrow \xi_0 - 0, \quad \xi_0 > 0), \quad c_n = (n\delta)^{-n\delta}(\alpha/\beta)^\delta,$$

откуда для неотрицательных убывающих при $\xi > 0$ решений V_1 уравнения (2.3), порождаемых кривой L , получаем слева от точки фронта ξ_0 , которая пока остается произвольной, асимптотические представления

$$V_1 \sim c_n \xi_0^\delta (\xi_0 - \xi)^{n\delta} \quad (\xi \rightarrow \xi_0 - 0). \quad (2.13)$$

С помощью соотношений (2.7) и (2.11) находим асимптотику производной

$$V_1' \sim -n\delta c_n \xi_0^\delta (\xi_0 - \xi)^{-\gamma} \quad (\xi \rightarrow \xi_0 - 0). \quad (2.14)$$

Из (2.13), (2.14) без труда следует, что в точке фронта ξ_0 решения V_1 поток $q = 0$, поэтому, продолжив построенное на отрезке $0 \leq \xi \leq \xi_0$ решение V_1 с помощью соотношения $V_1(\xi) = 0$ при $\xi > \xi_0$, получим определенное на полуоси $\xi \geq 0$ неотрицательное невозрастающее решение

уравнения (2.3), удовлетворяющее граничному условию (2.4) и условию непрерывности потока при $\xi > 0$.

Воспользуемся теперь асимптотикой (2.12). Найдем, что $\varphi \sim V_{10}\xi^{-\gamma}$ ($\xi \rightarrow +0$), откуда в силу (2.6), (2.7) получим

$$V_1(0) = V_{10}, \quad V_1'(0) = BV_{10}^{-n\alpha}. \quad (2.15)$$

Постоянная V_{10} в (2.15) взаимно однозначно определяется точкой фронта ξ_0 решения $V_1(\xi)$.

Чтобы продолжить построенное решение V_1 на полуплоскость $\xi < 0$, положим аналогично (2.6)

$$V(\xi) = (-\xi)^\gamma \varphi(\xi), \quad \psi = \xi \varphi'_\xi, \quad \xi < 0, \quad (2.16)$$

откуда найдем

$$V'_\xi = -(-\xi)^{n\delta} W(\varphi, \psi). \quad (2.17)$$

После подстановки соотношений (2.16), (2.17) в уравнение (2.3) найдем

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -\frac{P_2(\varphi, \psi)}{Q_2(\varphi, \psi)}, \quad (2.18)$$

где

$$P_2 = \frac{\alpha}{\beta} + \varphi^{n+1} W^{n-2} [\gamma n \varphi \psi + \delta(3n+2)\varphi W + \frac{1}{\beta} \psi W], \quad Q_2 = n\varphi^{n+2} \psi W^{n-2}.$$

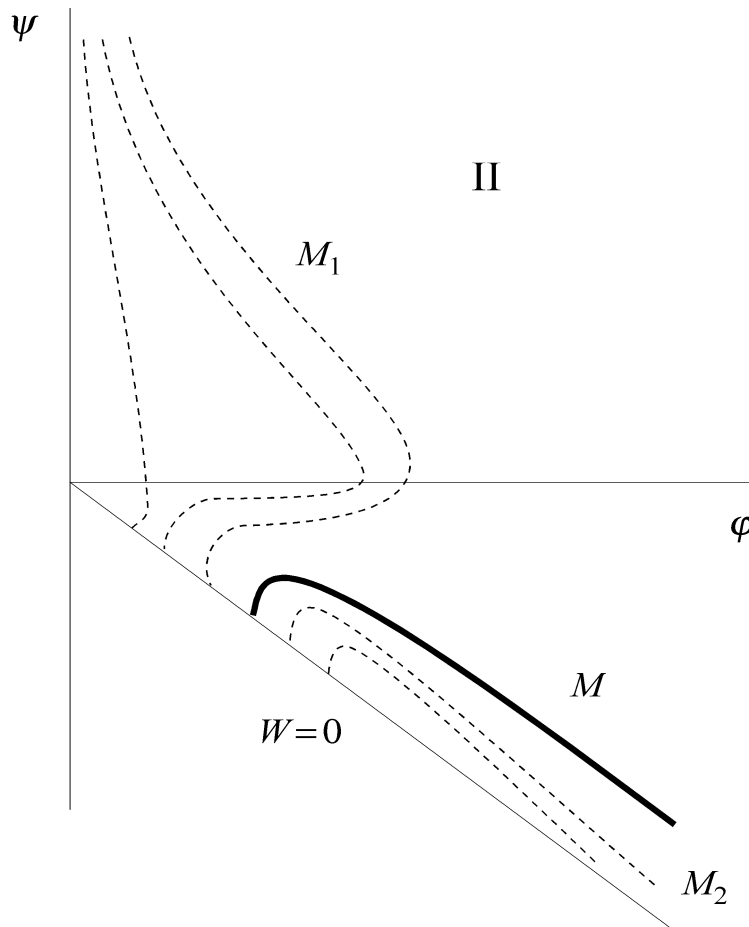


Рис. 2

Неотрицательные убывающие в полуплоскости $\xi < 0$ решения $V(\xi)$ уравнения (2.3) в силу соотношений (2.16), (2.17) порождаются интегральными кривыми уравнения (2.18), принадлежащими сектору II плоскости φ, ψ , который является пересечением полуплоскостей $\varphi > 0$ и $W > 0$ (рис. 2).

Придется по отдельности рассматривать три случая: 1) $n > 2$; 2) $n = 2$; 3) $1 < n < 2$. Во всех трех случаях изоклина нуля уравнения (2.19) имеет в секторе II ветвь ψ_2 с наклонной асимптотой $\psi = k_2\varphi$, где

$$k_2 = -\frac{\beta\delta}{2}(2n^2 + 7n + 4 - (4n^4 + 16n^3 + 21n^2 + 8n)^{1/2}).$$

В случае 1) изоклина нуля имеет в секторе II еще и вторую ветвь ψ_3 с наклонной асимптотой $W = 0$, причем справедлива асимптотика

$$\psi_3 \sim -\gamma\varphi + c\varphi^{-(n+3)\mu}, \quad c = \left(\frac{\alpha^3}{n\beta\delta^2}\right)^\mu \quad (\varphi \rightarrow \infty).$$

Ветви ψ_2 и ψ_3 не могут пересекаться с границей сектора II и с осью φ и соединяются между собой в некоторой внутренней точке сектора II. В случае 2) ветвь ψ_3 исчезает, а ветвь ψ_2 пересекает границу сектора II в точке $((50/27)^{1/5}, -3(50/27)^{1/5}/5)$, принадлежащей прямой $W = 0$. В случае 3), переписав уравнение (2.18) в эквивалентной форме $\psi'_\varphi = -P_3/Q_3$ ($P_3 = P_2W^{2-n}$, $Q_3 = n\varphi^{n+2}\psi$), снова получаем, что ветвь ψ_3 исчезает, а ветвь ψ_2 пересекает прямую $W = 0$ в начале координат. Используя эти результаты, можно показать, исследуя поведение интегральных кривых, что в каждом из трех случаев в секторе II существуют два семейства интегральных кривых уравнения (2.18) (рис. 2). Кривые обоих семейств M_1 и M_2 начинаются в точках (φ_0, ψ_0) прямой $W = 0$, но кривые семейства M_1 имеют вертикальную асимптоту $\varphi = 0$, а кривые семейства M_2 — наклонную асимптоту $W = 0$. Кривые семейства M_1 в случае 1) либо не пересекают ни одной ветви изоклины нуля, либо пересекают обе ветви ψ_2 и ψ_3 (ветвь ψ_2 интегральная кривая пересекает в точке минимума, ветвь ψ_3 — в точке максимума). Кривые семейства M_2 пересекают лишь ветвь ψ_3 , а затем, убывая при $\varphi \rightarrow \infty$, приближаются к асимптоте $W = 0$. В случаях 2) и 3) кривые семейства M_2 не пересекают ветвь ψ_2 изоклины нуля. Кривые семейства M_1 в случае 2) могут как пересекать, так и не пересекать ветвь ψ_2 , в случае 3) все кривые семейства M_1 пересекают ветвь ψ_2 . Семейства M_1 и M_2 разделены интегральной кривой M , выходящей из некоторой точки $(\tilde{\varphi}_0, \tilde{\psi}_0)$ прямой $W = 0$ и уходящей в секторе II в особую точку на ∞ в направлении с угловым коэффициентом

$$k_3 = -(3n + 2)\alpha\delta/2, \quad k_2 > k_3 > -\gamma. \quad (2.19)$$

Для кривых семейства M_1 $\varphi_0 < \tilde{\varphi}_0$, для кривых семейства M_2 $\varphi_0 > \tilde{\varphi}_0$. Во всех трех случаях справедлива асимптотика для кривых семейства M_1

$$\psi \sim A_2\varphi^{-1/n\beta} \quad (\varphi \rightarrow 0), \quad (2.20)$$

аналогичная первой из формул (2.10). Для кривых семейства M_2 также справедлива асимптотика

$$W(\varphi, \psi) \sim B_2\varphi^{-n\alpha} \quad (\varphi \rightarrow 0), \quad (2.21)$$

аналогичная второму соотношению в (2.10). Коэффициенты $A_2 = A_2(\varphi_0) > 0$ и $B_2 = B_2(\varphi_0) > 0$ в формулах (2.20), (2.21) теперь однозначно определяются абсциссой φ_0 точки прямой $W=0$, из которой выходит интегральная кривая, причем с возрастанием φ_0 коэффициент $A_2(\varphi_0)$ возрастает, коэффициент $B_2(\varphi_0)$ непрерывно убывает от ∞ до 0 при возрастании φ_0 от $\tilde{\varphi}_0$ до ∞ .

Исследуем поведение интегральных кривых семейств M_1 и M_2 вблизи точки выхода $(\varphi_0, -\gamma\varphi_0)$, принадлежащей прямой $W = 0$, т. е. при $\varphi \rightarrow \varphi_0$, $\psi \rightarrow \psi_0 = -\gamma\varphi_0$. Получим

$$\begin{aligned} \psi - \psi_0 &= d_n(\varphi - \varphi_0)^\lambda - \gamma(\varphi - \varphi_0) + O((\varphi - \varphi_0)^{n\lambda}) \quad (\varphi \rightarrow \varphi_0 - 0), \\ d_n &= \left(\frac{\alpha^2}{n\beta\delta\lambda\varphi_0^{n+3}} \right)^\lambda. \end{aligned} \quad (2.22)$$

С помощью соотношений (2.16), (2.17), (2.19) и асимптотических представлений (2.20)–(2.22) теперь нетрудно исследовать поведение двупараметрических семейств N_1 и N_2 неотрицательных монотонно убывающих решений уравнения (2.3), порождаемых соответственно однопараметрическими семействами M_1 и M_2 , а также поведение однопараметрического семейства N неотрицательных монотонно убывающих решений, порождаемых интегральной кривой M . Оказывается, что все решения семейства N обращаются в нуль при $\xi = 0$, а все решения семейства N_1 пересекают отрицательную полуось $\xi < 0$ (каждое в соответствующей точке). Следовательно, решения, принадлежащие этим семействам, невозможно гладко срастить в точке $\xi = 0$ с решением V_1 . Поэтому интересны лишь решения семейства N_2 . Эти решения определены при $0 > \xi > \xi_1$ (ξ_1 и φ_0 — два параметра, определяющие решение, параметр ξ_1 выбирается так, чтобы $V_2'(\xi_1) = 0$, возможность такого выбора обусловлена справедливостью асимптотики (2.22)). В результате достаточно громоздких выкладок, которые опустим, с помощью асимптотики (2.22) получим для решений семейства N_2 при $\xi \rightarrow \xi_1 + 0$

$$\begin{aligned} V_2 &= (-\xi_1)^\gamma \varphi_0 \left[1 - \frac{\delta d_n}{n\alpha\lambda(-\psi_0)^{\lambda/\mu}} \left(\frac{\xi_1 - \xi}{\xi_1} \right)^{n\lambda} + O((\xi - \xi_1)^w) \right], \quad w = \min\{2, \lambda/\alpha\}, \\ V_2 &= (-\xi_1)^{3/5} \varphi_0 \left[1 + \frac{3}{5} \left(\frac{d_2}{2} - \frac{8}{5} \right) \left(\frac{\xi_1 - \xi}{\xi_1} \right)^2 + O((\xi - \xi_1)^3) \right], \quad n = 2, \\ V_2 &= (-\xi_1)^\gamma \varphi_0 [1 + o((\xi - \xi_1)^2)], \quad 1 < n < 2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Из (2.17) с помощью (2.22) при $\xi \rightarrow \xi_1 + 0$ для всех $n > 1$ найдем

$$V_2' = -(-\xi_1)^{-n\delta} d_n (\gamma\varphi_0)^\lambda \left(\frac{\xi_1 - \xi}{\xi_1} \right)^\lambda + O((\xi - \xi_1)^{n\lambda}). \quad (2.24)$$

С другой стороны, с помощью асимптотики (2.21) нетрудно убедиться, что для решений семейства N_2 при $\xi \rightarrow -0$ существует конечный $\lim V_2(\xi) = V_{20}$, зависящий от ξ_1 и φ_0 , причем $V_2'(0) = -B_2 V_{20}^{-n\alpha}$, $B_2 = B_2(\varphi_0)$.

Теперь, положив $\xi_1 = -\varphi_0^{1/\gamma}$, в силу соотношений (2.23) и (2.24) получим решение семейства N_2 , удовлетворяющее условиям $V_2(\xi_1) = 1$ и $V_2'(\xi_1) = 0$. Продолжим его для значений $\xi < \xi_1$, положив $V_2(\xi) = 1$. В результате в полуплоскости $\xi < 0$ получим решение $V_2(\xi)$, удовлетворяющее граничному условию (2.5) и условию непрерывности потока при $\xi < 0$. Это решение зависит от параметра φ_0 , который выберем так, чтобы иметь

$$B_2(\varphi_0) = -B. \quad (2.25)$$

Напомним, что $B_2(\varphi_0)$ непрерывно убывает от ∞ до 0 с возрастанием φ_0 от $\tilde{\varphi}_0$ до ∞ , а $B < 0$, откуда следует существование единственного решения φ_0 уравнения (2.25).

Наконец, выбор точки фронта $\xi_0 > 0$ подчиним требованию

$$V_{20} = V_{10}. \quad (2.26)$$

Существование единственного решения уравнения (2.26) следует из легко проверяемого группового свойства решений уравнения (2.3): вместе с решением $V(\xi)$ решением является и функция

$\zeta^{-\gamma}V(\zeta\xi)$, $\zeta > 0$ произвольно. В самом деле, рассмотрим порожденное кривой L решение $\tilde{V}(\xi)$ уравнения (2.3) с точкой фронта $\xi_0 = 1$ (оно определено однозначно) и положим

$$V_1(\xi) = \zeta^{-\gamma}\tilde{V}(\zeta\xi). \quad (2.27)$$

С помощью уравнения (2.26) без труда найдем, что при $\zeta = (V_{20}/\tilde{V}(0))^{-1/\gamma}$ определенное равенством (2.27) решение V_1 уравнения (2.3) с точкой фронта $\xi_0 = 1/\zeta$ и нулевым потоком q_1 на фронте удовлетворяет как соотношению (2.26), так и равенству

$$V_1'(0) = V_2'(0), \quad (2.28)$$

т. е. является искомым. Положив

$$V(\xi) = \begin{cases} V_1(\xi), & \xi \geq 0; \\ V_2(\xi), & \xi < 0, \end{cases}$$

получим определенное на всей оси решение уравнения (2.3), удовлетворяющее как граничным условиям (2.4), (2.5), так и условию непрерывности потока q_1 , что следует из (2.15), (2.25), (2.26), (2.28).

Предложенный выше алгоритм решения задачи о распаде разрыва и полученные результаты удобно сформулировать в следующем виде.

Теорема. *Существует единственное невозрастающее и непрерывное вместе с потоком q (1.2), неотрицательное автомодельное решение $l(t, x) = V(\xi)$, $\xi = xt^{-\alpha}$ задачи о распаде разрыва (1.1), (1.3).*

Это решение $V(\xi) = 1$ при $\xi \leq \xi_1 = -\varphi_0^{-1/\gamma}$, где $\varphi_0 > 0$ — единственное решение уравнения (2.25), в котором $B < 0$ — коэффициент в асимптотике (2.12), а $B_2(\varphi_0) > 0$ — коэффициент в асимптотике (2.21). При $\xi_1 < \xi < 0$ решение $V(\xi)$ совпадает с решением $V_2(\xi)$ обыкновенного дифференциального уравнения (2.3), для которого при $\xi \rightarrow \xi_1 + 0$ справедливы асимптотические представления (2.23), (2.24), так что $V_2(\xi_1) = 1$, $V_2'(\xi_1) = 0$. При $0 \leq \xi \leq \zeta^{-1}$ решение $V(\xi) = \zeta^{-\gamma}\tilde{V}(\zeta\xi)$, здесь $\tilde{V}(\xi)$ — решение уравнения (2.3) с точкой фронта $\xi_0 = 1$ и асимптотикой (2.13), (2.14) при $\xi \rightarrow 1 - 0$ (оно определяется единственным образом), а $\zeta = (V_2(0)/\tilde{V}(0))^{-1/\gamma}$. Наконец, $V(\xi) = 0$ при $\xi > \zeta^{-1}$.

3. Применим полученные в п. 2 результаты для построения автомодельных разрывных неотрицательных невозрастающих решений модифицированной задачи (1.1), (1.3). С этой целью прежде всего выведем необходимое условие, которое должно выполняться для разрывного решения l на линии разрыва $x = x(t)$. Обозначим

$$\begin{aligned} l^+ &= \lim_{x \rightarrow x(t)+0} l(t, x), & l^- &= \lim_{x \rightarrow x(t)-0} l(t, x), & [l] &= l^+ - l^-, \\ q^+ &= \lim_{x \rightarrow x(t)+0} q, & q^- &= \lim_{x \rightarrow x(t)-0} q, & [q] &= q^+ - q^-, \end{aligned}$$

$x_0(t)$ — точка фронта решения l ($l(t, x_0(t)) = 0$, $q|_{x=x_0(t)} = 0$), $x_1(t)$ — точка срачивания криволинейного участка решения $l(t, x)$ с прямой $l = 1$. Из закона сохранения массы находим равенство

$$\int_{x_1(t)}^{x(t)-0} l(t, x)dx + \int_{x(t)+0}^{x_0(t)} l(t, x)dx = -x_1(t). \quad (3.1)$$

Дифференцируя тождество (3.1) по t , получаем

$$x'(l^- - l^+) + \int_{x_1(t)}^{x(t)-0} l_t dx + \int_{x(t)+0}^{x_0(t)} l_t dx = 0. \quad (3.2)$$

С учетом уравнения (1.1) из (3.2) следует условие

$$x'(t)[l] = -[q], \quad (3.3)$$

которое и должно выполняться на линии разрыва $x = x(t)$.

Рассмотрим в плоскости x, t область D , ограниченную снизу полупрямой $R_1 = \{(x, t) : x < 0, t = 0\}$, а справа — кривой

$$R_2 = \{(x, t) : x = \xi_0 t^\alpha, \xi_0 > 0 \text{ задано}\}. \quad (3.4)$$

В области D построим разрывное решение l уравнения (1.1), удовлетворяющее следующим условиям на границе области

$$l(t, x) = 1, \quad (x, t) \in R_1, \quad (3.5)$$

$$l(t, x) = 0, \quad q = 0, \quad (x, t) \in R_2. \quad (3.6)$$

Кроме того, на линии разрыва

$$R_3 = \{(x, t) : x = \xi_2 t^\alpha, \xi_2 < 0 \text{ задано}\} \quad (3.7)$$

в соответствии с (3.3) потребуем выполнения соотношения

$$\alpha \xi_2 t^{\alpha-1} [l] = [\tilde{q}], \quad \tilde{q} = -q = \beta l^{n+2} (-l_x)^n. \quad (3.8)$$

Будем рассматривать обобщенное решение задачи (1.1), (3.5)–(3.8), допуская, как обычно [5], что искомое решение может не только иметь разрыв первого рода на кривой R_3 , но может не иметь всех входящих в уравнение (1.1) производных и на некоторых других кривых в области D .

Замечание. Отметим наличие разрыва в граничных данных сформулированной задачи. Действительно, из (3.5) находим $\lim l = 1$ ($x \rightarrow -0, (x, t) \in R_1$), а из (3.6) $\lim l = 0$ ($x \rightarrow +0, (x, t) \in R_2$).

Снова будем строить автомодельное неотрицательное невозрастающее (в точках непрерывности) решение задачи (1.1), (3.5)–(3.8) (этой цели и отвечает выбор кривых R_2 и R_3 в виде (3.4) и (3.7)), положив $l(t, x) = V(\xi)$, $\xi = xt^{-\alpha}$. Из (1.1), (3.5)–(3.8) следует, что функция $V(\xi)$ должна удовлетворять уравнению (2.3) при $\xi < \xi_0$ всюду, кроме точки разрыва ξ_2 , в которой в силу (3.7), (3.8) должно выполняться соотношение

$$\alpha \xi_2 [V] = [q_1], \quad q_1 = \beta V^{n+2} (-V_\xi)^n \quad (3.9)$$

(в некоторых точках полуоси $\xi < \xi_0$ функция V может не иметь всех производных, входящих в уравнение (2.3)). Граничные условия (3.5), (3.6) дают

$$V = 1 \quad (\xi = -\infty), \quad (3.10)$$

$$V = q_1 = 0 \quad (\xi = \xi_0). \quad (3.11)$$

Наконец, функция V должна быть неотрицательной и невозрастающей.

Перейдем к построению искомого решения $V(\xi)$ уравнения (2.3), удовлетворяющего условиям (3.9)–(3.11). При $0 \leq \xi \leq \xi_0$ полагаем $V(\xi) = V_1(\xi)$, где V_1 — построенное в п. 2 решение уравнения (2.3), удовлетворяющее условию (3.11). Оно определено однозначно, поскольку точка фронта $\xi_0 > 0$ задана, неотрицательно и не возрастает. Таким образом, определены и значения $V_1(0) > 0$ и $V_1'(0) < 0$. Теперь при $\xi < 0$ можно построить единственное неотрицательное невозрастающее решение $V_2(\xi)$, удовлетворяющее условиям $V_2(0) = V_1(0)$, $V_2'(0) = V_1'(0)$. Это решение принадлежит семейству N_2 и метод его построения указан в п. 2.

Вместе с решением V_2 оказываются определенными значения $V_2^+ = \lim V_2, q_1^+ = \lim q_1, \xi \rightarrow \xi_2 + 0$, следовательно, определено и значение $m^+ = \alpha \xi_2 V_2^+ - q_1^+$ (т. к. $\xi_2 < 0, V_2^+ > 0, q_1^+ > 0$). Полагаем $V(\xi) = V_2(\xi), \xi_2 < \xi < 0$.

При $\xi < \xi_2$ построим решение $V_3(\xi, \xi_1, \varphi_0)$ уравнения (2.3), принадлежащее семейству N_1 , если $0 < \varphi_0 < \tilde{\varphi}_0$, семейству N , если $\varphi_0 = \tilde{\varphi}_0$, семейству N_2 в случае $\varphi_0 > \tilde{\varphi}_0$ (см. п. 2). Будем

иметь $V_3 = (-\xi_1)^\gamma \varphi_0$, $V_3' = 0$ при $\xi = \xi_1$. Положив $\xi_1 = -\varphi_0^{-1/\gamma} < 0$, получим $V_3 = 1$, $V_3' = 0$ при $\xi = \xi_1$. Теперь оказываются определенными значения $V_3^-(\varphi_0) = \lim_{\xi \rightarrow \xi_2 - 0} V_3(\xi, \xi_1, \varphi_0) > 0$, $q_1^- = \lim_{\xi \rightarrow \xi_2 - 0} \beta V_3^{n+2} (-V_3')^n > 0$, а вместе с ними и значение $m^-(\varphi_0) = \alpha \xi_2 V_3^- - q_1^- < 0$. Соотношение (3.9) равносильно трансцендентному уравнению

$$m^-(\varphi_0) = m^+ \quad (3.12)$$

относительно $\varphi_0 > 0$. После решения уравнения (3.12) определится функция $V_3(\xi, \xi_1, \varphi_0)$ ($\xi_1 = -\varphi_0^{1/\gamma}$). Положив $V = V_3$ при $\xi_1 < \xi < \xi_2$, $V = 1$ при $\xi < \xi_1$, получим искомое решение $V(\xi)$.

Для доказательства разрешимости уравнения (3.12) рассмотрим поведение решения V_3 и его производной V_3' при изменении φ_0 от 0 до ∞ . Если $\varphi_0 < \tilde{\varphi}_0$, то кривая V_3 принадлежит семейству N_1 и при $\varphi_0 \rightarrow 0$ будем иметь $\varphi(\xi) \rightarrow 0$ равномерно по ξ , а в силу (2.20) $W(\varphi, \psi) \sim A_2(\varphi_0)\varphi^{-1/n\beta}$. Отсюда и из (2.16), (2.17) получим при $\varphi_0 \rightarrow 0$

$$V_3^- \rightarrow 0, \quad q_1^- \sim \beta(-\xi_2)^{n+1+\delta} A_2^n(\varphi_0) \rightarrow 0,$$

т. к. $A_2(\varphi_0) \rightarrow 0$ при $\varphi_0 \rightarrow 0$. Следовательно, $m^-(\varphi_0) \rightarrow 0$ при $\varphi_0 \rightarrow 0$. При $\varphi_0 > \tilde{\varphi}_0$ кривая V_3 принадлежит семейству N_2 и при $\varphi_0 \rightarrow \infty$ будем иметь $\xi_1 \rightarrow -0$. Отсюда найдем $V_3^- = 1$ (т. к. $\xi_2 < \xi_1$, если φ_0 достаточно велико), $q_1^- = 0$ ($V_3'(\xi_2 - 0) = 0$, $\varphi_0 \gg 1$). Итак, имеем $m^- = \alpha \xi_2 < 0$, если $\varphi_0 \gg 1$. Таким образом, значение $m^-(\varphi_0)$ при изменении φ_0 от 0 до ∞ принимает, во всяком случае, все отрицательные значения между нулем и $\alpha \xi_2$ (нетрудно заметить, что $m^-(\varphi_0)$ — непрерывная функция φ_0). Следовательно, достаточным условием разрешимости уравнения (3.12), а вместе с ним и достаточным условием существования автомодельного неотрицательно и невозрастающего решения $l = V(\xi)$ смешанной задачи (1.1), (3.5)–(3.8) в неограниченной области D будет выполнение неравенства $m^+ > \alpha \xi_2$, что можно рассматривать как определенное ограничение на выбор значения параметра ξ_0 (или ξ_2). Отметим, что построенное решение $l(t, x)$ помимо разрыва на кривой R_3 допускает и разрыв второй производной по x на кривой $x = \xi_1 t^\alpha$, $t > 0$.

Искренне благодарю А.Н. Саламатина и В.А. Чугунова за полезные обсуждения.

Литература

1. Ritz С. *Un modele thermo-mecanique d'evolution pour le bassin glaciaire antarctique Vostok-Glacier Byrd: sensibilite aux valeurs des parametres mal connus* // These Doctoral d'Etat. Centre national de la recherche scientifique. Laboratoire de Glaciologie et Geophysique de l'Environnement, 1992. — 377 p.
2. Саламатин А.Н., Чугунов В.А., Мазо А.Б. *Численные и инвариантные решения задачи о динамике субизотермического ледника в одномерном приближении* // Задачи механики природных процессов. — М.: Изд-во МГУ, 1983. — С. 82–96.
3. Тонконог С.Л., Чугунов В.А., Эскин Л.Д. *Методы группового анализа в задаче о растекании с проскальзыванием нелинейно вязкой жидкости* // ПММ. — 1994. — Т. 58. — № 4. — С. 63–69.
4. Гельфанд И.М. *Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений* // УМН. — 1959. — Т. 14. — № 2. — С. 87–158.
5. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*. — М.: Наука, 1987. — 480 с.

Казанский государственный
университет

Поступили
первый вариант 22.09.1999
окончательный вариант 09.10.2000