ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 6 (541)

УДК 517.982

В.А. КОСТИН, С.В. ПИСАРЕВА

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ В ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СТЕПАНОВА

Пусть F и U — метрические пространства с соответствующими метриками ρ_F и ρ_U. Согласно Адамару ([1], с. 10) задача определения решения $u \in U$ уравнения $Au = f$, где $f \in F$ задано, называется корректно поставленной на пространствах (F, U), если выполняются условия

а) для всякого $f \in F$ существует $u \in U$ — решение уравнения,
б) решение определяется однозначно,
в) задача устойчива на пространствах (F, U), т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из неравенства $\rho_F(f_1, f_2) < \delta$ следует $\rho_U(u_1, u_2) < \varepsilon$.

Устойчивость задачи зависит от выбранных топологий в U и F, и подходящим выбором топологий можно формально добиться непрерывности оператора A^{-1}, существование которого обеспечивают условия а) и б).

В связи с этим возникает следующая проблема выбора топологий в пространствах данных задачи F и решений U:

1. эти топологии не должны зависеть от оператора A,

2. желательно иметь наиболее широкий класс пространств начальных данных $f \in F$, при которых решение задачи $u \in U$ сохраняет "хорошие свойства".

В прикладных задачах наиболее часто используются топологии следующих нормированных пространств функций $f(x)$, $x \in \Omega \subset R^1$: $C(\Omega)$ — пространство непрерывных и ограниченных в Ω функций с нормой

$$\|f\|_C = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|;$$

$C^{(l)}(\Omega)$ — пространство непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка l ($l \in N$) функций,

$$C^{(l)}(\Omega) = \Big\{ f(x) : f^{(k)}(x) \in C(\Omega),\ \|f\|_{C^{(l)}} = \sum_{k=0}^{l} \|f^{(k)}\|_C,\ l = 1, 2, \dots \Big\},$$

$L_p(\Omega)$ — пространство интегрируемых со степенью $p \geq 1$ функций с нормой

$$\|f\|_{L_p} = \Big[\int_\Omega |f(x)|^p dx \Big]^{\frac{1}{p}}.$$

В зависимости от задачи используются также и соответствующие весовые пространства.

Наряду с этим при изучении почти периодических функций на всей действительной оси В.В. Степановым были введены $S_{p,l}$-пространства с помощью нормы

$$\|f\|_{S_{p,l}} = \sup_{t \in R^1} \Big[\frac{1}{l} \int_t^{t+l} |f(s)|^p ds \Big]^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1, \quad l > 0).$$

В дальнейшем эти пространства были использованы Х. Масера, Х. Шеффером, М.Г. Крейном, Ю.Л. Далецким, Е.А. Барбашиным при изучении устойчивости решений абстрактного уравнения

$$\frac{du}{dt} - Au(t) = f(t), \tag{1}$$

где A — линейный и ограниченный в некотором банаховом пространстве E оператор при каждом $t \in R^1$.

Б.М. Левитан и В.В. Жиков применили $S_{p,l}$-пространства при изучении устойчивости решения уравнения (1) в случае, когда оператор A является генератором сильно непрерывной полугруппы $U(t)$ класса C_0 в некотором банаховом пространстве E, и, следовательно, при некоторых $k_0 > 0$ и $\omega \in R^1$ выполняется оценка

$$\|U(t)\| \le k_0 e^{\omega t} \quad (t \ge 0).$$

При указанных предположениях на оператор A пространства Степанова являются наиболее широкими в классе локально интегрируемых на R^1 функций, принадлежность к которым свободного члена уравнения (1) влечет корректную разрешимость уравнения в классе ограниченных на R^1 функций.

В то же время изучение корректной разрешимости задач для эволюционных уравнений в банаховом пространстве, где ядра соответствующих интегральных операторов имеют особенность, приводит к уравнению вида (1), когда оператор A является производящим оператором сильно непрерывной при $t > 0$ полугруппы $U(t)$, удовлетворяющей условию

$$\|U(t)\| \le e^{-\omega t}\varphi(t), \tag{2}$$

где $\omega > 0$, $\varphi(t)$ — непрерывная при $t > 0$ функция такая, что

$$\int_0^\infty e^{-\omega t}\varphi(t)dt < \infty. \tag{3}$$

Отметим, что по классификации Э. Хилле, Р. Филлипса ([2], с. 334) полугруппы, удовлетворяющие условию (1), относятся к классу $(1,A)_u$ полугрупп, интегрируемых при $t = 0$.

Изучению таких полугрупп посвящены работы [3], [4] (см. также [5], с. 130). Многочисленные примеры полугрупп с особенностями приведены в ([6], с. 34–36).

Естественно поставить вопрос о том, какому наиболее широкому классу локально интегрируемых функций должен принадлежать свободный член уравнения (1) с тем, чтобы это уравнение имело единственное ограниченное решение при выполнении условий б), в).

В данной работе исследуется разрешимость эволюционного уравнения (1) в пространстве ограниченных функций, когда $f(t)$ принадлежит обобщенным пространствам Степанова.

1. Обобщенные пространства Степанова

Рассмотрим классы функций $S^{\pm}_{p,l,k}(E)$, для которых конечны нормы

$$\|f\|_{S^{\pm}_{p,l,k}} = \sup_{t\in R^1}\left[\frac{1}{l}\int_0^l k(s)\|f(s\pm t)\|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{4}$$

где $l > 0$, $p \ge 1$, функция $k(x) > 0$ определена, непрерывна и дифференцируема для всех $x \in (0, +\infty)$ и

$$\lim_{a\to 0}\int_a^l k(s)ds < \infty.$$

Заметим, что суммируемость функции $k(t)$ в нуле требуем для того, чтобы функции, тождественно равные константе, могли войти в классы $S^{\pm}_{p,l,k}(E)$.

В случае $k(s) \equiv 1$ нормы (4) совпадают с классическими нормами пространств Степанова $S_{p,l}$.

В связи с приложениями имеет смысл рассматривать монотонную функцию $k(t)$ для всех $t \in (0,+\infty)$.

Теорема 1. *Если $k'(x) \geq 0$ на интервале $(0,+\infty)$, то нормы $\|f\|_{S^{\pm}_{p,l,k}}$ эквивалентны норме Степанова $\|f\|_{S_{p,l}}$.*

Доказательство. Так как функция $k(s)$ непрерывна и возрастает на промежутке $(0,l]$, то она достигает своего максимума в точке $x = l$. Из очевидного неравенства

$$\frac{1}{l}\int_t^{t+l} k(s-t)\|f(s)\|^p ds \leq \frac{1}{l}\int_t^{t+l} k(l)\|f(s)\|^p ds$$

получаем

$$\|f\|_{S^+_{p,l,k}} \leq [k(l)]^{\frac{1}{p}}\|f\|_{S_{p,l}}. \tag{5}$$

В силу эквивалентности $S_{p,l}(E)$-норм при различных l имеем

$$\sup_{t\in R^1}\left[\int_t^{t+l}\|f(s)\|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} \leq C(l,p)\sup_{t\in R^1}\left[\int_{t+\frac{l}{2}}^{t+l}\|f(s)\|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{6}$$

Далее

$$\int_{t+\frac{l}{2}}^{t+l}\|f(s)\|^p ds = \int_{t+\frac{l}{2}}^{t+l}\frac{k(s-t)}{k(s-t)}\|f(s)\|^p ds \leq$$
$$\leq \frac{1}{k(\frac{l}{2})}\int_{t+\frac{l}{2}}^{t+l} k(s-t)\|f(s)\|^p ds \leq \frac{1}{k(\frac{l}{2})}\int_t^{t+l} k(s-t)\|f(s)\|^p ds.$$

Из последнего неравенства и (6) получаем

$$\|f\|_{S_{p,l}} \leq C(l,p)\left[\frac{1}{k(\frac{l}{2})}\right]^{\frac{1}{p}}\|f\|_{S^+_{p,l,k}}. \tag{7}$$

Из (5) и (7) следует доказательство теоремы для $S^+_{p,l,k}(E)$.

Аналогично доказывается эквивалентность норм пространств $S^-_{p,l,k}(E)$ и $S_{p,l}(E)$. $\square$

Замечание 1. Если $k'(x) < 0$ на интервале $(0,+\infty)$ и существует $0 < \varepsilon < 1$ такое, что $k^{1+\varepsilon}(x) \notin L_1[0,1]$, то нормы $\|f\|_{S^{\pm}_{p,l,k}}$ и $\|f\|_{S_{p,l}}$, вообще говоря, не эквивалентны.

В качестве примера рассмотрим $E = R^1$, $p = 1$, $l = 1$ и

$$f(x) = \begin{cases} k^{\varepsilon}(x), & \text{если } x \in (0,1];\\ 0, & \text{если } x \notin (0,1]. \end{cases}$$

Тогда, пользуясь неравенством Гёльдера с показателем $q = \frac{1}{\varepsilon}$, оценим

$$\sup_{t\in R^1}\int_t^{t+1} f(x)dx = \int_0^1 k^{\varepsilon}(x)dx \leq \int_0^1 k(x)dx < \infty,$$

т. е. $f \in S_{1,1}$.

С другой стороны,

$$\sup_{t\in R^1}\int_t^{t+1} k(x-t)f(x)dx \geq \int_0^1 k(x)f(x)dx = \int_0^1 k^{1+\varepsilon}(s)ds = \infty,$$

т. е. $f \notin S_{1,1,k}$. Следовательно, нормы не эквивалентны.

Всюду далее вес $k(t)$ предполагается суммируемой и убывающей на $(0,+\infty)$ функцией, $k(t) = 0$ при $t < 0$.

Теорема 2. *Если $k'(t) < 0$ на интервале $(0, +\infty)$, то нормы $\|f\|_{S^{\pm}_{p,l,k}}$ эквивалентны при различных l.*

Доказательство. Пусть $l_2 > l_1$. Из неравенства

$$\frac{1}{l_1}\int_0^{l_1} k(s)\|f(t+s)\|^p ds \le \frac{l_2}{l_1}\frac{1}{l_2}\int_0^{l_2} k(s)\|f(t+s)\|^p ds$$

следует

$$\|f\|_{S^+_{p,l_1,k}} \le \left[\frac{l_2}{l_1}\right]^{\frac{1}{p}} \|f\|_{S^+_{p,l_2,k}}. \tag{8}$$

Для вывода противоположного неравенства положим $l_2 = nl_1 + \Theta l_1$, где n — целое число, а $0 \le \Theta < 1$. Тогда

$$\frac{1}{l_2}\int_0^{l_2} k(s)\|f(t+s)\|^p ds \le \frac{l_1}{l_2}\frac{1}{l_1}\int_0^{(n+1)l_1} k(s)\|f(t+s)\|^p ds =$$
$$= \frac{l_1}{l_2}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{l_1}\int_{il_1}^{(i+1)l_1} k(s)\|f(t+s)\|^p ds \le \frac{l_1}{l_2}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{l_1}\int_0^{l_1} k(\tau+il_1)\|f(\tau+il_1+t)\|^p d\tau.$$

Так как функция $k(t)$ монотонно убывает на $(0, +\infty)$, то значения функции на промежутке $(0, l_1]$ больше значений функции на промежутке $(il_1, (i+1)l_1]$ для всех $i = \overline{1,n}$. Следовательно,

$$\frac{1}{l_2}\int_0^{l_2} k(s)\|f(t+s)\|^p ds \le \frac{l_1}{l_2}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{l_1}\int_0^{l_1} k(\tau)\|f(\tau+il_1+t)\|^p d\tau \le$$
$$\le \frac{l_1}{l_2}(n+1)\|f\|^p_{S^+_{p,l_1,k}} \le \frac{l_1}{l_2}\left(\frac{l_2}{l_1}+1\right)\|f\|^p_{S^+_{p,l_1,k}} \le \left(1+\frac{l_1}{l_2}\right)\|f\|^p_{S^+_{p,l_1,k}} \le 2\|f\|^p_{S^+_{p,l_1,k}}.$$

Отсюда, возведя в степень $\frac{1}{p}$ обе части последнего неравенства и переходя к супремуму по $t \in R^1$, получаем

$$\|f\|_{S^+_{p,l_2,k}} \le 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{S^+_{p,l_1,k}}.$$

Из последнего неравенства и (8) следует эквивалентность $S^+_{p,l,k}(E)$-норм для различных l.

Аналогично теорема 2 доказывается для пространств $S^-_{p,l,k}(E)$. □

В дальнейшем полагаем $l = 1$ и

$$\|f\|_{S^{\pm}_{p,k}(E)} = \sup_{t\in R^1}\left[\int_0^1 k(s)\|f(t\pm s)\|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Замечание 2. Если $k'(x) < 0$ на интервале $(0, +\infty)$ и $k(x) \notin L_2[0,1]$, то нормы $\|f\|_{S^+_{p,k}}$ и $\|f\|_{S^-_{p,k}}$, вообще говоря, не эквивалентны.

В качестве примера рассмотрим $E = R^1, p = 1$ и

$$f(x) = \begin{cases} k(x), & \text{если } x \in (0,1]; \\ 0, & \text{если } x \notin (0,1]. \end{cases}$$

Тогда

$$\|f\|_{S^+_{1,k}(R^1)} = \sup_{t\in R^1}\int_0^1 k(s)k(t+s)ds \ge \int_0^1 k^2(s)ds = \infty.$$

С другой стороны,

$$\|f\|_{S^-_{1,k}(R^1)} = \sup_{t\in R^1}\int_0^1 k(s)k(t-s)ds = \int_0^1 k(s)k(1-s)ds =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} k(s)k(1-s)ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 k(s)k(1-s)ds \le$$

$$\le k\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{1}{2}} k(s)ds + k\left(\frac{1}{2}\right)\int_{\frac{1}{2}}^1 k(1-s)ds = 2k\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{1}{2}} k(s)ds < \infty.$$

Следовательно, нормы не эквивалентны.

Отметим также еще один класс локально интегрируемых функций, полезный в приложениях. Обозначим через $S^{\pm}_{p,k,\rho}(E)$ пространства функций, определяемых нормами

$$\|f\|_{S^{\pm}_{p,k,\rho}} = \sup_{t\in R^1}\left[\int_0^{+\infty}\rho(s)k(s)\|f(t\pm s)\|^p ds\right]^{\frac{1}{p}},$$

где $p \ge 1$, функция $k(x) > 0$, $k'(x) < 0$ для $x \in (0,\infty)$, интегрируема при $t \ge 0$, а функция $\rho(x) > 0$ является непрерывной монотонно убывающей на $[0,+\infty)$ функцией и

$$\int_0^{+\infty}\rho(s)ds = M < \infty.$$

Теорема 3. *Нормы $\|f\|_{S^{\pm}_{p,k,\rho}}$ и $\|f\|_{S^{\pm}_{p,l,k}}$ эквивалентны.*

Доказательство. Оценим

$$\int_0^{+\infty}\rho(s)k(s)\|f(t+s)\|^p ds = \frac{l}{l}\int_0^l \rho(s)k(s)\|f(t+s)\|^p ds + \sum_{i=1}^{\infty}\int_{il}^{(i+1)l}\rho(s)k(s)\|f(t+s)\|^p ds \le$$

$$\le l\rho(0)\frac{1}{l}\int_0^l k(s)\|f(t+s)\|^p ds + \sum_{i=1}^{\infty}\rho(il)\int_{il}^{(i+1)l}k(s-il)\|f(t+s)\|^p ds \le$$

$$\le l\rho(0)\|f\|^p_{S^+_{p,k,l}} + \sum_{i=1}^{\infty}\rho(il)\frac{l}{l}\int_0^l k(s)\|f(t+il+s)\|^p ds \le$$

$$\le l\rho(0)\|f\|^p_{S^+_{p,k,l}} + \|f\|^p_{S^+_{p,k,l}}\sum_{i=1}^{\infty} l\rho(il) \le l\rho(0)\|f\|^p_{S^+_{p,k,l}} + \|f\|^p_{S^+_{p,k,l}}\sum_{i=1}^{\infty}\rho(il)\int_{il}^{(i+1)l}ds \le$$

$$\le l\rho(0)\|f\|^p_{S^+_{p,k,l}} + \|f\|^p_{S^+_{p,k,l}}\int_0^{\infty}\rho(s)ds \le l\rho(0)\|f\|^p_{S^+_{p,k,l}} + M\|f\|^p_{S^+_{p,k,l}}.$$

Следовательно,

$$\|f\|_{S^+_{p,k,\rho}} \le [l\rho(0)+M]^{\frac{1}{p}}\|f\|_{S^+_{p,k,l}}. \tag{9}$$

В другую сторону,

$$\frac{1}{l}\int_0^l k(s)\|f(t+s)\|^p ds = \frac{1}{l}\int_0^l \frac{\rho(s)}{\rho(s)}k(s)\|f(t+s)\|^p ds =$$

$$\le \frac{1}{\rho(l)}\frac{1}{l}\int_0^l \rho(s)k(s)\|f(t+s)\|^p ds \le \frac{1}{l\rho(l)}\|f\|^p_{S^+_{p,k,\rho}}.$$

Получаем

$$\|f\|_{S^+_{p,k,l}} \le \left[\frac{1}{l\rho(l)}\right]^{\frac{1}{p}}\|f\|_{S^+_{p,k,\rho}}. \tag{9'}$$

Из неравенств (9) и (9′) следует эквивалентность норм $\|f\|_{S^+_{p,k,l}}$ и $\|f\|_{S^+_{p,k,\rho}}$.

Аналогично доказывается эквивалентность норм $\|f\|_{S^-_{p,k,l}}$ и $\|f\|_{S^-_{p,k,\rho}}$. $\square$

В частности, если взять в качестве $\rho(x) = e^{-\omega x}$ $(\omega > 0)$, $k(x) = x^{\alpha-1}$ $(0 < \alpha \le 1)$, то получим вес Лаггера, если $\rho(x) = e^{-\omega x^2}$, то вес Эрмита.

2. Эволюционные уравнения

При всех $t \in R^1$ для неоднородного уравнения (1) рассмотрим задачу об отыскании функции $u(t)$, удовлетворяющей условиям

1. $u(t) \in D(A)$ при всех $t \in R^1$,
2. $Au(t)$ непрерывна в R^1, (10)
3. $u(t)$ удовлетворяет исходному уравнению,
4. $u(t)$ ограничена на R^1.

Функцию $u(t)$, удовлетворяющую условиям (10), назовем решением уравнения (1).

Теорема 4. *Пусть A — производящий оператор полугруппы $U(t)$ класса $(1, A)_u$, удовлетворяющей условию (2)–(3), $u(t)$ — решение задачи (1), (10) и $f(t)$ — непрерывная вектор-функция со значениями в $D(A)$ при $t \in R^1$, $Af(t)$ непрерывна и $f(t) \in S^-_{1,\varphi}$. Тогда справедливо представление*

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} U(t-s)f(s)ds. \tag{11}$$

Доказательство. Как следует из [2] (теорема 12.4.1), операторы Иосиды $A_n = nA(nI - A)^{-1}$ определены и ограничены при достаточно больших n. Эти операторы равномерно подчинены оператору A в том смысле, что

$$\|A_n u\| \le C\|Au\| \quad (u \in D(A)),$$

где C не зависит от n. Операторы A_n аппроксимируют оператор A на $D(A)$,

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n u - Au\| \to 0 \tag{12}$$

для любого $u \in D(A)$.

Кроме того, соответствующие полугруппы $U_n(t)$ равномерно по n ограничены и сильно сходятся к полугруппе $U(t)$, причем сходимость равномерная относительно ξ на любом промежутке $0 < h \le \xi$.

Пусть $u(t)$ — решение задачи (1) и

$$\sup_{t\in R^1} \|u(t)\| \le M_1 < \infty.$$

Запишем уравнение (1) в виде

$$\frac{du}{dt} = A_n u(t) + f(t) + (A - A_n)u(t).$$

Так как операторы A_n ограничены, то при любом $\tau < t$ имеем решение задачи Коши с начальным условием $u(\tau) = u_\tau$ в соответствии с ([7], с. 119)

$$u(t) = U_n(t-\tau)u(\tau) + \int_\tau^t U_n(t-s)f(s)ds + \int_\tau^t U_n(t-s)(A - A_n)u(s)ds.$$

Теперь устремим $n \to \infty$. Так как $u(t) \in D(A)$, то первое слагаемое в правой части стремится к пределу $U(t-\tau)u(\tau)$.

Далее рассмотрим второе слагаемое. Покажем, что для $f(s) \in D(A)$ и фиксированных $t, \tau \in R^1$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_\tau^t U_n(t-s)f(s)ds = \int_\tau^t U(t-s)f(s)ds. \tag{13}$$

Пусть $\|f\|_{\tau,t} = \sup\limits_{s\in[\tau,t]} \|f(s)\|$. Тогда в соответствии с [2] (теорема 12.4.1) имеем равномерную по n ограниченность при фиксированных τ и t

$$\left\| \int_\tau^t U_n(t-s)f(s)ds \right\| = \left\| \int_0^{t-\tau} U_n(\xi)f(t-\xi)d\xi \right\| \le \int_0^{t-\tau} \|U_n(\xi)\|d\xi \, \|f\|_{\tau,t} \le (M+1)\|f\|_{\tau,t}.$$

Аналогично, из [2] (теорема 12.4.1) следует ограниченность

$$\left\| \int_\tau^t U(t-s)f(s)ds \right\| \le M\|f\|_{\tau,t}.$$

Далее для $0 < h < t-\tau$ оценим

$$\begin{aligned}
\left\| \int_\tau^{t-h} [U_{n+m}(t-s) - U_n(t-s)]f(s)ds \right\| &= \left\| \int_h^{t-\tau} [U_{n+m}(\xi) - U_n(\xi)]f(t-\xi)d\xi \right\| = \\
&= \left\| \int_h^{t-\tau} \left[\int_0^\xi \frac{d}{dx} U_{n+m}(\xi - x)U_n(x)dx \right] f(t-\xi)d\xi \right\| = \\
&= \left\| \int_h^{t-\tau} \int_0^\xi U_{n+m}(\xi-x)U_n(x)dx(A_{n+m} - A_n)f(t-\xi)d\xi \right\| \le \\
&\le \int_h^{t-\tau} \int_0^\xi \|U_{n+m}(\xi-x)\| \, \|U_n(x)\|dx \, d\xi \, \|(A_{n+m}-A_n)f\|_{\tau,t} \le \\
&\le \int_0^\infty \int_0^\xi \|U_{n+m}(\xi-x)\| \, \|U_n(x)\|dx \, d\xi \, \|(A_{n+m}-A_n)f\|_{\tau,t} \le \\
&\le \int_0^\infty \|U_{n+m}(s)\|ds \int_0^\infty \|U_n(s)\|ds \, \|(A_{n+m}-A_n)f\|_{\tau,t} \le (M+1)^2 \|(A_{n+m}-A_n)f\|_{\tau,t}. \quad (14)
\end{aligned}$$

Устремив $m \to \infty$ в (14), можно убедиться, что предел справа в силу (12) существует и равен $\|(A - A_n)f\|_{\tau,t}$. Значит, существует и предел слева. При этом, учитывая, что для $\xi \in [h, \tau]$ семейство $U_n(t)$ равномерно ограничено и сходится равномерно к $U(\xi)$, при $m \to \infty$ получим

$$\left\| \int_h^{t-\tau} [U(\xi) - U_n(\xi)]f(t-\xi)d\xi \right\| \le (M+1)^2 \|(A-A_n)f\|_{\tau,t}. \quad (15)$$

Так как правая часть в неравенстве (15) от h не зависит, заключаем, что оно верно и для $h = 0$, т. е.

$$\left\| \int_0^{t-\tau} [U(\xi) - U_n(\xi)]f(t-\xi)d\xi \right\| = \left\| \int_\tau^t [U(t-s) - U_n(t-s)]f(s)ds \right\| \le (M+1)^2 \|(A-A_n)f\|_{\tau,t}.$$

Отсюда получим (13) и, следовательно,

$$u(t) = U(t-\tau)u(\tau) + \int_\tau^t U(t-s)f(s)ds. \quad (16)$$

Наконец, устремив $\tau \to -\infty$ при фиксированном t, видим, что первое слагаемое стремится к нулю в силу ограниченности $u(t)$ и неравенства

$$\|U(t-\tau)u(\tau)\| \le \|u\|_C e^{-\omega(t-\tau)} \varphi(t-\tau).$$

Второе слагаемое стремится к $\int\limits_{-\infty}^t U(t-s)f(s)ds$, т. к.

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{-\infty}^t U(t-s)f(s)ds - \int_\tau^t U(t-s)f(s)ds \right\| &\le \int_{-\infty}^\tau \|U(t-s)\| \, \|f(s)\|ds \le \\
&\le \int_{t-\tau}^{+\infty} e^{-\omega\tau}\varphi(\tau)\|f(t-\tau)\|d\tau \to 0
\end{aligned}$$

при $\tau \to -\infty$ в силу того, что $f(t) \in S^-_{1,\varphi}$. Следовательно,

$$\lim_{\tau \to -\infty} \int_\tau^t U(t-s)f(s)ds = \int_{-\infty}^t U(t-s)f(s)ds,$$

и, переходя к пределу в равенстве (16), представим решение в виде (11). $\square$

Следствие 1. Если решение задачи существует, то оно единственное.

Действительно, если бы существовало другое решение $u_1(t)$, то $\psi(t) = u(t) - u_1(t)$ удовлетворяло бы уравнению

$$\frac{d\psi}{dt} = A\psi(t)$$

и имело бы представление (11), где $f(t) \equiv 0$.

Условия существования решения задачи (1), (10) дает

Теорема 5. *Если A — производящий оператор полугруппы $U(t)$ класса $(1, A)_u$, выполнены условия теоремы 4 и функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера*

$$\sup_{|t_1 - t_2| \le 1} \frac{|f(t_1) - f(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\delta} = M < \infty$$

с таким $\delta \in (0,1)$, что $\int\limits_0^h \varphi(\tau)\tau^{\delta-1}d\tau \to 0$ при $h \to 0$, то функция $u(t)$ из (11) является решением задачи (1), (10).

Доказательство. Для $f(s) \in S^-_{p,\varphi}$ рассмотрим функцию

$$Qf(t) = \int_{-\infty}^t U(t-s)f(s)ds = \int_0^\infty U(\tau)f(t-\tau)d\tau.$$

Оценим

$$\|(Qf)(t)\| \le \int_0^\infty \|U(\tau)\| \|f(t-\tau)\| d\tau \le \int_0^\infty e^{-\omega\tau}\varphi(\tau)\|f(t-\tau)\|d\tau \le M_0 \|f\|_{S^-_{p,\varphi}}.$$

Рассмотрим функцию

$$(Q_h f)(t) = \int_{-\infty}^{t-h} U(t-s)f(s)ds \quad (h > 0). \tag{17}$$

Так как полугруппа $U(t)$ принадлежит классу $(1, A)_u$ и является непрерывно дифференцируемой при $t > 0$, то $(Q_h f)(t)$ также непрерывно дифференцируема и

$$\frac{d}{dt}(Q_h f)(t) = U(h)f(t-h) + \int\limits_{-\infty}^{t-h} AU(t-s)f(s)ds = U(h)f(t-h) + A\int\limits_{-\infty}^{t-h} U(t-s)f(s)ds.$$

Оценим

$$\|(Q_h f)(t) - (Qf)(t)\| = \left\| \int_{t-h}^t U(t-s)f(s)ds \right\| \le \int_0^h \|U(\tau)\| \, \|f(t-\tau)\| d\tau \le$$

$$\le \int_0^h e^{-\omega\tau}\varphi(\tau)\|f(t-\tau)\|d\tau \le \left[\int_0^h e^{-\omega\tau}\varphi(\tau)d\tau\right]^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{S^-_{p,\varphi}} \le M_h(\omega, p)\|f\|_{S^-_{p,\varphi}}.$$

Из (3) следует $M_h \to 0$ при $h \to 0$. Отсюда $(Q_h f)(t) - (Qf)(t) \to 0$ при $h \to 0$ равномерно по $t \in R^1$.

Далее рассмотрим

$$\int_{-\infty}^{t-h} AU(t-s)f(s)ds = \int_{-\infty}^{t-h} AU(t-s)f(t)ds + \int_{-\infty}^{t-h} AU(t-s)[f(s)-f(t)]ds =$$
$$= -\int_{-\infty}^{t-h} \frac{d}{ds}U(t-s)ds\, f(t) + \int_{-\infty}^{t-h} AU(t-s)[f(s)-f(t)]ds =$$
$$= -U(h)f(t) + \int_{-\infty}^{t-h} AU(t-s)[f(s)-f(t)]ds. \quad (18)$$

Оценим

$$\left\| \int_{-\infty}^{t} AU(t-s)[f(s)-f(t)]ds - \int_{-\infty}^{t-h} AU(t-s)[f(s)-f(t)]ds \right\| \le$$
$$\le \int_{t-h}^{t} \|AU(t-s)\| \frac{\|f(s)-f(t)\|}{|t-s|^{\delta}} |t-s|^{\delta} ds \le$$
$$\le \sup_{|t-s|\in R^1} \frac{\|f(t)-f(s)\|}{|t-s|^{\delta}} \int_{t-h}^{t} e^{-\omega(t-s)}\varphi(t-s)|t-s|^{\delta-1} ds \le$$
$$\le M \int_0^h e^{-\omega\tau}\varphi(\tau)\tau^{\delta-1}d\tau \le M\int_0^h \varphi(\tau)\tau^{\delta-1}d\tau \to 0$$

при $h \to 0$.

Таким образом, при $h \to 0$ из (18) получаем

$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{t-h} AU(t-s)f(s)ds = -f(t) + \int_{-\infty}^{t} AU(t-s)[f(s)-f(t)]ds \quad (19)$$

или

$$A(Qf)(t) = \int_{-\infty}^{t} AU(t-s)f(s)ds = -f(t) + \int_{-\infty}^{t} AU(t-s)[f(s)-f(t)]ds. \quad (20)$$

Заметим, что сходимость в (19) равномерная по $t \in R^1$.

Из (17) в силу замкнутости A следует, что т. к. предел справа существует, то существует и предел слева, т. е.

$$\frac{d}{dt}(Qf)(t) = \int_{-\infty}^{t} AU(t-s)[f(s)-f(t)]ds. \quad (21)$$

Вычитая из (21) равенство (20), получим

$$\frac{d}{dt}(Qf)(t) = A(Qf)(t) + f(t).$$

Таким образом, $(Qf)(t)$ является решением задачи (1)–(2). □

Учитывая инвариантность $S^{\pm}_{p,k}$-норм относительно сдвига, по аналогии с S_p-почти периодическими функциями ([9], с. 200) можно ввести пространства $S^{\pm}_{p,k}$-почти периодических функций в соответствии с работами [8]–[10] и со следующими определениями.

Определение 1. Числовое множество называется относительно плотным на R^1, если $\exists l > 0$ такое, что каждый отрезок длины l содержит хотя бы один элемент данного множества.

Определение 2. Число τ называется $S^{\pm}_{p,k}$,ε-почти периодом функции $f(x) \in S^{\pm}_{p,k}$, если для всех действительных x выполняется неравенство $\|f(x) - f(x+\tau)\|_{S^{\pm}_{p,k}} < \varepsilon$.

Определение 3. Функция $f(x) \in S^{\pm}_{p,k}$ называется $S^{\pm}_{p,k}$-почти периодической, если $\forall \varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество $S^{\pm}_{p,k}, \varepsilon$-почти периодов $f(x)$, т. е.

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists L = L(\varepsilon) > 0)\ (\forall a \in R^1)\ (\exists \tau \in [a; a+L])$$
$$(\forall x \in R^1)\ [\|f(x) - f(x+\tau)\|_{S^{\pm}_{p,k}} < \varepsilon].$$

Тогда из представления (11) следует

Теорема 6. *Если A — производящий оператор полугруппы $U(t)$ класса $(1, A)_u$, выполнены условия теоремы* 5 *и функция $f(t)$ является $S^{-}_{1,\varphi}$-почти периодической функцией, то решение задачи* (1), (10) *существует, единственно и является равномерной почти периодической функцией.*

Литература

1. Лаврентьев М.М. *Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений.* – Новосибирский гос. университет. Новосибирск, 1973. – 72 с.
2. Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы.* – – М.: Ин. лит., 1962. – 829 с.
3. Забрейко П.П., Зафиевский А.В. *Об одном классе полугрупп* // ДАН СССР. – 1969. – Т. 189. – № 5. – С. 934–937.
4. Соболевский П.Е. *О полугруппах роста α* // ДАН СССР. – 1971. – Т. 196. – № 3. – С. 535–537.
5. Крейн С.Г., Хазан М.И. *Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве* // Итоги науки и техн. Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1983. – Т. 21. – С. 130–264.
6. Сильченко Ю.Т. *Линейные дифференциальные уравнения с неплотно заданными операторными коэффициентами и связанные с ними краевые задачи*: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. – Минск, 1999. – 187 с.
7. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1970. – 534 с.
8. Жиков В.В., Левитан Б.М. *Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения.* – М.: Изд-во МГУ, 1978. – 204 с.
9. Левитан Б.М. *Почти-периодические функции.* – М.: ГИТТЛ, 1953. – 396 с.
10. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Наука, 1967. – 472 с.

Воронежский государственный университет

Поступила 07.07.2006