ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 12 (487)

УДК 517.977

В.А. СРОЧКО

МОДЕРНИЗАЦИЯ МЕТОДОВ ГРАДИЕНТНОГО ТИПА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В работе проводится дальнейшее развитие градиентной методики построения и обоснования итерационных методов в рамках основной задачи оптимального управления [1]. По тематике, терминологии и характеристикам применяемого подхода данная работа является естественным продолжением статьи [2]. В связи с градиентными процедурами решения задач оптимального управления необходимо отметить научные монографии и учебные пособия [3]–[7].

Рассматривается задача оптимизации нелинейной динамической системы с выпуклым компактным ограничением на управление. В этом случае базовое условие оптимальности — дифференциальный принцип максимума (ДПМ), стандартная техника улучшения — метод условного градиента, универсальная процедура варьирования — обобщенная выпуклая комбинация пары допустимых управлений, использующая функцию варьирования (вместо параметра).

В § 1 проводится сравнительный анализ процедур варьирования, связанных с различными нормировками (параметризациями) функции варьирования. Нормировка в пространствах L_∞, L_1 приводит к стандартным вариациям слабого и игольчатого типа. В результате применения L_2-нормы построена неклассическая процедура смешанного варьирования, сочетающая в себе элементы стандартных процедур (участки слабого и игольчатого варьирования) и расширяющая конструктивные возможности улучшения управлений.

В § 2 проводится разработка и исследование квазиградиентных методов на основе квазивариации функционала в совокупности с процедурами слабого и смешанного варьирования. Методы используют только первые производные функциональных элементов задачи по управляющим и фазовым переменным. Основные качественные характеристики предлагаемых процедур состоят в следующем:

— локальное улучшение нестационарных управлений в общих задачах;
— нелокальный спуск в билинейных задачах со свойством сходимости по модифицированной невязке ДПМ;
— возможность улучшения стационарных управлений вследствие разрывного характера процедуры варьирования.

Указанные свойства существенно превосходят стандартный потенциал метода условного градиента, что подтверждается соответствующими примерами.

1. Постановка задачи. Оптимизация процедуры варьирования

Определим основную задачу оптимального управления следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}\Phi(u) = \varphi(x(t_1)) + \int_T F(x,u,t)dt \to \min,\\ \dot{x} = f(x,u,t), \quad x(t_0) = x^0,\\ u(t) \in U, \quad t \in T.\end{gathered} \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 02-01-00243, 02-01-81001) и программы “Университеты России” (проект УР. 03.01.008).

Введем множество допустимых управлений

$$V = \{u \in L^r_\infty(T) : u(t) \in U,\ t \in T\},$$

которое содержит измеримые и ограниченные на T вектор-функции $u(t)$ с ограничением типа включения относительно выпуклого и компактного множества $U \subset R^r$.

Будем считать, что каждому допустимому управлению $u \in V$ соответствует единственная фазовая траектория $x(t,u)$ (абсолютно непрерывная вектор-функция), причем на множестве V семейство таких траекторий ограничено

$$x(t,u) \in X, \quad t \in T, \quad u \in V,$$

с выпуклым компактом $X \subset R^n$.

Предположим, что в задаче (1)

1) терминальная функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема на X;
2) интегрант $F(x,u,t)$ и вектор-функция $f(x,u,t)$ непрерывны по своим аргументам на $X \times U \times T$ вместе с производными по совокупности (x,u) до второго порядка включительно.

Выделим из общей постановки (1) важную с точки зрения теории и приложений билинейную относительно пары (x,u) задачу, которая характеризуется билинейным функционалом

$$\Phi(u) = \langle c, x(t_1)\rangle + \int_T (\langle a(u,t), x\rangle + \langle b(t), u\rangle)\, dt,$$

$$a(u,t) = a^0(t) + \sum_{j=1}^r a^j(t) u_j,$$

связанным с аналогичной фазовой системой

$$\dot{x} = A(u,t)x + B(t)u + c(t), \quad x(t_0) = x^0,$$

$$A(u,t) = A_0(t) + \sum_{j=1}^r A_j(t) u_j.$$

Введем сопряженную переменную $\psi \in R^n$, образуем функцию Понтрягина

$$H(\psi, x, u, t) = \langle \psi, f(x,u,t)\rangle - F(x,u,t)$$

и определим сопряженную задачу

$$\dot{\psi} = -H_x(\psi, x, u, t), \quad \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)).$$

Пусть $u(t)$, $t \in T$, — допустимое управление с траекториями $x(t,u)$, $\psi(t,u)$ фазовой и сопряженной систем. Используя антиградиент $H_u[t,u] = H_u(\psi(t,u), x(t,u), u(t), t)$, $t \in T$, функционала Φ на управлении $u \in V$, сформулируем соответствующее условие оптимальности.

Дифференциальный принцип максимума: для оптимальности управления $u \in V$ в задаче (1) необходимо, чтобы

$$u(t) = \arg\max_{v \in U} \langle H_u[t,u],\, v\rangle, \quad t \in T.$$

Определим процедуру варьирования для управления u. Пусть $v \in V$ — допустимое управление, $\chi \in L_\infty(T)$ — функция варьирования с условием $\chi(t) \in [0,1]$, $t \in T$. Образуем семейство управлений варьирования по правилу обобщенной выпуклой комбинации пары u, v

$$u_{v,\chi}(t) = u(t) + \chi(t)(v(t) - u(t)), \quad t \in T. \tag{2}$$

Слабая вариация функционала Φ на управлениях u, $u_{v,\chi}$ имеет вид [2]

$$\delta_0 \Phi(u, u_{v,\chi}) = -\int_T \chi(t) \langle H_u[t,u],\, v(t) - u(t)\rangle\, dt.$$

Сформулируем порождающую задачу для вспомогательного управления при фиксированной функции $\chi(t)$

$$\delta_0\Phi(u, u_{v,\chi}) \to \min, \quad v \in V.$$

Ее решение независимо от χ определяется условием максимума

$$\overline{u}(t) = \arg\max_{v\in U}\langle H_u[t,u],\, v\rangle, \quad t \in T.$$

В обозначениях

$$u_\chi(t) = u(t) + \chi(t)(\overline{u}(t) - u(t)), \quad g(t) = \langle H_u[t,u], \overline{u}(t) - u(t)\rangle, \quad t \in T,$$

слабая вариация на паре u, u_χ представляется в виде линейного функционала

$$\delta_0\Phi(u, u_\chi) = -\int_T \chi(t)g(t)\,dt, \quad \chi(t) \in [0,1], \quad g(t) \geq 0.$$

Рассмотрим вопрос об оптимальном выборе функции варьирования. Используя L_p-нормировку, $p = 1, 2, \infty$, с параметром $\alpha \in (0,1]$, введем множество функций варьирования

$$\mathcal{X}_\alpha^{(p)} = \left\{\chi \in L_\infty(T) : \chi(t) \in [0,1],\ \left(\int_T \chi^p(t)\,dt\right)^{1/p} = \alpha(t_1 - t_0)^{1/p}\right\}. \tag{3}$$

Отметим, что $\alpha \in \mathcal{X}_\alpha^{(p)}$ и множество $\mathcal{X}_1^{(p)}$ содержит единственную функцию $\chi(t) = 1$, $t \in T$.

Зафиксируем $\alpha \in (0,1)$ и определим задачу поиска функции варьирования согласно принципу наискорейшего спуска

$$\delta_0\Phi(u, u_\chi) \to \min, \quad \left(\int_T \chi(t)g(t)\,dt \to \max\right), \quad \chi \in \mathcal{X}_\alpha^{(p)}. \tag{4}$$

Проведем решение этой задачи для различных случаев нормировки.

1. Пусть $p = \infty$, используется норма в $L_\infty(T)$, т. е. $\operatorname{ess\,sup}_{t\in T}|\chi(t)| = \alpha$. Тогда множество $\mathcal{X}_\alpha^{(\infty)}$ определяет двусторонние ограничения $0 \leq \chi(t) \leq \alpha$, $t \in T$. При этом решение задачи (4) имеет простейший вид $\chi_\alpha(t) = \alpha$, $t \in T$, и является единственным при условии невырожденности этой задачи: $g(t) > 0$, $t \in T$. На особых участках, когда $g(t) = 0$, $t \in T_0 \subset T$, решение не единственно и определяется условием $\chi_\alpha(t) \in [0, \alpha]$, $t \in T_0$.

В результате получаем стандартную процедуру слабого варьирования по методу условного градиента

$$u_\alpha(t) = u(t) + \alpha(\overline{u}(t) - u(t)), \quad \alpha \in (0,1], \quad t \in T. \tag{5}$$

Соответствующее значение вариации функционала

$$\delta_0\Phi(u, u_\alpha) = -\alpha\int_T g(t)\,dt. \tag{6}$$

2. Пусть в задаче (4) $p = 1$. Применяя принцип максимума в нормальной форме ($\lambda_0 = 1$), получаем λ-параметрическое семейство функций варьирования

$$\chi(t,\lambda) = \begin{cases} 0, & g(t) < \lambda; \\ 1, & g(t) > \lambda. \end{cases}$$

Для особых точек $g(t) = \lambda$ функция $\chi(t,\lambda)$ принимает любое значение из отрезка $[0,1]$.

Разрешающий параметр λ_α определяется интегральным условием $\int_T \chi(t,\lambda)\,dt = \alpha(t_1 - t_0)$ и выделяет решение задачи (4) $\chi_\alpha(t) = \chi(t, \lambda_\alpha)$, $t \in T$.

В результате формируется α-параметрическое семейство управлений на основе методики игольчатого варьирования

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} u(t), & g(t) < \lambda_\alpha; \\ \overline{u}(t), & g(t) > \lambda_\alpha. \end{cases} \tag{7}$$

Для $g(t) = \lambda_\alpha$ имеем $u_\alpha(t) \in \operatorname{conv}\{u(t), \overline{u}(t)\}$.

Поскольку $\chi(t) \equiv \alpha$, $t \in T$, — допустимая функция в задаче (4), то оценка уменьшения слабой вариации функционала имеет вид

$$\delta_0 \Phi(u, u_\alpha) \leq -\alpha \int_T g(t)\, dt. \tag{8}$$

Сравнивая с выражением (6), заключаем, что в теоретическом плане игольчатое варьирование (7) предпочтительней (по скорости убывания функционала Φ) слабого варьирования (5).

3. Рассмотрим задачу (4) для $p = 2$ при условии невырожденности $g(t) > 0$, $t \in T$. Согласно принципу максимума оптимальная функция варьирования определяется через решение следующей задачи с множителем λ

$$\chi g(t) - \frac{1}{2}\lambda \chi^2 \to \max, \quad \chi \in [0, 1].$$

Если $\lambda < 0$, то решение $\chi(t, \lambda) = 1$ не может быть допустимым по интегральному ограничению для $\alpha \in (0, 1)$. Содержательный случай связан с условием $\lambda > 0$ и приводит к решению

$$\chi(t, \lambda) = \begin{cases} \frac{g(t)}{\lambda}, & g(t) < \lambda; \\ 1, & g(t) \geq \lambda. \end{cases} \tag{9}$$

При $\lambda = 0$ решение $\chi(t, 0) = 1$, что отвечает формуле (9), поскольку $g(t) \geq 0$.

Для особых точек $g(t) = 0$ получаем $\chi(t, \lambda) = 0$, что согласуется с формулой (9) при $\lambda > 0$.

Разрешающий параметр λ_α определяется условием $\int\limits_T \chi^2(t, \lambda)\, dt = \alpha^2 (t_1 - t_0)$ и формирует решение задачи (4) $\chi_\alpha(t) = \chi(t, \lambda_\alpha)$, $t \in T$. Отметим, что $\lambda_1 = 0$. В данном случае процедура варьирования носит "смешанный" характер (обобщенная выпуклая комбинация на участках $g(t) < \lambda_\alpha$, максимизирующее управление в области $g(t) \geq \lambda_\alpha$)

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} u(t) + \dfrac{g(t)}{\lambda_\alpha}(\overline{u}(t) - u(t)), & g(t) < \lambda_\alpha; \\ \overline{u}(t), & g(t) \geq \lambda_\alpha. \end{cases} \tag{10}$$

Соответствующая оценка уменьшения вариации функционала аналогична предыдущему случаю ($\chi(t) \equiv \alpha$, $t \in T$, — допустимая функция) и представляется неравенством (8).

Перейдем к вопросам обоснования свойств улучшения по функционалу Φ на семействе u_α в предположении, что исходное управление $u(t)$ не удовлетворяет ДПМ в задаче (1), т.е. $\delta_0(u) = \int\limits_T g(t) dt > 0$. Приращение и слабая вариация функционала Φ на паре u, u_α связаны соотношением [2] $\Delta_{u_\alpha} \Phi(u) = \delta_0 \Phi(u, u_\alpha) + \eta_0$, в котором

$$\eta_0 = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$
$$\Delta_1 = -\int_T o_H(\|\Delta u(t)\|)\, dt, \quad \Delta_2 = -\int_T \langle \Delta_{u_\alpha} H_x[t, u],\, \Delta x(t) \rangle\, dt,$$
$$\Delta_3 = -\int_T o_H(\|\Delta x(t)\|)\, dt + o_\varphi(\|\Delta x(t_1)\|).$$

В силу предположения 2) относительно задачи (1) функция $H(\psi, x, u, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по u, а вектор-функция $H_x(\psi, x, u, t)$ имеет непрерывную производную

$H_{xu}(\psi, x, u, t)$. Следовательно, используя стандартные приемы и факты (представление остаточного члена в разложении Тейлора, обобщенная теорема о среднем), получаем оценки

$$|\Delta_1| \le C_1 \int_T \|\Delta u(t)\|^2\, dt, \quad |\Delta_2| \le C_2 \int_T \|\Delta u(t)\|\, \|\Delta x(t)\|\, dt. \tag{11}$$

Кроме того, в силу ограниченности множества допустимых процессов $\{u(t),\, x(t,u)\}$ задачи (1) справедлива оценка для приращений $\Delta u(t)$, $\Delta x(t)$

$$\|\Delta x(t)\| \le C \int_T \|\Delta u(t)\|\, dt, \quad t \in T. \tag{12}$$

Для случая $p = \infty$ (слабое варьирование) ситуация с улучшением вполне очевидна

$$\|\Delta u(t)\| \sim \alpha, \quad \|\Delta x(t)\| \sim \alpha, \quad t \in T, \quad \eta_0 = o(\alpha),$$

т. е. управление u_α обеспечивает локальный спуск по функционалу Φ

$$\Phi(u_\alpha) - \Phi(u) = -\alpha\delta_0(u) + o(\alpha).$$

Пусть $p = 1$ (игольчатое варьирование). Выясним порядок остатка η_0 относительно α. Поскольку $\Delta u(t) = \chi_\alpha(t)(\overline{u}(t) - u(t))$, $t \in T$, то $\int\limits_T \|\Delta u(t)\|\, dt \le D \int\limits_T \chi_\alpha(t)\, dt = \alpha D(t_1 - t_0)$, где $D = \operatorname{diam} U$ — диаметр множества U. Отсюда в силу оценки (12) имеем $\|\Delta x(t)\| \le C_3\alpha$, $t \in T$, поэтому в выражении для η_0

$$|\Delta_2| \le C_4\alpha^2, \quad \Delta_3 = o(\alpha). \tag{13}$$

Что касается величины Δ_1, то в рамках оценки (11) (которая является неулучшаемой) сделать заключение относительно ее порядка малости по α не представляется возможным. Ситуация здесь проясняется для задач (1), линейных по управлению. В этом случае $\Delta_1 = 0$, т. е. $\eta_0 = o(\alpha)$, и управление u_α обеспечивает локальное улучшение. Однако в задачах, линейных по управлению с выпуклым, компактным множеством U, дифференциальный принцип максимума совпадает с принципом максимума, т. е. получается стандартная процедура игольчатого улучшения.

Таким образом, игольчатое варьирование на базе дифференциального принципа максимума в задачах, нелинейных по управлению, не обладает, вообще говоря, свойством улучшения.

Рассмотрим случай $p = 2$ (смешанное варьирование). Здесь, как и ранее, получаем

$$\int_T \|\Delta u(t)\|\, dt \le D \int_T \chi_\alpha(t)\, dt.$$

Далее, используя неравенство

$$\int_T \chi_\alpha(t)\, dt \le \sqrt{t_1 - t_0} \Big(\int_T \chi_\alpha^2(t)\, dt \Big)^{1/2},$$

с учетом L_2-нормировки для функции $\chi_\alpha(t)$ приходим к оценке, аналогичной предыдущему случаю

$$\int_T \|\Delta u(t)\|\, dt \le \alpha D(t_1 - t_0). \tag{14}$$

Отсюда получаем оценочные соотношения (13). Остается выяснить порядок величины Δ_1. Замечая, что $\|\Delta u(t)\|^2 = \chi_\alpha^2(t)\|\overline{u}(t) - u(t)\|^2 \le \chi_\alpha^2(t) D^2$, имеем $\int\limits_T \|\Delta u(t)\|^2\, dt \le \alpha^2 D^2(t_1 - t_0)$. Это гарантирует второй порядок малости по α для величины Δ_1. В совокупности заключаем, что $\eta_0 = o(\alpha)$ и получаем свойство локального улучшения с оценкой

$$\Phi(u_\alpha) - \Phi(u) \le -\alpha\delta_0(u) + o(\alpha).$$

Итак, процедура смешанного варьирования (10) является альтернативой стандартной схеме условного градиента в рассматриваемой задаче.

В заключение следует отметить, что практическая реализация процедуры (10) предполагает варьирование по параметру $\lambda > 0$ с целью уменьшения функционала Φ в рамках семейства управлений

$$u(t,\lambda) = \begin{cases} u(t) + \dfrac{g(t)}{\lambda}(\overline{u}(t) - u(t)), & g(t) < \lambda; \\ \overline{u}(t), & g(t) \geq \lambda. \end{cases}$$

Такое варьирование вполне уместно в задачах (1), когда оптимальное управление содержит внутренние и граничные участки относительно множества U.

Для упрощения предыдущей формулы можно ввести функцию-срезку

$$\operatorname{sat}_1 x = \begin{cases} x, & x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Тогда процедура смешанного варьирования представляется в виде

$$u(t,\lambda) = u(t) + \left(\operatorname{sat}_1 \frac{g(t)}{\lambda}\right)(\overline{u}(t) - u(t)).$$

Проиллюстрируем приведенные выше соотношения в рамках простейшей задачи.

Пример 1 (сравнение процедур варьирования).

$$\Phi(u) = x_1^2(3) + x_2(3) \to \min,$$
$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = -1,$$
$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in [0,3].$$

В данной задаче

$$H = \psi_1 u + \psi_2 x_1, \quad H_u = \psi_1, \quad \dot{\psi}_1 = -\psi_2, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \psi_1(3) = -2x_1(3), \quad \psi_2(3) = -1.$$

Рассмотрим управление $u(t) = 0$ с траекториями $x_1(t,u) = 0$, $x_2(t,u) = -1$, $\psi_1(t,u) = t - 3$, $\psi_2(t,u) = -1$ и значением функционала $\Phi(0) = -1$. Оно не удовлетворяет ДПМ. Проведем его улучшение с помощью процедуры условного градиента (5) и модификации (10).

Для процедуры (5) имеем

$$\overline{u}(t) = \operatorname{sign}(t-3) = -1, \quad u_\alpha(t) = -\alpha,$$
$$x_1^\alpha(t) = -\alpha t, \quad x_2^\alpha(t) = -\alpha\frac{t^2}{2} - 1.$$

Нетрудно подсчитать, что $\Phi(u_\alpha) = 9\alpha^2 - \frac{9}{2}\alpha - 1$, $\alpha \in [0,1]$. Минимизирующее значение параметра $\alpha_1 = 1/4$, что приводит к управлению $u_1 = -1/4$ и значению функционала $\Phi(u_1) = -1\frac{9}{16} < \Phi(0)$.

Перейдем к процедуре смешанного варьирования (10). Пусть $\lambda \in [0,3]$. В этом случае в силу монотонности функции $g(t) = -H_u[t,u] = 3 - t$ целесообразно перейти к параметру $\tau \in [0,3]$ по правилу $g(\tau) = \lambda$. Тогда

$$u_\tau(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < \tau; \\ \dfrac{t-3}{3-\tau}, & \tau < t \leq 3. \end{cases}$$

Решая фазовую систему, получаем

$$x_1^\tau(t) = \begin{cases} -t, & 0 \le t < \tau; \\ \dfrac{1}{2(3-\tau)}(t^2 - 6t + \tau^2), & \tau < t \le 3; \end{cases}$$

$$x_2^\tau(t) = \begin{cases} -\dfrac{t^2}{2} - 1, & 0 \le t < \tau; \\ \dfrac{1}{2(3-\tau)}\left(\dfrac{t^3}{3} - 3t^2 + \tau^2 t\right) - \dfrac{\tau^3}{6(3-\tau)} - 1, & \tau < t \le 3. \end{cases}$$

Соответствующее значение функционала

$$\Phi(u_\tau) = 1/12(5\tau^2 + 6\tau - 21), \quad \tau \in [0,3].$$

Минимальное значение функции $\Phi(u_\tau)$ на отрезке $[0,3]$ достигается в точке $\tau = 0$, что приводит к итоговому управлению

$$u_2(t) = \frac{1}{3}(t-3), \quad t \in [0,3], \quad \Phi(u_2) = -1\frac{3}{4}.$$

Далее, рассмотрим случай, когда $\lambda > 3$. При этом $u_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}(t-3)$. Соответствующее решение фазовой системы имеет вид

$$x_1^\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{t^2}{2} - 3t\right), \quad x_2^\lambda(t) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{t^3}{6} - \frac{3t^2}{2}\right) - 1.$$

Тогда значение функционала

$$\Phi(u_\lambda) = \frac{81}{4\lambda^2} - \frac{9}{\lambda} - 1, \quad \lambda > 3.$$

Нетрудно подсчитать, что минимальное значение функции $\Phi(u_\lambda)$ достигается в точке $\lambda = \frac{9}{2}$, что приводит к итоговому управлению

$$u_3(t) = \frac{2}{9}(t-3), \quad t \in [0,3], \quad \Phi(u_3) = -2.$$

Таким образом, процедура смешанного варьирования является в данном случае предпочтительной по глубине улучшения: $\Phi(u_3) < \Phi(u_1)$.

2. Квазиградиентные методы

В рамках основной задачи (1) проведем модификацию полученных в § 1 процедур улучшения. В качестве базовой аппроксимации используем квазивариацию целевого функционала, которая определяется следующим образом [2]:

$$\delta_1\Phi(u,w) = -\int_T \langle H_u(\psi(t,u), x(t,w), u(t), t), w(t) - u(t)\rangle dt,$$
$$\Delta_w\Phi(u) = \delta_1\Phi(u,w) + \eta_1, \tag{15}$$
$$\eta_1 = o_\varphi(\|\Delta x(t_1)\|) - \int_T o_H(\|\Delta x(t)\|)dt - \int_T o_H^{(1)}(\|\Delta u(t)\|)dt.$$

В отличие от классической вариации $\delta_0\Phi(u,w)$ здесь производная H_u под знаком интеграла подсчитана вдоль возмущенной траектории $x(t,w)$. В результате аппроксимация (15) в полной мере обеспечивает линеаризацию функционала Φ по Δx: остаточный член η_1 имеет порядок $o(\|\Delta x\|)$. Это значит, что в билинейной задаче аппроксимация (15) является точной ($\eta_1 = 0$).

Соответствующие методы работают с управлениями, которые определяются экстремальным соотношением

$$u^*(\psi, x, t) = \arg\max_{v \in U} \langle H_u(\psi, x, u(t), t), v\rangle, \quad \psi, x \in R^n, \quad t \in T,$$

относительно исследуемого управления $u(t)$.

Предположим, что структура задачи (1) допускает аналитическую реализацию экстремального управления $u^*(\psi, x, t)$ (явная формула).

Перейдем к построению процедуры улучшения. Для управления $u(t)$, $t \in T$, проведем варьирование по правилу выпуклой комбинации (2) с функциональными параметрами $\chi(t) \in [0, 1]$ (функция варьирования) и $v(t) \in U$ (вспомогательное управление). Согласно определению квазивариация функционала Φ на управлениях u, $u_{v,\chi}$ имеет вид

$$\delta_1 \Phi(u, u_{v,\chi}) = -\int_T \chi(t) \langle H_u(\psi(t, u), x(t, u_{v,\chi}), u(t), t), v(t) - u(t)\rangle \, dt.$$

Зафиксируем функцию $\chi(t)$, заменим неизвестную траекторию $x(t, u_{v,\chi})$ функциональным параметром $x(t)$ (абсолютно непрерывная вектор-функция) и сформулируем задачу поиска вспомогательного управления $v(t)$

$$\int_T \chi(t) \langle H_u(\psi(t, u), x(t), u(t), t), v(t)\rangle \, dt \to \max, \quad v \in V.$$

Ее решение независимо от χ имеет вид

$$v^*(t, x(t)) = u^*(\psi(t, u), x(t), t), \quad t \in T.$$

Введем неотрицательную функцию

$$g(t, x(t)) = \langle H_u(\psi(t, u), x(t), u(t), t), v^*(t, x(t)) - u(t)\rangle$$

и поставим задачу на поиск функции варьирования $\chi(t)$

$$\int_T \chi(t) g(t, x(t)) \, dt \to \max, \quad \chi \in \mathcal{X}_\alpha^{(p)} \quad (p = 2, \infty). \tag{16}$$

Здесь $\mathcal{X}_\alpha^{(p)}$ — множество функций варьирования с нормирующим параметром $\alpha \in (0, 1]$, которое определено формулой (3).

Для $p = \infty$ решение этой вспомогательной задачи имеет простейший вид $\chi(t, \alpha) = \alpha$, $t \in T$, и определяет α-параметрическое семейство управлений варьирования

$$u(t, x, \alpha) = u(t) + \alpha(v^*(t, x) - u(t)). \tag{17}$$

Это решение единственно при условии $g(t, x(t)) > 0$, $t \in T$, невырожденности задачи (16).

Для $p = 2$ решение вспомогательной задачи при условии невырожденности выражается следующим образом (см. формулу (9)):

$$\chi(t, x(t), \alpha) = \begin{cases} \dfrac{g(t, x(t))}{\lambda(x, \alpha)}, & g(t, x(t)) < \lambda(x, \alpha); \\ 1, & g(t, x(t)) \ge \lambda(x, \alpha). \end{cases}$$

Здесь множитель Лагранжа $\lambda(x, \alpha) \ge 0$ обеспечивает условие нормировки

$$\int_T \chi^2(t, x(t), \alpha) \, dt = \alpha^2 (t_1 - t_0).$$

Соответствующее семейство варьированных управлений формируется в виде

$$u(t, x, \alpha) = u(t) + \chi(t, x, \alpha)(v^*(t, x) - u(t)). \tag{18}$$

Далее находим решение $x_\alpha(t)$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, u(t, x, \alpha), t), \quad x(t_0) = x^0 \tag{19}$$

вместе с порождающим управлением $u_\alpha(t) = u(t, x_\alpha(t), \alpha)$, $t \in T$. Положим

$$v_\alpha(t) = v^*(t, x_\alpha(t)), \quad g_\alpha(t) = g(t, x_\alpha(t)), \quad \lambda_\alpha = \lambda(x_\alpha, \alpha), \quad \chi_\alpha(t) = \chi(t, x_\alpha(t), \alpha).$$

Тогда управление $u_\alpha(t)$, $\alpha \in (0, 1]$, определяется по одной из формул

$$u_\alpha(t) = u(t) + \alpha(v_\alpha(t) - u(t)), \quad t \in T \quad (p = \infty); \tag{20}$$

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} u(t) + \dfrac{g_\alpha(t)}{\lambda_\alpha}(v_\alpha(t) - u(t)), & g_\alpha(t) < \lambda_\alpha; \\ v_\alpha(t), & g_\alpha(t) \geq \lambda_\alpha \end{cases} \quad (p = 2). \tag{21}$$

При этом квазивариация функционала принимает значение $\delta_1\Phi(u, u_\alpha) = -\int\limits_T \chi_\alpha(t) g_\alpha(t)\, dt$, а функция $\chi_\alpha(t)$, $t \in T$, является решением задачи

$$\int_T \chi(t) g_\alpha(t)\, dt \to \max, \quad \chi \in \mathcal{X}_\alpha^{(p)}. \tag{22}$$

Таким образом, для $p = \infty$ имеет место представление

$$\delta_1\Phi(u, u_\alpha) = -\alpha \int_T g_\alpha(t)\, dt,$$

для $p = 2$ справедлива оценка уменьшения ($\chi(t) = \alpha$ — допустимая функция задачи (22))

$$\delta_1\Phi(u, u_\alpha) \leq -\alpha \int_T g_\alpha(t)\, dt. \tag{23}$$

Введем обозначение $\delta_1(u, \alpha) = \int\limits_T g_\alpha(t)\, dt$. Отметим, что $\delta_1(u, \alpha) \geq 0$, и установим связь этой величины с невязкой ДПМ $\delta_0(u)$.

Лемма. *Справедлива оценка близости*

$$|\delta_1(u, \alpha) - \delta_0(u)| \leq C\alpha, \quad C = \mathrm{const}\,.$$

Доказательство. Согласно определению имеем

$$\begin{aligned} \delta_1(u, \alpha) - \delta_0(u) = \int_T \langle H_u(\psi(t, u), x_\alpha(t), u(t), t), v_\alpha(t) - u(t)\rangle\, dt - \\ - \int_T \langle H_u(\psi(t, u), x(t, u), u(t), t), \overline{u}(t) - u(t)\rangle\, dt = \\ = \int_T \langle H_u[t, u, \alpha], v_\alpha(t) - u(t)\rangle\, dt - \int_T \langle H_u[t, u], \overline{u}(t) - u(t)\rangle\, dt. \end{aligned}$$

С учетом условия максимума для управления $\overline{u}(t)$ получаем $\langle H_u[t, u], \overline{u}(t)\rangle \geq \langle H_u[t, u], v_\alpha(t)\rangle$, $t \in T$. Следовательно, имеет место неравенство

$$\delta_1(u, \alpha) - \delta_0(u) \leq \int_T \langle H_u[t, u, \alpha] - H_u[t, u], v_\alpha(t) - u(t)\rangle\, dt. \tag{24}$$

Вследствие ограниченности множества U имеем $\|\Delta_\alpha u(t)\| = \|v_\alpha(t) - u(t)\| \leq C_1$, $t \in T$. Кроме того, в силу оценок (12), (14) приходим к заключению относительно фазового приращения $\|\Delta_\alpha x(t)\| = \|x_\alpha(t) - x(t, u)\| \leq C_2\alpha$, $t \in T$. Далее, в рамках предположения 2) для задачи (1) вектор-функция $H_u(\psi(t, u), x, u(t), t)$ имеет непрерывную производную по x на $T \times X$. Следовательно, выполняется условие Липшица $\|H_u[t, u, \alpha] - H_u[t, u]\| \leq C_3\|x_\alpha(t) - x(t, u)\|$. В результате на основании неравенства (24) получаем первую оценку

$$\delta_1(u, \alpha) - \delta_0(u) \leq C_1C_2C_3(t_1 - t_0)\alpha = C\alpha. \tag{25}$$

Рассмотрим теперь разность $\delta_0(u)-\delta_1(u,\alpha)$ и используем условие максимума для управления $v_\alpha(t)$

$$\langle H_u[t,u,\alpha], v_\alpha(t)\rangle \geq \langle H_u[t,u,\alpha], \overline{u}(t)\rangle, \quad t \in T.$$

Это приводит к неравенству

$$\delta_0(u) - \delta_1(u,\alpha) \leq \int_T \langle H_u[t,u] - H_u[t,u,\alpha], \overline{u}(t) - u(t)\rangle\, dt.$$

Дальнейший вывод проводится аналогично предыдущему. В итоге получаем вторую оценку $\delta_0(u) - \delta_1(u,\alpha) \leq C\alpha$, что вместе с (25) приводит к утверждению леммы.

Сформулируем основной результат о возможности улучшения управления $u(t)$ в рамках процедур варьирования (20), (21).

Теорема. *Если управление $u \in V$ не удовлетворяет ДПМ в задаче* (1), *то* $\Phi(u_\alpha) < \Phi(u)$ *для малых* $\alpha > 0$.

Доказательство. Согласно аппроксимационной формуле (15), с учетом оценки уменьшения (23) получаем $\Phi(u_\alpha) - \Phi(u) = \delta_1\Phi(u,u_\alpha) + \eta_1 \leq -\alpha\delta_1(u,\alpha) + \eta_1$, где

$$\eta_1 = o_\varphi(\|\Delta_\alpha x(t_1)\|) - \int_T o_H(\|\Delta_\alpha x(t)\|)\, dt - \int_T o_H^{(1)}(\|\Delta_\alpha u(t)\|)\, dt.$$

Используя оценочные соотношения из § 1, приходим к заключению о порядке остаточного члена $\eta_1 = o(\alpha)$.

Далее применяем лемму

$$\Phi(u_\alpha) - \Phi(u) \leq -\alpha\delta_0(u) + \alpha(\delta_0(u) - \delta_1(u,\alpha)) + o(\alpha) = -\alpha\delta_0(u) + o_1(\alpha).$$

Поскольку $\delta_0(u) > 0$, то получаем утверждение теоремы о локальном улучшении.

Отметим, что возможности улучшения расширяются для билинейной задачи. В этом случае аппроксимация (15) является точной ($\eta_1 = 0$), поэтому

$$\Phi(u_\alpha) - \Phi(u) \leq -\alpha\delta_1(u,\alpha) \leq 0, \quad \alpha \in (0,1].$$

Это значит, что квазиградиентные процедуры (20), (21) в билинейной задаче обеспечивают нелокальное улучшение: для любого $\alpha \in (0,1]$ управление u_α не хуже по функционалу, чем исходное управление u.

Далее, отметим вторую особенность квазиградиентных процедур (20), (21). Управление $u(t,x,\alpha)$ (формулы (17), (18)) является, вообще говоря, кусочно-непрерывной вектор-функцией по переменной x (за счет $v^*(t,x)$). Следовательно, фазовая система (19), замкнутая этим управлением, также является разрывной относительно состояния x. Тем самым на поверхностях разрыва появляется возможность неединственного решения $x_\alpha(t)$, что является необходимым условием для улучшения управлений, удовлетворяющих ДПМ в задаче (1).

В этой связи охарактеризуем стационарные ситуации с позиций квазиградиентных процедур улучшения.

Пусть $u(t), t \in T,$ — стационарное управление (в смысле ДПМ), т. е. $\delta_0(u) = 0$. Это значит, что $u(t) = v^*(t,x(t,u))$, $u_\alpha(t) = u(t)$, $x_\alpha(t) = x(t,u)$, $t \in T$, $\alpha \in (0,1]$. Таким образом, стационарный процесс $\{u(t), x(t,u)\}$ является решением задачи Коши (19) для любого $\alpha \in (0,1]$. При этом улучшение возможно, если система (19) имеет другое решение $\{v_\alpha(t), y_\alpha(t)\}$ с условием

$$\delta_1(u,\alpha) = \int_T g(t, y_\alpha(t))\, dt > 0,$$

которое, например, для билинейных задач гарантирует свойство улучшения стационарного управления.

Приведем соответствующую иллюстрацию.

Пример 2 (улучшение стационарного, неособого управления).

$$\Phi(u) = -x(2) + 2\int_0^2 x(2-3u)\,dt \to \min,$$
$$\dot{x} = 2(u-1)t, \quad x(0) = 1, \quad u(t) \in [0,1], \quad t \in [0,2].$$

В данном случае $H = 2\psi(u-1)t - 2x(2-3u)$, сопряженное уравнение $\dot{\psi} = 2(2-3u)$, $\psi(2) = 1$, максимизирующее управление

$$u^*(\psi, x, t) = \begin{cases} 0, & H_u(\psi, x, t) < 0; \\ 1, & H_u(\psi, x, t) > 0, \end{cases}$$

причем $H_u = 2\psi t + 6x$.

Рассмотрим управление

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1; \\ 0, & 1 < t \le 2. \end{cases}$$

Ему соответствуют траектории

$$x(t,u) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1; \\ 2 - t^2, & 1 \le t \le 2, \end{cases} \quad \psi(t,u) = \begin{cases} -2t - 1, & 0 \le t \le 1; \\ 4t - 7, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что данное управление строго удовлетворяет ДПМ с особой точкой $t = 1$ (точка переключения).

Применим процедуру улучшения (20). Сформируем управление

$$u(t,x,\alpha) = \begin{cases} 1 + \alpha(v^*(t,x) - 1), & 0 \le t \le 1; \\ \alpha v^*(t,x), & 1 < t \le 2, \end{cases}$$

где $v^*(t,x) = u^*(\psi(t,u), x, t)$. При этом

$$H_u(\psi(t,u), x, t) = H_u[t,x] = \begin{cases} -4t^2 - 2t + 6x, & 0 \le t \le 1; \\ 8t^2 - 14t + 6x, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Решим фазовое уравнение

$$\dot{x} = 2(u(t,x,\alpha) - 1)t, \quad x(0) = 1. \tag{26}$$

Для $t \in [0,1)$ решение $x_\alpha(t)$ единственно и совпадает с $x(t,u)$: $x_\alpha(t) = x(t,u)$, $H_u[t, x_\alpha(t)] > 0$, $v_\alpha(t) = 1$, $u_\alpha(t) = u(t)$.

При $t = 1$ траектория $x_\alpha(t)$ попадает на линию разрыва управления $u(t,x,\alpha)$: $H_u[1, x_\alpha(1)] = 0$ и появляется возможность неединственного решения.

Рассмотрим два неособых случая для $t > 1$:

$$1)\;\; H_u[t, x_\alpha(t)] < 0, \quad 2)\;\; H_u[t, x_\alpha(t)] > 0.$$

В первом случае реализуется исходный процесс

$$v_\alpha(t) = 0, \quad u_\alpha(t) = u(t), \quad x_\alpha(t) = x(t,u).$$

Вторая ситуация приводит к альтернативному решению

$$v_\alpha(t) = 1, \quad u_\alpha(t) = \alpha, \quad x_\alpha(t) = (\alpha - 1)t^2 + 2 - \alpha.$$

Проверим условие 2). В данном случае

$$H_u[t, x_\alpha(t)] = 8t^2 - 14t + 6x_\alpha(t) = (2 + 6\alpha)t^2 - 14t + 12 - 6\alpha,$$

причем $H_u[1, x_\alpha(1)] = 0$. Точка минимума параболы $t_*(\alpha) = \frac{7}{2+6\alpha}$. Для обеспечения условия 2) потребуем, чтобы $t_*(\alpha) \le 1$. Тогда $\alpha \ge 5/6$ и условие 2) выполняется, т. е. процесс $\{u_\alpha(t), x_\alpha(t)\}$ действительно является решением фазового уравнения (26).

Таким образом, для $\alpha \in [5/6, 1]$ уравнение (26) на отрезке $[0, 2]$ наряду с $\{u(t), x(t, u)\}$ имеет решение $\{u_\alpha(t), x_\alpha(t)\}$, где

$$u_\alpha(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1; \\ \alpha, & 1 < t \le 2, \end{cases} \quad x_\alpha(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1; \\ (\alpha - 1)t^2 + 2 - \alpha, & 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Проверим свойство улучшения. По определению $g_\alpha(t) = H_u[t, x_\alpha(t)](v_\alpha(t) - u(t))$, $t \in [0, 2]$, причем

$$H_u[t, x_\alpha(t)] > 0, \quad v_\alpha(t) - u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1; \\ 1, & 1 < t \le 2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\delta_1(u, \alpha) = \int_0^2 g_\alpha(t)\, dt = \int_1^2 H_u[t, x_\alpha(t)]\, dt > 0.$$

Рассматриваемая задача является билинейной, поэтому $\Phi(u_\alpha) - \Phi(u) = -\alpha\delta_1(u, \alpha) < 0$, $\alpha \in [5/6, 1]$. Таким образом, модифицированная процедура (20) позволяет улучшить стационарное, неособое управление $u(t)$. Стандартный метод условного градиента (5) таким свойством не обладает.

Пример 3 (улучшение особого управления).

$$\Phi(u) = -\int_0^1 u x_2\, dt \to \min,$$
$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2, \quad x_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad |u| \le 1.$$

Функция Понтрягина: $H = \psi_1 u + \psi_2(x_1 + x_2) + u x_2$. Сопряженная система: $\dot{\psi}_1 = -\psi_2$, $\dot{\psi}_2 = -\psi_2 - u$, $\psi_1(1) = 0$, $\psi_2(1) = 0$. Максимизирующее управление: $u^* = \mathrm{sign}(\psi_1 + x_2)$.

Рассмотрим управление $u(t) = 0$ с траекториями

$$x_i(t, u) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \psi_1(t, u) = 0, \quad \psi_2(t, u) = 0.$$

Это особое управление, т. к. $H_u(\psi(t, u), x(t, u)) = 0$.

Будем использовать по-прежнему процедуру (20). В данном случае

$$u(t, x, \alpha) = \alpha v^*(t, x), \quad v^*(t, x) = \mathrm{sign}\, x_2 \quad (\mathrm{sign}\, 0 \in [-1, 1]).$$

Проведем конкретизацию особого случая, когда $x_2(t) = 0$, $t \in T_0 \subset T$. При этом

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) = 0 \Rightarrow x_1(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}_1(t) = u(t) = 0, \quad t \in T_0.$$

Итак, управление $u(t) = 0$ порождает особый режим $x_2(t) = 0$ $(\mathrm{sign}\, 0 = 0)$.

Найдем решение фазовой системы

$$\dot{x}_1 = \alpha\, \mathrm{sign}\, x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0.$$

Понятно, что имеется особое решение $x_1(t) = x_2(t) = 0$ с порождающим управлением $u(t) = 0$.

Проверим возможность неособого решения. Предположим, что $x_2(t) > 0$, $t \in (0, 1]$. Тогда $x_1(t) = \alpha t$, $\dot{x}_2 = \alpha t + x_2$, $x_2(0) = 0 \Rightarrow x_2(t) = \alpha(e^t - t - 1)$. При этом предположение выполняется: $x_2(t) > 0$ для $\alpha \in (0, 1]$, т. е. фазовая система имеет ненулевое решение

$$x_1^\alpha(t) = \alpha t, \quad x_2^\alpha(t) = \alpha(e^t - t - 1), \quad t \in [0, 1],$$

с соответствующим управлением $u_\alpha(t) = \alpha$, $\alpha \in (0, 1]$.

Кроме того, имеет место свойство улучшения $\Phi(u_\alpha) = -\alpha \int\limits_0^1 x_2^\alpha(t)\, dt < 0 = \Phi(0)$. Итак, модификация (20), в отличие от стандартного варианта (5), может улучшать особые управления.

Представим процедуры (20), (21) в итерационной форме и обсудим вопрос о сходимости последовательных приближений применительно к билинейной задаче.

Пусть $k = 0, 1, 2, \ldots$ — номер итерации, $u^k(t)$ — управление на k-й итерации, $u^k_\alpha(t)$ — семейство управлений варьирования, построенных в соответствии с формулами (20), (21) (либо – либо). Зафиксируем параметр $\alpha \in (0, 1]$, выделим следующее приближение $u^{k+1}(t) = u^k_\alpha(t)$, $t \in T$, и возьмем за основу нелокальную оценку уменьшения целевого функционала

$$\Phi(u^{k+1}) - \Phi(u^k) \leq -\alpha\delta_1(u^k, \alpha).$$

Здесь $\delta_1(u^k, \alpha) \geq 0$ — модифицированная невязка ДПМ на управлении u^k.

В силу ограниченности множества допустимых процессов $\{u(t), x(t, u)\}$, $u \in V$, функционал $\Phi(u)$ ограничен снизу на множестве V. Следовательно, монотонная последовательность $\{\Phi(u^k)\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, является сходящейся, поэтому $\Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1}) \to 0$, $k \to \infty$. Поскольку в силу предыдущей оценки

$$\delta_1(u^k, \alpha) \leq \frac{\Phi(u^k) - \Phi(u^{k+1})}{\alpha},$$

то получаем сходимость методов (20), (21) по модифицированной невязке ДПМ: $\delta_1(u^k, \alpha) \to 0$, $k \to \infty$.

В заключение представим модификацию (21) в реализуемой форме, когда в качестве параметра варьирования используется множитель Лагранжа.

Образуем семейство управлений варьирования ($\lambda > 0, x \in R^n$)

$$u(t, x, \lambda) = \begin{cases} u(t) + \dfrac{g(t, x)}{\lambda}(v^*(t, x) - u(t)), & g(t, x) < \lambda; \\ v^*(t, x), & g(t, x) \geq \lambda. \end{cases}$$

Найдем решение $x_\lambda(t)$ фазовой системы

$$\dot{x} = f(x, u(t, x, \lambda), t), \quad x(t_0) = x^0$$

вместе с управлением $u_\lambda(t) = u(t, x_\lambda(t), \lambda)$. Задача поиска параметра $\lambda > 0$ определяется условием улучшения $\Phi(u_\lambda) \leq \Phi(u)$.

Литература

1. Срочко В.А. *Итерационные методы решения задач оптимального управления.* – М.: Физматлит, 2000. – 160 с.
2. Срочко В.А., Мамонова Н.В. *Итерационные процедуры решения задач оптимального управления на основе квазиградиентных аппроксимаций* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 12. – С. 55–67.
3. Федоренко Р.П. *Приближенное решение задач оптимального управления.* – М.: Наука, 1978. – 487 с.
4. Васильев О.В. *Лекции по методам оптимизации.* – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1994. – 344 с.
5. Тятюшкин А.И. *Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем.* – Новосибирск.: Наука, 1992. – 193 с.
6. Батурин В.А., Урбанович Д.Е. *Приближенные методы оптимального управления, основанные на принципе расширения.* – Новосибирск.: Наука, 1997. – 175 с.
7. Васильев Ф.П. *Методы оптимизации.* – М.: Факториал Пресс, 2002. – 824 с.

Иркутский государственный университет

Поступила
05.06.2002