И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2007 МАТЕМАТИКА № 6 (541)

УДК 517.518

Б.В. СИМОНОВ

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА–ЛОРЕНЦА

1. Введение

Пусть Φ — совокупность неотрицательных на $[0,+\infty)$ почти возрастающих [1] функций (т. е. $\varphi(x_1) \le C_1\varphi(x_2)$ для любых $0 < x_1 < x_2 < +\infty$, а $C_1 > 0$ и не зависит от x_1, x_2), удовлетворяющих Δ_2-условию (т. е. $\varphi(2x) \le C_2\varphi(x)$ для любых $0 < x < +\infty$, а $C_2 > 0$ и не зависит от x); W — совокупность измеримых, неотрицательных почти всюду на $(0,2\pi)$ функций w. Пространством Орлича–Лоренца $\Lambda(\varphi,w)$, где $\varphi \in \Phi, w \in W$, называется множество 2π-периодических измеримых функций $f(x)$, для которых $\|f\|_{\varphi,w} = \int\limits_0^{2\pi} w(t)\varphi(f^*(t))dt < +\infty$, где $f^*(t)$ — невозрастающая на $[0,2\pi]$ функция, равноизмеримая с $|f|$.

Будем рассматривать тригонометрические ряды вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx. \tag{2}$$

Известна

Теорема Харди–Литтлвуда ([2], с. 657). *Пусть $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $a_n \ge a_{n+1}$ для всех n, где a_n — коэффициенты рядов* (1), (2), *а $f(x)$ и $g(x)$ — суммы этих рядов. Тогда при $p \in (1,\infty)$ справедливы неравенства*

$$C_1\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p (n+1)^{p-2}\Bigr)^{1/p} \le \Bigl(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\Bigr)^{1/p} \le C_2\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p (n+1)^{p-2}\Bigr)^{1/p},$$

$$C_3\Bigl(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2}\Bigr)^{1/p} \le \Bigl(\int_0^{2\pi} |g(x)|^p dx\Bigr)^{1/p} \le C_4\Bigl(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2}\Bigr)^{1/p},$$

где положительные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 не зависят от последовательности $\{a_n\}$.

Заметим, что все эти и нижеследующие неравенства понимаются таким образом: из конечности правой части следует конечность левой части. Далее $C_1, C_2, \dots$ — положительные постоянные, не обязательно одинаковые в различных формулах.

В [3] доказана

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00268).

Теорема. а) *Пусть $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} \geq 0$ для всех n.* Тогда для $p \in (0, \infty)$

$$C_1\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})^p(n+1)^{2p-2}\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\Big)^{1/p} \leq C_2\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1})^p(n+1)^{2p-2}\Big)^{1/p}.$$

б) *Пусть $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $a_n \geq a_{n+1}$ для всех n. Тогда для $p \in (0, \infty)$*

$$C_3\Big(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p n^{p-2}\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_0^{2\pi}|g(x)|^p dx\Big)^{1/p} \leq C_4\Big(\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p n^{p-2}\Big)^{1/p},$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 не зависят от последовательности $\{a_n\}$.

В данной работе устанавливаются условия, при которых суммы $f(x)$ и $g(x)$ тригонометрических рядов (1) и (2) соответственно с коэффициентами, монотонными по подпоследовательностям, принадлежат пространствам Орлича-Лоренца, а также оценки $\|f\|_{\varphi,w}$ и $\|g\|_{\varphi,w}$ через коэффициенты этих рядов.

Для целых неотрицательных чисел $s_1, \ldots, s_k$ и последовательности $\{a_n\}$ определим разности $\Delta_{1,s_1}a_n = a_n - a_{n+s_1}, \ldots, \Delta_{k,s_1,\ldots,s_k}a_n = \Delta_{1,s_k}(\Delta_{k-1,s_{k-1},\ldots,s_1}a_n)$. Если $s_1 = \cdots = s_k = s$, то будем обозначать $\Delta_{k,s_1,\ldots,s_k}a_n = \Delta_{k,s}a_n$. Заметим, что если $s_1 = \cdots = s_k = s = 1$, то

$$\Delta_{k,s_1,\ldots,s_k}a_n = \Delta_{k,1}a_n = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i a_{n+i} = \Delta_k a_n.$$

Сформулируем основные утверждения.

Утверждение 1. *Пусть $r \in N$, $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, где a_n — коэффициенты рядов* (1) *и* (2)*; $\varphi \in \Phi$, $w \in W$ и такова, что $\int\limits_0^\delta w_r(x)dx \leq C_1 \int\limits_{\delta/2}^{\delta} w_r(x)dx$ для любого $\delta \in (0, \frac{2\pi}{r})$, где $w_r(x) = \sum\limits_{m=0}^{r-1} w(x + m\frac{2\pi}{r})$, а C_1 не зависит от δ.*

а) *Если $\Delta_{1,r}a_n \geq 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, то*

$$\int_0^{2\pi} w(t)\varphi(g^*(t))dt \leq C_2\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\frac{2\pi}{(n+2)r}}^{\frac{2\pi}{(n+1)r}} w_r(t)dt\sum_{k=1}^{r}\varphi(a_{k+nr}(n+1)). \tag{3}$$

Если $\Delta_{1,r}a_n \geq 0$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$, то

$$\int_0^{2\pi} w(t)\varphi(f^*(t))dt \leq C_3\Big(\int_{\frac{\pi}{r}}^{\frac{2\pi}{r}} w_r(t)dt\varphi(a_0) + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\frac{2\pi}{(n+2)r}}^{\frac{2\pi}{(n+1)r}} w_r(t)dt\sum_{k=1}^{r}\varphi(a_{k+nr}(n+1))\Big). \tag{4}$$

б) *Если $\Delta_{2,r}a_n \geq 0$ для всех $n = 0, 1, \ldots$, $a_r \leq a_k \leq a_0$ для $0 \leq k \leq r$ и при $r > 2$ последовательность $\{a_n\}$ дополнительно удовлетворяет условию $\Delta_{1,r}(a_{r(n+1)-k} - a_{r(n+1)+k}) \geq 0$ для всех $n = 0, 1, \ldots$ и $k = 1, \ldots, [\frac{r-1}{2}]$, то*

$$\int_0^{2\pi} w(t)\varphi(f^*(t))dt \leq C_4\Big(\int_{\frac{\pi}{r}}^{\frac{2\pi}{r}} w_r(t)dt\varphi(a_0 - a_r) + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\frac{2\pi}{(n+2)r}}^{\frac{2\pi}{(n+1)r}} w_r(t)dt \times$$

$$\times\Big(\sum_{k=1}^{r}\varphi((n+1)^2\Delta_{1,r}a_{k+nr}) + \Big[\frac{r-1}{2}\Big]\sum_{k=1}^{[\frac{r-1}{2}]}\varphi((n+1)(a_{r(n+1)-k} - a_{r(n+1)+k}))\Big)\Big), \tag{5}$$

где C_2, C_3, C_4 не зависят от $\{a_n\}$, $[a]$ — целая часть числа a.

Утверждение 2. *Пусть* $r \in N$, $a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *где* a_n — *коэффициенты рядов* (1) *и* (2); $\varphi \in \Phi$, $w \in W$ *и такова, что либо* $w(t) = 0$ *при почти всех (п. в.)* $t \in [\pi 2^{-12-2r}, 2\pi]$, *либо* $\int\limits_0^{\pi 2^{-12-2r}} w(t)dt > 0$.

а) *Если* $\Delta_{1,r} a_n \geq 0$ *для всех* $n = 1, 2, \dots,$ *то*

$$\int_0^{2\pi} w(t)\varphi(g^*(t))dt \geq C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{2\pi}{(n+2)r}}^{\frac{2\pi}{(n+1)r}} w(t)dt \sum_{k=1}^{r} \varphi(a_{k+nr}(n+1)). \tag{6}$$

б) *Если* $\Delta_{2,r} a_n \geq 0$ *для всех* $n = 0, 1, \dots,$ $2(a_0 - a_r) \geq \sum\limits_{m=0}^{r-1} \Delta_{1,r} a_m$ *и при* $r > 2$ *последовательность* $\{a_n\}$ *дополнительно удовлетворяет условию* $\Delta_{1,r}(a_{r(n+1)-k} - a_{r(n+1)+k}) \geq 0$ *для всех* $n = 0, 1, \dots$ *и* $k = 1, \dots, [\frac{r-1}{2}]$, *то*

$$\int_0^{2\pi} w(t)\varphi(f^*(t))dt \geq C_2 \Bigg(\int_{\frac{\pi}{r}}^{\frac{2\pi}{r}} w(t)dt\varphi(a_0 - a_r) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{2\pi}{(n+2)r}}^{\frac{2\pi}{(n+1)r}} w(t)dt \times$$

$$\times \left(\sum_{k=1}^{r} \varphi((n+1)^2 \Delta_{1,r} a_{k+nr}) + \left[\frac{r-1}{2}\right] \sum_{k=1}^{[\frac{r-1}{2}]} \varphi((n+1)(a_{r(n+1)-k} - a_{r(n+1)+k})) \right) \Bigg), \tag{7}$$

где C_1, C_2 *не зависят от* $\{a_n\}$.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $r \in N$, $k = 1, \dots, r$, $n = 0, 1, 2, \dots,$

$$BC^0_{0,r,0}(x) = \frac{1}{2}, \quad BC^0_{n+1,r,0}(x) = \cos(n+1)rx,$$

$$BC^0_{n,r,k} = \cos(k+nr)x, \quad BC^1_{n,r,l}(x) = \sum_{m=0}^{n} BC^0_{m,r,l}(x), \quad l = 0, 1, \dots, r,$$

$$B^0_{0,r,k}(x) = \frac{\sin((2k-r)x/2)}{2\sin(rx/2)}, \quad x \neq 2m\pi/r, \quad m \in Z,$$

$$B^0_{n+1,r,k}(x) = \cos(k+nr)x, \quad B^1_{n,r,k}(x) = \sum_{m=0}^{n} B^0_{m,r,k}(x),$$

$$B^2_{n,r,k}(x) = \sum_{m=0}^{n} B^1_{m,r,k}(x), \quad B^1_{n,r}(x) = \sum_{m=0}^{n} \cos(2m+1)rx/2,$$

$$B^2_{n,r}(x) = \sum_{m=0}^{n} B^1_{m,r}(x), \quad \overline{B}^1_{n+1,r,k}(x) = \sum_{m=0}^{n} \sin(k+mr)x.$$

Лемма 1 ([4]). *Пусть* $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots,$ $1 \leq p < \infty$. *Тогда*

а) *если* $\sum\limits_{m=n}^{\infty} a_m = a_n \beta_n$, $n = 1, 2, \dots,$ *то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\sum_{m=1}^{k} b_m \right)^p \leq p^p \sum_{m=1}^{\infty} a_m (\beta_m b_m)^p;$$

б) *если* $\sum\limits_{m=1}^{n} a_m = a_n \beta_n$, $n = 1, 2, \dots,$ *то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\sum_{m=k}^{\infty} b_m \right)^p \leq p^p \sum_{m=1}^{\infty} a_m (\beta_m b_m)^p.$$

Лемма 2 ([5], сс. 66, 125). *Пусть* $a \ge 0$, $b \ge 0$, $a_n \ge 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 < \alpha \le \beta < \infty$. *Тогда* $\Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}\Big)^{1/\alpha} \le \Big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{\beta}\Big)^{1/\beta}$, $C_1(\alpha)(a^\alpha + b^\alpha) \le (a+b)^\alpha \le C_2(\alpha)(a^\alpha + b^\alpha)$.

Лемма 3. *Пусть* $\varphi \in \Phi$, $a_n \ge 0$, $b_n \ge 0$, $n = 1, 2, \ldots$ *Тогда*

1) *найдется число* $p > 0$ *такое, что для любых* $0 < x < y < \infty$ *справедливо неравенство* $\varphi(x)/x^p \ge C_1\varphi(y)/y^p$, *где* C_1 *не зависит от* x, y;

2) $\varphi(x+y) \le C_2(\varphi(x) + \varphi(y))$ *для любых* $x \ge 0$, $y \ge 0$, *где* C_2 *не зависит от* x, y;

3) *если* $\sum\limits_{m=n}^{\infty} a_m \le C_3 a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *где* C_3 *не зависит от* n, *то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi\Big(\sum_{m=1}^{k} b_m\Big) \le C_4 \sum_{m=1}^{\infty} a_m \varphi(b_m),$$

где C_4 *не зависит от* $\{b_n\}$;

4) *если* $\sum\limits_{m=1}^{n} a_m \le C_5 a_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *где* C_5 *не зависит от* n, *то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi\Big(\sum_{m=k}^{\infty} b_m\Big) \le C_6 \sum_{m=1}^{\infty} a_m \varphi(b_m),$$

где C_6 *не зависит от* $\{b_n\}$.

Доказательство. Докажем случай 1). Так как $\varphi \in \Phi$, то для любого $x > 0$ справедливо неравенство $\varphi(2x) \le C_7\varphi(x)$, где $C_7 > 1$ не зависит от x. Возьмем $p = \log_2 C_7$. Нетрудно проверить, что для этого p выполнено неравенство из случая 1).

Доказательство случая 2) следует из свойств, которыми обладают функции из класса Φ в соответствии с его определением.

Докажем случай 3). Из 1) для $0 < x_1 < x_2 < \infty$ имеем

$$\varphi^{1/p}(x_1)/x_1 = (\varphi(x_1)/x_1^p)^{1/p} \ge C_1^{1/p}(\varphi(x_2)/x_2^p)^{1/p} = C_1^{1/p}\varphi^{1/p}(x_2)/x_2. \tag{8}$$

Обозначим $\varphi^{1/p}(x)/x = f(x)$, $\varphi^{1/p}(x) = xf(x)$. В силу (8) для $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$ получим $f\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k\Big) \le C_1^{1/p} f(b_m)$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Тогда $b_m f\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k\Big) \le C_1^{1/p} b_m f(b_m)$ $(m = 1, 2, \ldots)$, $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m f\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k\Big) \le C_1^{1/p} \sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m f(b_m)$. Таким образом,

$$\varphi^{1/p}\Big(\sum_{m=1}^{\infty} b_k\Big) \le C_1^{1/p} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{1/p}(b_k). \tag{9}$$

В силу (9) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi\Big(\sum\limits_{m=1}^{k} b_m\Big) \le C_1 \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_m \Big(\sum\limits_{m=1}^{k} \varphi^{1/p}(b_m)\Big)^p$. Далее, применяя лемму 1 в случае $1 \le p < \infty$ или лемму 2 в случае $0 < p < 1$, получаем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \varphi\Big(\sum\limits_{m=1}^{k} b_m\Big) \le C_{10} \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m \varphi(b_m)$, где C_{10} не зависит от $\{b_n\}$.

Аналогично рассматривается случай 4). □

Лемма 4 ([6], с. 93). *Пусть* f *и* g — *почти везде конечные измеримые на* $[0, 2\pi]$ *функции. Тогда* $(f+g)^*(t_1+t_2) \le f^*(t_1) + f^*(t_2)$, $(fg)^*(t_1+t_2) \le f^*(t_1)f^*(t_2)$.

Лемма 5 ([6], с. 88). *Если* $|f(t)| \le |g(t)|$, *то* $f^*(t) \le g^*(t)$.

Лемма 6. *Пусть* $s_1, s_2, \ldots, s_k \in N$, $a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$ *и* $\Delta_{k,s_k,\ldots,s_1} a_n \ge 0$ *для всех* n. *Тогда* $\Delta_{i,s_i,\ldots,s_1} a_n \ge 0$ $(i = 1, \ldots, k-1)$, $a_n \ge 0$ *для всех* n.

Доказательство следует из определения $\Delta_{k,s_k,\ldots,s_1} a_n$ и того, что $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Лемма 7. *Пусть $k,t \in N$, $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Если $\Delta_{2,t,k}a_n \geq 0$ для всех n, то $\Delta_{2,tk}a_n \geq 0$ для всех n.*

Доказательство следует из леммы 6, т. к. $\Delta_{2,tk}a_n = \sum\limits_{m=0}^{k-1}\sum\limits_{s=0}^{t-1}\Delta_{1,t}(\Delta_{1,k}a_{n+sk+mt})$.

Лемма 8. *Пусть $r \in N$, $m = 0,1,\dots,r-1$, $k = 1,\dots,r$. Тогда для почти всех x*

$$\sum_{k=1}^{r}\cos\left(km\frac{2\pi}{r}\right)\frac{\sin((2k-r)\frac{x}{2})}{2\sin(r\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Пусть r — нечетное число и $r > 1$ (при $r = 1$ равенство очевидно). Тогда для почти всех x имеем

$$\sum_{k=1}^{r}\cos\left(km\frac{2\pi}{r}\right)\frac{\sin((2k-r)\frac{x}{2})}{2\sin(r\frac{x}{2})} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\frac{r-1}{2}}\cos\left(km\frac{2\pi}{r}\right)\frac{\sin((2k-r)\frac{x}{2})}{2\sin(r\frac{x}{2})} +$$

$$+\sum_{k=\frac{r-1}{2}+1}^{r-1}\cos\left(km\frac{2\pi}{r}\right)\frac{\sin((2k-r)\frac{x}{2})}{2\sin(r\frac{x}{2})} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\frac{r-1}{2}}\cos\left(km\frac{2\pi}{r}\right)\frac{\sin((2k-r)\frac{x}{2})}{2\sin(r\frac{x}{2})} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\frac{r-1}{2}}\cos\left(\left(k+\frac{r-1}{2}\right)m\frac{2\pi}{r}\right)\frac{\sin((2k-1)\frac{x}{2})}{2\sin(r\frac{x}{2})} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\frac{r-1}{2}}\left(\cos\left(\left(k+\frac{r-1}{2}\right)m\frac{2\pi}{r}\right) -\right.$$

$$\left.-\cos\left(\left(-k+\frac{r+1}{2}\right)m\frac{2\pi}{r}\right)\right)\frac{\sin((2k-1)\frac{x}{2})}{2\sin(r\frac{x}{2})} =$$

$$= \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\frac{r-1}{2}}\sin\pi\sin\left((2k-1)m\frac{\pi}{r}\right)\frac{\sin((2k-1)\frac{x}{2})}{\sin(r\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}.$$

Аналогично проверяется утверждение леммы 8 для четных r. □

Лемма 9. *Пусть $r \in N$, $k = 1,\dots,r$, $n = 0,1,\dots$ Тогда*
а) *для п. в. x*

$$BC^1_{n,r,0}(x) = \frac{\sin((2n+1)r\frac{x}{2})}{2\sin(r\frac{x}{2})},$$

$$BC^1_{n,r,k}(x) = \frac{\sin((2k+(2n+1)r)\frac{x}{2}) - \sin((2k-r)\frac{x}{2})}{2\sin(r\frac{x}{2})},$$

$$B^1_{n,r,k}(x) = \frac{\sin((2k+(2n-1)r)\frac{x}{2})}{2\sin(r\frac{x}{2})},$$

$$B^2_{n,r,k}(x) = \frac{\sin^2((k+nr)\frac{x}{2}) - \sin^2((k-r)\frac{x}{2})}{2\sin^2(r\frac{x}{2})},$$

$$B^1_{n,r}(x) = \frac{\sin((n+1)rx)}{2\sin(r\frac{x}{2})},$$

$$B^2_{n,r}(x) = \frac{\cos(r\frac{x}{2}) - \cos((2n+3)r\frac{x}{2})}{4\sin^2(r\frac{x}{2})},$$

$$\overline{B}^1_{n+1,r,k}(x) = \frac{\cos((2k-r)\frac{x}{2}) - \cos((2k+(2n+1)r)\frac{x}{2})}{2\sin(r\frac{x}{2})};$$

б) *для любого $x \in (0,\frac{\pi}{r})$*

$$|BC^1_{n,r,l}(x)| \leq \frac{C_1}{rx}, \quad l = 0,1,\dots,r-1,$$

$$|B^2_{n,r,k}(x)| \le \frac{C_2}{(rx)^2}, \quad |\overline{B}^1_{n+1,r,k}(x)| \le \frac{C_3}{rx},$$
$$|B^1_{n,r}(x)| \le \frac{C_4}{rx}, \quad |B^2_{n,r}(x)| \le \frac{C_5}{(rx)^2};$$

в) для любого x

$$|BC^1_{n,r,k}(x)| \le n+1, \quad |\overline{B}^1_{n+1,r,k}(x)| \le n+1,$$
$$|B^2_{n,r,k}(x)| \le C_6(n+1)^2, \quad |B^1_{n,r}(x)| \le n+1,$$

и для п. в. x

$$|B^2_{n,r}(x)| \le C_7(n+1)^2,$$

где $C_1, \dots, C_7$ *не зависят от* x *и* n.

Доказательство. В пункте а) для п. в. x имеем

$$BC_{n,r,k}(x) = \sum_{m=0}^{n} \cos\left(2(k+mr)\frac{x}{2}\right)\frac{\sin(r\frac{x}{2})}{\sin(r\frac{x}{2})} = \frac{\sin((2k+(2n+1)r)\frac{x}{2}) - \sin((2k-r)\frac{x}{2})}{2\sin(r\frac{x}{2})}.$$

Остальные равенства п. а) доказываются аналогично. Доказательство неравенств п. б) следует из представлений п. а). Неравенства п. в) непосредственно следуют из определения функций $BC^1_{n,r,k}(x)$, $B^2_{n,r,k}(x)$, $\overline{B}^1_{n,r,k}(x)$, $B^1_{n,r}(x)$, $B^2_{n,r}(x)$. $\square$

Скажем, что последовательность $\{a_n\}$ сохраняет знак, если $a_n \ge 0$ для всех n или $a_n \le 0$ для всех n.

Лемма 10. *Пусть* $r \in N$, $k = 1, \dots, r$, $m = 0, 1, \dots, r-1$.

а) *Если последовательность* $\{\Delta_{1,r}a_{k+nr}\}$ *сохраняет знак отдельно для каждого* k, *то ряды* (1) *и* (2) *сходятся для п. в.* x.

Функция $f(x + m\frac{2\pi}{r})$ ($f(x)$ — *сумма ряда* (1)) *может быть почти всюду представлена в виде*

$$f\left(x + m\frac{2\pi}{r}\right) = \sum_{k=0}^{r-1} \cos\left(km\frac{2\pi}{r}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{1,r}a_{k+nr} BC^1_{n,r,k}(x) -$$
$$- \sum_{k=1}^{r-1} \sin\left(km\frac{2\pi}{r}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{1,r}a_{k+nr} \overline{B}^1_{n+1,r,k}(x).$$

Функция $g(x + m\frac{2\pi}{r})$ ($g(x)$ — *сумма ряда* (2)) *может быть почти всюду представлена в виде*

$$g\left(x + m\frac{2\pi}{r}\right) = \sum_{k=1}^{r} \cos\left(km\frac{2\pi}{r}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{1,r}a_{k+nr} \overline{B}^1_{n+1,r,k}(x) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{r-1} \sin\left(km\frac{2\pi}{r}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{1,r}a_{k+nr} BC^1_{n,r,k}(x).$$

б) *Если последовательность* $\{\Delta_{2,r}a_{k+nr}\}$ *сохраняет знак отдельно для каждого* k, *то* $f(x)$ *может быть почти всюду представлена в виде*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{2,r}a_{k+(n-1)r} B^2_{n,r,k}(x),$$

если дополнительно при $r>2$ последовательность $\{\Delta_{1,r}(a_{nr-i}-a_{nr+i})\}_{n=1}^{\infty}$ сохраняет знак отдельно для каждого $i=1,\dots,[(r-1)/2]$, то функция $f(x+m\frac{2\pi}{r})$ может быть почти всюду представлена в виде

$$f\left(x+m\frac{2\pi}{r}\right)=\sum_{k=1}^{r}\cos\left(km\frac{2\pi}{r}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_{2,r}a_{k+(n-1)r}B^2_{n,r,k}(x)-$$
$$-\sum_{k=1}^{[\frac{r-1}{2}]}\sin\left(km\frac{2\pi}{r}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_{2,r}(a_{nr+k})\overline{B}^1_{n+1,r,k}(x)+$$
$$+\sum_{k=1}^{[\frac{r-1}{2}]}\sin\left(km\frac{2\pi}{r}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_{2,r}(a_{(n+1)r-k}-a_{(n+1)r+k})\overline{B}^1_{n+1,r,k}(x)-$$
$$-\sum_{k=1}^{[\frac{r-1}{2}]}2\sin\left(km\frac{2\pi}{r}\right)\sin\left((2k-r)\frac{x}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_{2,r}a_{(n+1)r-k}B^2_{n,r}(x),$$

где полагаем $a_{k-r}=a_0$ при $k=1,\dots,r-1$.

Доказательство проводится по общей схеме с помощью пребразования Абеля (см., напр., аналогичные доказательства в [2], сс. 100, 651). Заметим, что доказательство представления функции $f(x)$ из п. б) опирается на лемму 8.

Лемма 11. *Пусть $a_n\to 0$ при $n\to\infty$, $w\in W$, φ является неотрицательной на $[0,+\infty)$ и почти возрастающей функцией. Тогда*

а) *если $a_n\ge a_{n+1}$ для всех $n=1,2,\dots,$ то*

$$\int_0^{2\pi}w(t)\varphi(g^*(t))dt\ge C_1\Big(\int_0^{\pi 2^{-10}}w(t)dt\sum_{n=1}^{2^{11}-1}\varphi(2^{-18}a_n n)+\sum_{n=2^{11}}^{\infty}\int_{\frac{2\pi}{(n+1)}}^{\frac{2\pi}{n}}w(t)dt\varphi(2^{-18}a_n n)\Big);\quad(10)$$

б) *если $a_n-2a_{n+1}+a_{n+2}\ge 0$ для всех $n=1,2,\dots,$ то*

$$\int_0^{2\pi}w(t)\varphi(f^*(t))dt\ge C_2\Big(\int_0^{\pi 2^{-10}}w(t)dt\sum_{n=1}^{2^{11}-1}\varphi(2^{-32}(a_n-a_{n+1})n^2)+$$
$$+\sum_{n=2^{11}}^{\infty}\int_{\frac{2\pi}{(n+1)}}^{\frac{2\pi}{n}}w(t)dt\varphi(2^{-32}(a_n-a_{n+1})n^2)\Big),\quad(11)$$

где C_1, C_2 не зависят от n.

Доказательство. Из [3] следует

$$g_1(x)=(g(x)+g(\pi-x))/2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}\sin((2n-1)x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin((2n-1)x)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_{1,1}b_n\sin^2(nx)/\sin x.$$

Поскольку $I=\int\limits_0^{2\pi}w(t/2)\varphi(g_1^*(t))dt\le C_1\int\limits_0^{2\pi}w(t)\varphi(g^*(t))dt$, то оценим I. Пусть $I_\nu=[\pi 2^{-(\nu+1)},\pi 2^{-\nu}]$, $\Psi_\nu(g_1(x))=\sum\limits_{n=2^{\nu-1}}^{\infty}\Delta_{1,1}b_n\sin^2(nx)/\sin x$ $(\nu=1,2,\dots)$. Для $x\in I_\nu$ имеем $\Psi_\nu(g_1(x))\le 2^\nu b_{2^{\nu-1}}$. Рассмотрим

$$A_\nu=\int_{\pi 2^{-\nu-1}}^{\pi 2^{-\nu}}\Psi_\nu(g_1(x))dx=\sum_{n=2^{\nu-1}}^{\infty}\int_{\pi 2^{-\nu-1}}^{\pi 2^{-\nu}}\Delta_{1,1}b_n\frac{\sin^2(nx)}{\sin x}dx\ge\sum_{n=2^{\nu-1}}^{\infty}\int_{\pi 2^{-\nu-1}n}^{\pi 2^{-\nu}n}\Delta_{1,1}b_n\frac{\sin^2 y}{y}dy.$$

В [3] доказано, что при $a \geq 1/4$

$$\int_{a\pi}^{2a\pi} \frac{\sin^2 y}{y} dy \geq C. \tag{12}$$

Для C удается получить оценку $C \geq 2^{-5}$. Применяя (12), будем иметь

$$A_\nu \geq 2^{-5} b_{2^{\nu-1}}. \tag{13}$$

Пусть $J_\nu = \{x \in I_\nu : \Psi_\nu(g_1(x)) \geq 2^{\nu-7} b_{2^{\nu-1}}\}$. Покажем, что $\mu(J_\nu) \geq 2^{-7}\mu(I_\nu)$. Предположим противное $\mu(J_\nu) < 2^{-7}\mu(I_\nu)$. Тогда $A_\nu = \int\limits_{J_\nu} \Psi_\nu(g_1(x))dx + \int\limits_{I_\nu \setminus J_\nu} \Psi_\nu(g_1(x))dx \leq 2^\nu b_{2^{\nu-1}} \int\limits_{J_\nu} dx + 2^{\nu-7} b_{2^{\nu-1}} \int\limits_{I_\nu} dx < 2^{\nu-6} b_{2^{\nu-1}} (\pi 2^{-\nu} - \pi 2^{-\nu-1}) = \pi 2^{-7} b_{2^{\nu-1}}$, что противоречит (13).

Применяя (13), получаем

$$I \geq C_2 \int_0^{2\pi} w(t/2)\varphi\biggl(\Bigl(\sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m\bigl(g_1(x)\bigr)\chi_{(\pi 2^{-m-1}, \pi 2^{-m}]}(x)\Bigr)^*(t)\biggr)dt \geq$$

$$\geq C_3 \int_0^{2\pi} w(t/2)\varphi\biggl(\Bigl(\sum_{m=1}^{\infty} 2^{m-7} b_{2^{m-1}} \chi_{J_m}(x)\Bigr)^*(t)\biggr)dt \geq C_4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\pi 2^{-\nu-9}}^{\pi 2^{-\nu-8}} w(t/2)\varphi(2^{\nu-7} b_{2^{\nu-1}} \chi_{(0,\mu(J_\nu))}(t))dt \geq$$

$$\geq C_5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\pi 2^{-\nu-9}}^{\pi 2^{-\nu-8}} w(t/2)\varphi(2^{\nu-7} b_{2^{\nu-1}} \chi_{(0,2^{-7}\mu(I_\nu))}(t))dt \geq C_6 \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\pi 2^{-\nu-11}}^{\pi 2^{-\nu-10}} w(t)dt\varphi(2^{\nu-7} b_{2^{\nu-1}}) =$$

$$= C_6 \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=2^{\nu+10}-1}^{2^{\nu+11}-2} \int_{2\pi/(n+2)}^{2\pi/(n+1)} w(t)dt\varphi(2^{\nu-7} b_{2^{\nu-1}}) \geq C_8 \sum_{n=2^{11}}^{\infty} \int_{2\pi/(n+1)}^{2\pi/n} \varphi(2^{-18} a_n n).$$

С другой стороны,

$$I \geq C_9 \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{\pi 2^{-\nu-9}}^{\pi 2^{-\nu-8}} w(t/2)\varphi((2^{-6} b_1 \chi_{J_1}(x))^*(t))dt \geq$$

$$\geq C_{10} \int_0^{\pi 2^{-9}} w(t/2)dt\varphi(2^{-7} b_1) \geq C_{11} \int_0^{\pi 2^{-10}} w(t)dt \sum_{n=1}^{2^{11}-1} \varphi(2^{-18} a_n n).$$

Объединяя полученные оценки для I, получаем (10). Аналогично доказывается (11). □

3. Доказательство утверждения 1

Применяя леммы 3, 4, 5, 10, имеем

$$\int_0^{2\pi} w(t)\varphi(g^*(t))dt = \sum_{m=0}^{r-1} \int_0^{2\pi/r} w(t + m2\pi/r)\varphi(g^*(t + m2\pi/r))dt \leq$$

$$\leq C_1 \int_0^{2\pi/r} w_r(t)\varphi\biggl(\Bigl(\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{k=1}^{r} \cos(km2\pi/r) \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+nr} \sin((k+nr)(x-\pi/r-m2\pi/r))\chi_{(0,2\pi/r]}(x-m2\pi/r)+$$

$$+ \sum_{m=1}^{r-1}\sum_{k=1}^{r-1} \sin(km2\pi/r) \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+nr} \cos((k+nr)(x-\pi/r-m2\pi/r))\chi_{(0,2\pi/r]}(x-m2\pi/r)\Bigr)^*(t)\biggr)dt \leq$$

$$\leq C_2 \int_0^{\pi/r} w_r(2t)\varphi\biggl(\biggl(\Bigl|\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{k=1}^{r} \cos(km2\pi/r) \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+nr} \sin((k+nr)(x-\pi/r-m2\pi/r))\chi_{(0,\pi/r]}(x-\pi/r-m2\pi/r)\Bigr| +$$

$$+\Big|\sum_{m=1}^{r-1}\sum_{k=1}^{r-1}\sin(km2\pi/r)\sum_{n=0}^{\infty}a_{k+nr}\cos((k+nr)(x-\pi/r-m2\pi/r))\chi_{(0,\pi/r]}(x-\pi/r-m2\pi/r)\Big|\Big)^{*}(t)\Big)dt\le$$

$$\le C_3\Big(\sum_{s=0}^{\infty}\int_{\pi 2^{-s-2}/r}^{\pi 2^{-s-1}/r}w_r(4t)\varphi\Big(\Big(\Big|\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{k=1}^{r}\cos(km2\pi/r)\sum_{n=0}^{2^{s+2}-1}\Delta_{1,r}a_{k+nr}\overline{B}^{1}_{n+1,r,k}(x-$$

$$-\pi/r-m2\pi/r)\chi_{(0,\pi/r]}(x-\pi/r-m2\pi/r)\Big|+\Big|\sum_{m=1}^{r-1}\sum_{k=1}^{r-1}\sin(km2\pi/r)\sum_{n=0}^{2^{s+2}-1}\Delta_{1,r}a_{k+nr}BC^{1}_{n,r,k}(x-$$

$$-\pi/r-m2\pi/r)\chi_{(0,\pi/r]}(x-\pi/r-m2\pi/r)\Big|\Big)^{*}(t)\Big)dt+\sum_{s=0}^{\infty}\int_{\pi 2^{-s-2}/r}^{\pi 2^{-s-1}/r}w_r(4t)\varphi\Big(\Big(\Big|\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{k=1}^{r}\cos(km2\pi/r)\times$$

$$\times\sum_{n=2^{s+2}}^{\infty}\Delta_{1,r}a_{k+nr}\overline{B}^{1}_{n+1,r,k}(x-\pi/r-m2\pi/r)\chi_{(0,\pi/r]}(x-\pi/r-m2\pi/r)\Big|+\Big|\sum_{m=1}^{r-1}\sum_{k=1}^{r-1}\sin(km2\pi/r)\times$$

$$\times\sum_{n=2^{s+2}}^{\infty}\Delta_{1,r}a_{k+nr}BC^{1}_{n,r,k}(x-\pi/r-m2\pi/r)\chi_{(0,\pi/r]}(x-\pi/r-m2\pi/r)\Big|\Big)^{*}(t)\Big)dt\Big)=C_3(I_1+I_2).$$

Оценим I_1. Из леммы 9 следует $|\overline{B}^{1}_{n+1,r,k}(x)|\le n+1$, $|BC^{1}_{n,r,k}(x)|\le n+1$. Тогда

$$I_1\le C_4\sum_{s=0}^{\infty}\int_{\pi 2^{-s-2}/r}^{\pi 2^{-s-1}/r}w_r(4t)dt\varphi\Big(\sum_{k=1}^{r}\sum_{n=0}^{2^{s+2}-1}\Delta_{1,r}a_{k+nr}(n+1)\Big).$$

Заметим, что

$$\sum_{n=0}^{2^{s+2}-1}\Delta_{1,r}a_{k+nr}(n+1)=\sum_{n=0}^{2^{s+2}-1}a_{k+nr}(n+1)-\sum_{n=1}^{2^{s+2}}a_{k+nr}n=$$

$$=\sum_{n=0}^{2^{s+2}-1}a_{k+nr}(n+1-n)-a_{k+2^{s+2}r}2^{s+2}\le\sum_{n=0}^{2^{s+2}-1}a_{k+nr}.$$

Тогда $I_1\le C_5\sum\limits_{m=0}^{\infty}\int\limits_{\pi 2^{-m-2}/r}^{\pi 2^{-m-1}/r}w_r(t)dt\varphi\Big(\sum\limits_{n=0}^{2^{m+2}-1}\sum\limits_{k=1}^{r}a_{k+nr}\Big)$.

Применяя лемму 3, имеем

$$I_1\le C_6\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2\pi/((n+1)r)}^{2\pi/(nr)}w_r(t)dt\sum_{k=1}^{r}\varphi((n+1)a_{k+nr}).$$

Оценим I_2. Так как для любого $x\in(0,\pi/r)$ (см. лемму 9) $|BC^{1}_{n,r,k}(x)|\le C_7/(rx)$, $|\overline{B}^{1}_{n+1,r,k}(x)|\le C_8/(rx)$, где C_7, C_8 не зависят от x и n, то

$$I_2\le C_9\sum_{s=0}^{\infty}\int_{\pi 2^{-s-2}/r}^{\pi 2^{-s-1}/r}w_r(4t)\times$$

$$\times\varphi\Big(\Big(\sum_{k=1}^{r}a_{k+2^{s+2}r}\sum_{m=0}^{r-1}\chi_{(0,\pi/r)}(x-\pi/r-m2\pi/r)/(r(x-\pi/r-m2\pi/r))\Big)^{*}(t)\Big)dt\le$$

$$\le C_{10}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\pi 2^{-m-2}/r}^{\pi 2^{-m-1}/r}w_r(4t)\varphi\Big(\sum_{k=1}^{r}a_{k+2^{m+2}r}\chi_{(0,\pi)}(t)/t\Big)dt\le$$

$$\le C_{11}\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\pi 2^{-m-1}/r}^{\pi 2^{-m}/r}w_r(4t)dt\varphi\Big(\sum_{k=1}^{r}a_{k+2^{m+2}r}2^{m+2}r\Big)\le C_{12}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\frac{2\pi}{(n+1)r}}^{\frac{2\pi}{(n+2)r}}w_r(4t)dt\sum_{k=1}^{r}\varphi(a_{k+nr}(n+1)).$$

Объединяя оценки для I_1 и I_2, получим (3). Доказательство неравенств (4), (5) проводится по той же схеме, но с использованием соответствующих представлений функции f из леммы 10. $\square$

4. Доказательство утверждения 2

Рассмотрим п. а) при $r > 1$. Можно проверить, что

$$\Big(g(x) + \sum_{m=1}^{r-1}(g(x+m2\pi/r) + g(x-m2\pi/r))/2\Big)/r = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nr}\sin(nrx) = g_1(x).$$

Применяя лемму 4, имеем

$$I_1 = \int_0^{2\pi} w(t2^{1-r})\varphi(g_1^*(t))dt \le C_1 \int_0^{2\pi} w(t)\varphi(g^*(t))dt.$$

Оценим снизу I_1. Проводя рассуждения по схеме из леммы 11 и учитывая свойства функции $\varphi(t)$, получим $I_1 \ge C_2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int\limits_{2\pi/((n+2)r)}^{2\pi/((n+1)r)} w(t)dt\varphi(a_{(n+1)r}(n+1)r)$. Тогда

$$\int_0^{2\pi} w(t)\varphi(g^*(t))dt \ge C_3 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2\pi/((n+2)r)}^{2\pi/((n+1)r)} w(t)dt\varphi(a_{(n+1)r}(n+1)r).$$

Рассмотрим $g_{11}(x) = g(x) - g_1(x) = \sum\limits_{k=1}^{r-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{k+nr}\sin((k+nr)x), g_{12}(x) = g_{11}(x)\cos x$. Применяя лемму 4, имеем $\int\limits_0^{2\pi} w(t2^{-r})\varphi(g_{12}^*(t))dt \le C_3 \int\limits_0^{2\pi} w(t)\varphi(g^*(t))dt$. Нетрудно проверить, что $\Big(g_{12}(x) + \sum\limits_{m=1}^{r-1}(g_{12}(x+m2\pi/r) + g_{12}(x-m2\pi/r))/2\Big)/r = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{nr+1} + a_{nr-1})\sin(nrx) = g_2(x)$. Тогда $\int\limits_0^{2\pi} w(t2^{1-2r})\varphi(g_2^*(t))dt \le C_4 \int\limits_0^{2\pi} w(t2^{-r})\varphi(g_{12}^*(t))dt$. Проводя те же рассуждения, что и для функции $g_1(x)$, получим

$$\int_0^{2\pi} w(t)\varphi(g^*(t))dt \ge C_5 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2\pi/((n+2)r)}^{2\pi/((n+1)r)} w(t)dt\varphi((a_{(n+1)r+1} + a_{(n+1)r-1})(n+1)r).$$

Рассмотрим $g_{21}(x) = g_{11}\cos(2x)$. Тогда нетрудно проверить, что $\Big(g_{21}(x) + \sum\limits_{m=1}^{r-1}(g_{21}(x+m2\pi/r) + g_{21}(x-m2\pi/r))/2\Big)/r = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{nr+2} + a_{nr-2})\sin(nrx) = g_3(x)$. Применяя лемму 4, имеем $\int\limits_0^{2\pi} w(t2^{1-2r})\varphi(g_3^*(t))dt \le C_6 \int\limits_0^{2\pi} w(t)\varphi(g^*(t))dt$. Вновь проводя те же рассуждения, что и для функции $g_1(x)$, получим

$$\int_0^{2\pi} w(t)\varphi(g^*(t))dt \ge C_7 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2\pi/((n+2)r)}^{2\pi/((n+1)r)} w(t)dt\varphi((a_{(n+1)r+2} + a_{(n+1)r-2})(n+1)r).$$

Аналогично строятся функции $g_4(x), \dots,$ а затем для этих функций находятся интегральные оценки снизу. Объединяя интегральные оценки для $g^*(t)$ и учитывая свойства функции $\varphi(t)$, получим (6). При $r = 1$ (6) следует из леммы 11. Аналогично доказывается (7). $\square$

Замечание.

1) Из утверждений 1 и 2 следует теорема [3] для сумм тригонометрических рядов (1) и (2).

2) Нетрудно проверить, что если последовательность $\{a_n\}$ ($a_n \to 0$ при $n \to \infty$) невозрастающая, то $\Delta_{1,r}a_n \ge 0$ для всех n и при любом $r = 1, 2, \dots$ Покажем, что обратное не всегда верно.

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$ такую, что $a_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $a_{2n} = 0, a_{2n+1} \geq a_{2n+3} > 0$ $(n = 0, 1, \dots)$. Она не является невозрастающей, но $\Delta_{1,2} a_n \geq 0$ для всех n.

3) Пусть коэффициенты рядов (1) и (2) таковы, что $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ и $\Delta_{2,t,l} a_n \geq 0$ для всех n. Тогда в силу леммы 7 $\Delta_{2,tl} a_n \geq 0$ для всех n. Тем самым для оценки $\|f\|_{\varphi,w}$ и $\|g\|_{\varphi,w}$ применимы утверждения 1 и 2 с $r = tl$.

4) Пусть коэффициенты рядов (1) и (2) таковы, что $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ и $\Delta_{k,s_k,\dots,s_1} a_n \geq 0$ для всех n $(k \geq 2)$. Тогда в силу леммы 6 $\Delta_{2,s_2,s_1} a_n \geq 0, a_n \geq 0$ для всех n. Тем самым на основании п. 3) замечания для оценок $\|f\|_{\varphi,w}$ и $\|g\|_{\varphi,w}$ применимы утверждения 1 и 2.

5) Пусть $r \in N$, $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$, $\Delta_{1,r} a_n \geq 0$ для всех n, где a_n — коэффициенты ряда (2). Тогда из утверждений 1 и 2 следует, что при $\varphi(t) = t^p$ $(0 < p < \infty)$, $w(t) \equiv 1$ условие $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2} < \infty$ является необходимым и достаточным для того, чтобы $\int\limits_0^{2\pi} |g(x)|^p dx < \infty$.

5. Дополнения

Приведем ряд утверждений, обобщающих утверждения 1 и 2.

Утверждение 3. *Пусть* $r \in N$, $a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *где* a_n — *коэффициенты рядов* (1) *и* (2), $\varphi \in \Phi$, $w \in W$ *и такова, что* $\int\limits_0^{\delta} w_r(x)dx \leq C_1 \int\limits_{\delta/2}^{\delta} w_r(x)dx$ *для любого* $\delta \in (0, 2\pi/r)$, *где* $w_r(x) = \sum\limits_{m=0}^{r-1} w(x + m\frac{2\pi}{r})$, *а* C_1 *не зависит от* δ.

а) *Если последовательность* $\{\Delta_{1,r} a_{k+nr}\}_{n=0}^{\infty}$ *сохраняет знак отдельно при каждом* $k = 1, \dots, r$, *то*

$$\int_0^{2\pi} w(t)\varphi(g^*(t))dt \leq C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{2\pi}{(n+2)r}}^{\frac{2\pi}{(n+1)r}} w_r(t)dt \sum_{k=1}^{r} \varphi(|a_{k+nr}|(n+1)).$$

Если последовательность $\{\Delta_{1,r} a_{k+nr}\}_{n=0}^{\infty}$ *сохраняет знак отдельно при каждом* $k = 0, 1, ..., r-1$, *то*

$$\int_0^{2\pi} w(t)\varphi(f^*(t))dt \leq C_3 \Big(\int_{\frac{\pi}{r}}^{\frac{2\pi}{r}} w_r(t)dt \varphi(|a_0|) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{2\pi}{(n+2)r}}^{\frac{2\pi}{(n+1)r}} w_r(t)dt \sum_{k=1}^{r} \varphi(|a_{k+nr}|(n+1)) \Big).$$

б) *Если последовательность* $\{\Delta_{2,r} a_{k+nr}\}_{n=0}^{\infty}$ *сохраняет знак отдельно при каждом* $k = 1, \dots, r$, *а при* $r > 2$ *дополнительно последовательность* $\{\Delta_{1,r}(a_{nr+k} - a_{(n+1)r-k})\}_{n=0}^{\infty}$ *сохраняет знак отдельно при каждом* $k = 1, \dots, [(r-1)/2]$, *то*

$$\int_0^{2\pi} w(t)\varphi(f^*(t))dt \leq C_4 \Big(\int_{\frac{\pi}{r}}^{\frac{2\pi}{r}} w_r(t)dt \sum_{\substack{k=1,\dots,r \\ k \neq ([r/2]-[(r-1)/2])r/2}} \varphi(|a_0 - a_k|) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{2\pi}{(n+2)r}}^{\frac{2\pi}{(n+1)r}} w_r(t)dt \Big(\sum_{k=1}^{r} \varphi(|\Delta_{1,r} a_{k+nr}|(n+1)^2) + \Big[\frac{r-1}{2}\Big] \sum_{k=1}^{[\frac{r-1}{2}]} \varphi(|a_{rn+k} - a_{(n+1)r-k}|) \Big) \Big),$$

где C_2, C_3, C_4 *не зависят от* $\{a_n\}$.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 1 (с учетом сохранения знака соответствующих последовательностей).

Для формулировки следующего утверждения введем определения.

Последовательность $\{a_n\}$ назовем удовлетворяющей CM-условию, если при $r > 1$ найдутся j различных чисел $(1 \leq j \leq r-1)$ $k_1, k_2, \dots, k_j \in \{1, \dots, r-1\}$ таких, что последовательность $\{\Delta_{2,r} b_{n,j}\}_{n=0}^{\infty}$ сохраняет знак, где $b_{0,j} = a_0 + 2\sum\limits_{s=1}^{j} a_{k_s}$, $b_{n,j} = a_{nr} + \sum\limits_{s=1}^{j} (a_{nr-k_s} + a_{rn+k_s})$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Скажем, что последовательность $\{a_n\}$ при $r \geq 2$ удовлетворяет условию CMA, если найдутся m различных чисел $(1 \leq m \leq r-1-[\frac{r+1}{2}]+[\frac{r}{2}])$ $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \{1, \ldots, [\frac{r-1}{2}], [\frac{r}{2}]+1, \ldots, r-1\}$ таких, что последовательность $\{\Delta_{1,r}(a_{rn-k_s}-a_{rn+k_s})\}_{n=1}^{\infty}$ сохраняет знак отдельно при каждом $s=1,\ldots,m$.

Скажем, что последовательность $\{a_n\}$ при $r>2$ удовлетворяет условию SMA, если найдутся m различных чисел $(1 \leq m \leq r-1-[\frac{r+1}{2}]+[\frac{r}{2}])$ $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \{1, \ldots, [\frac{r-1}{2}], [\frac{r}{2}]+1, \ldots, r-1\}$ таких, что последовательность $\{\Delta_{1,r}(a_{rn-k_s}+a_{rn+k_s})\}_{n=1}^{\infty}$ сохраняет знак отдельно при каждом $s=1,\ldots,m$.

Обобщением утверждения 2 является

Утверждение 4. *Пусть $r \in N$, $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, где a_n — коэффициенты рядов* (1) *и* (2)*, $w \in W$, φ является неотрицательной на $[0,+\infty)$ и почти возрастающей функцией.*

а) *Если последовательность $\{\Delta_{1,r}a_{k+nr}\}_{n=0}^{\infty}$ сохраняет знак отдельно при каждом $k=1,\ldots,r$ и последовательность $\{a_n\}$ при $r>2$ дополнительно удовлетворяет условию SMA, то*

$$\int_0^{2\pi} w(t)\varphi(g^*(t))dt \geq C_1\biggl(\int_0^{\frac{\pi}{r2^{10+r}}} w(t)dt \sum_{n=1}^{2^{11+r}-1}\biggl(\varphi(2^{-18-r}|a_{rn}|n)+\biggl(1-\left[\frac{r+1}{2}\right]+\left[\frac{r}{2}\right]\biggr)\times$$
$$\times\,\varphi(2^{-18-r}|a_{\frac{r}{2}(2n-1)}|n)+\left[\frac{r-1}{2}\right]\sum_{s=1}^{m}\varphi(2^{-18-r}|a_{rn-k_s}+a_{rn+k_s}|n)\biggr)+$$
$$+\sum_{n=2^{11+r}}^{\infty}\int_{\frac{2\pi}{(n+1)r}}^{\frac{2\pi}{nr}} w(t)dt(\varphi(2^{-18-r}|a_{nr}|n)+\biggl(1-\left[\frac{r+1}{2}\right]+\left[\frac{r}{2}\right]\biggr)\varphi(2^{-18-r}|a_{\frac{r}{2}(2n-1)}|n)+$$
$$+\left[\frac{r-1}{2}\right]\sum_{s=1}^{m}\varphi(2^{-18-r}|a_{rn-k_s}+a_{rn+k_s}|n))\biggr).$$

б) *Если последовательность $\{\Delta_{2,r}a_{k+nr}\}_{n=0}^{\infty}$ сохраняет знак отдельно при каждом $k=0,1,\ldots,r-1$ и последовательность $\{a_n\}$ при $r=2$ дополнительно удовлетворяет условию CMA, а при $r>2$ удовлетворяет условиям CM и CMA, то*

$$\int_0^{2\pi} w(t)\varphi(f^*(t))dt \geq C_2\biggl(\int_0^{\frac{2\pi}{r2^{13+2r}}} w(t)dt(\varphi(2^{-34-3r}|a_0-a_r|)+$$
$$+\left[\frac{r}{2}\right]\varphi\biggl(2^{-34-3r}\biggl|a_0-a_r+\sum_{s=1}^{j}(2a_{k_s}-a_{r-k_s}-a_{r+k_s})\biggr|\biggr)+$$
$$+\left[\frac{r-1}{2}\right]\sum_{n=1}^{2^{13+2r}-1}\biggl(\varphi\biggl(2^{-34-3r}\biggl|\Delta_{1,r}(a_{rn}+\sum_{s=1}^{j}(a_{rn-k_s}+a_{rn+k_s}))\biggr|n^2\biggr)+$$
$$+\varphi(2^{-34-3r}|\Delta_{1,r}a_{rn}|n^2)+\left[\frac{r-1}{2}\right]\sum_{s=1}^{m}\varphi(2^{-34-3r}|a_{rn-k_s}-a_{rn+k_s}|n)\biggr)+$$
$$+\sum_{n=2^{13+2r}}^{\infty}\int_{\frac{2\pi}{(n+1)r}}^{\frac{2\pi}{nr}} w(t)dt\biggl(\varphi(2^{-34-3r}|\Delta_{1,r}a_{rn}|n^2)+\left[\frac{r}{2}\right]\varphi\biggl(2^{-34-3r}\biggl|\Delta_{1,r}(a_{rn}+$$
$$+\sum_{s=1}^{j}(a_{rn-k_s}+a_{rn+k_s}))\biggr|n^2\biggr)+\left[\frac{r-1}{2}\right]\sum_{s=1}^{m}\varphi(2^{-34-3r}|a_{rn-k_s}-a_{rn+k_s}|n)\biggr)\biggr),$$

где C_1, C_2 не зависят от $\{a_n\}$.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 2 (только дополнительно учитывается сохранение знака соответствующих последовательностей).

Покажем, что каждая сумма в неравенствах (5), (7) существенна. Для этого положим $r=3$, $\varphi(t)=t^p$ $(0<p<+\infty)$, $w(t)\equiv 1$.

Сначала рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, для которой $a_{3n+3}=0$, $a_{3n+1}=0$, $\Delta_{2,3}a_{3n+2}\geq 0$ $(n=0,1,\dots)$, $a_0\geq a_2$. Тогда из утверждений 1 и 2 следует

$$C_1\sum_{n=0}^{\infty}a_n^p(n+1)^{p-2}\leq\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\leq C_2\sum_{n=0}^{\infty}a_n^p(n+1)^{p-2},$$

где C_1, C_2 не зависят от $\{a_n\}$.

Затем рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, для которой $a_{3n+3}=0$, $a_{3n+2}=a_{3n+4}$, $\Delta_{2,3}a_n\geq 0$ $(n=0,1,\dots)$, $a_0\geq a_1$, $a_0\geq a_2$, $a_0\geq a_1+a_2+a_3-a_4-a_5$. Тогда из утверждений 1 и 2 следует

$$C_1\sum_{n=0}^{\infty}(\Delta_{1,3}a_n)^p(n+1)^{2p-2}\leq\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx\leq C_2\sum_{n=0}^{\infty}(\Delta_{1,3}a_n)^p(n+1)^{2p-2},$$

где C_1, C_2 не зависят от $\{a_n\}$.

Литература

1. Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1956. – Т. 5. – С. 483–522.
2. Бари Н.К. *Тригонометрические ряды.* – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
3. Вуколова Т.М., Дьяченко М.И. *О свойствах сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем. мех. – 1995. - № 3. – С. 22–32.
4. Потапов М.К., Бериша М. *Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одного переменного* // Publ. inst. math. – 1979. – V. 26. – P. 215–228.
5. Никольский С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.* – М.: Наука, 1977. – 455 с.
6. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.

Волгоградский государственный технический университет

Поступила 23.12.2005