ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 8 (531)

УДК 517.518

Л.В. СМОВЖ

О КАСАТЕЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ ОПЕРАТОРОВ С ОБЩИМИ ЯДРАМИ

1. Основной результат

Одной из характерных черт пространств Харди H^p является свойство Фату — существование у функций из H^p предельных значений почти всюду (п. в.) на границе области определения, понимаемых как пределы вдоль некоторого семейства областей подхода [1]. При этом такие области невозможно существенно расширить без дополнительных ограничений гладкости на функции из класса Харди.

Изучение связи между геометрией областей, вдоль которых имеет место свойство Фату (области Фату), и гладкостью функций начато сравнительно недавно. Подробно ознакомиться с историей развития задачи, имеющимися результатами и наиболее интересными примерами можно в [2]–[6]. Как правило, свойство Фату легко выводится из оценок для соответствующих максимальных операторов, которым и уделялось основное внимание в [2]–[4]. Однако такая редукция возможна только для тех классов, где есть плотное подмножество функций, для которых сходимость п. в. имеет место. В работе [5] было продемонстрировано, что в этих вопросах иногда можно обойтись и без такого плотного множества. Целью данной работы является изучение этого эффекта в более общей ситуации.

Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, топология которого задается квазиметрикой d. Это означает, что функция $d : X \times X \to [0,\infty)$ удовлетворяет условиям

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad d(x,y) = d(y,x), \quad d(x,y) \le a_d[d(x,z) + d(z,y)]$$

для любых $x, y, z \in X$ (постоянная $a_d \ge 1$ не зависит от выбора элементов x, y, z в X) и семейство открытых шаров $B(x,t) = \{y \in X : d(x,y) < t\}$ образует базу топологии X. Для простоты считаем, что $\operatorname{diam} X = 1$. Если на X задана еще борелевская мера μ, связанная с квазиметрикой условием удвоения[1]

$$\mu(B(x,2t)) \le c\mu(B(x,t)),$$

то тройка (X,d,μ) называется пространством однородного типа [7]. Всюду ниже это условие на μ предполагается выполненным.

Пусть на X заданы две положительные борелевские меры μ и ν. Будем говорить, что пара мер μ и ν удовлетворяет условию $D(\beta,\gamma)$ и писать $(\mu,\nu) \in D(\beta,\gamma)$ (здесь β, γ — положительные функции), если для любого $x \in X$ справедливо

$$\frac{\nu(B(x,s))}{\beta(s)} \le c\frac{\mu(B(x,t))}{\gamma(t)}, \quad 0 < t \le s < 1, \tag{1}$$

[1]Здесь и всюду ниже через c обозначаются различные положительные постоянные, зависящие, возможно, от некоторых параметров, но эта зависимость не важна для нас.

где постоянная c не зависит от $x \in X$, t и s. В частности, когда $\nu = \mu$ и $\beta = \gamma$, условие (1) принимает вид

$$\frac{\mu(B(x,s))}{\gamma(s)} \le c\frac{\mu(B(x,t))}{\gamma(t)}, \quad 0 < t < s \le 1. \tag{2}$$

В таком случае говорим, что мера μ удовлетворяет условию $D(\gamma)$ и пишем $\mu \in D(\gamma)$.

Если $\gamma(t) = t^{\gamma_0}$, $\gamma_0 > 0$, то условие (2) превращается в обычное условие удвоения порядка γ_0. Однако для поставленных целей понадобится более общая форма условия удвоения (2) и его "двумерный" аналог (1), впервые введенные в [6].

Обозначим через $\mathbf{X}$ произведение $X \times [0,1)$ и будем естественным образом отождествлять X и границу $\mathbf{X}$ с помощью соответствия $x \longleftrightarrow (x,1)$.

Каждая положительная функция $\varepsilon : (0,1] \mapsto (0,1]$ определяет область подхода $\Gamma_\varepsilon(x)$ к границе $\mathbf{X}$ в точке $x \in X$:

$$\Gamma_\varepsilon(x) = \{(y,t) \in X \times [0,1) : d(x,y) < \varepsilon(1-t)\} \tag{3}$$

и $\Gamma_\varepsilon(x)$-$\lim u$, понимаемый естественным образом.

Степень "касания" области $\Gamma_\varepsilon(x)$ и $X \times \{1\}$ связана с поведением функции ε вблизи $t = 0$. Именно, чем медленнее $\varepsilon(t)$ сходится к нулю при $t \to 0$, тем шире $\Gamma_\varepsilon(x)$. Всюду в дальнейшем считаем, что функция ε, определяющая область (3), является непрерывной и строго возрастающей.

Семейства $\Gamma_\varepsilon = \{\Gamma_\varepsilon(x) : x \in X\}$ порождают максимальные функции

$$\mathcal{N}_\varepsilon u(x) = \sup(|u(y,t)| : (y,t) \in \Gamma_\varepsilon(x),\ 0 \le t < 1).$$

В случае $\varepsilon(t) \equiv at$ (где $a > 0$) вместо $\mathcal{N}_\varepsilon u$ будем писать $\mathcal{N}u$ и $\Gamma = \Gamma_\varepsilon$, а пределы функции $u \in C(\mathbf{X})$ вдоль областей Γ называть "некасательными".

На классе $C(\mathbf{X})$ определим операторы

$$\mathcal{K}_\omega u(x,t) = \int_0^1 \omega(1-s)u(x,ts)\frac{ds}{1-s}, \tag{4}$$

где измеримая функция $\omega : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ такова, что

$$\int_0^1 |\omega(s)|\frac{ds}{s} < \infty.$$

В силу этого условия оператор (4) является сглаживающим "в направлении границы", причем порядок сглаживания определяется поведением ω в окрестности точки $t = 0$.

Впервые подобные операторы рассматривались в работах [3]–[4], где было показано, что в виде (4) могут быть представлены, например, "главная часть" потенциалов Бесселя гармонических функций или дробные интегралы Коши–Сеге. Там же были указаны другие примеры операторов (4), возникающих в гармоническом анализе.

Обозначим через $\Omega(0)$ класс непрерывных функций $\omega : (0,1] \mapsto (0,1]$ таких, что $\omega(+0) = 0$, $\omega(1) = 1$ и $\omega(t)/t^b$ возрастает при некотором $b > 0$. Для $\gamma_0 > 0$ через $\Omega(\gamma_0)$ обозначим подкласс функций $\omega \in \Omega(0)$, для которых $\omega(t)/t^{\gamma_0 - b}$ убывает при некотором $b > 0$.

Приведем теперь основной результат данной работы.

Теорема 1. *Пусть $p > 0$, $\varepsilon \in \Omega(1)$, $\gamma \in \Omega(\gamma_0)$ для некоторого $\gamma_0 > 0$ и*

$$\omega, \gamma\omega^{-p} \in \Omega(0). \tag{5}$$

Пусть также μ и ν — меры на X, $\mu \in D(\gamma)$, $(\nu,\mu) \in D(\beta,\gamma)$, где[1]

$$\beta(t) \equiv \gamma(\varepsilon^{-1}(t))[\omega(\varepsilon^{-1}(t))]^{-p}. \tag{6}$$

[1]Здесь и всюду в дальнейшем φ^{-1} обозначает обратную функцию (φ — некоторая функция, своя в каждом конкретном случае).

Тогда для любой функции $u \in C(\mathbf{X})$ с $\mathcal{N}u \in L^p_\mu(X)$ для ν-почти всех $x \in X$ существует

$$\Gamma_\varepsilon(x)\text{-}\lim \mathcal{K}_\omega u.$$

Соотношение (6) выражает связь между основными параметрами — функциями β и γ из условия (2), ядром ω оператора (4), задающим дополнительное условие типа гладкости, и функцией ε, определяющей геометрию областей Фату.

Если $\nu = \mu$, то теореме 1 можно придать другую форму.

Теорема 2. *Пусть $p > 0$, $\gamma \in \Omega(\gamma_0)$ для некоторого $\gamma_0 > 0$ и выполнено* (5), $\varepsilon \in \Omega(1)$,

$$\varepsilon(t) \le c\gamma^{-1}\{\gamma(t)[\omega(t)]^{-p}\}.$$

Если мера μ на X удовлетворяет условию $D(\gamma)$, то для любой функции $u \in C(\mathbf{X})$ с $\mathcal{N}u \in L^p_\mu(X)$ для μ-почти всех $x \in X$ существует $\Gamma_\varepsilon(x)$-$\lim \mathcal{K}_\omega u$.

Ограничения (5) на ядро ω введены, чтобы исключить из рассмотрения предельные ситуации $\omega(t) \equiv 1$ и $\omega(t) \equiv \gamma(t)^{1/p}$, когда связь между параметрами ω, ε и β, т. е. тождество (6), выглядит иначе (см. [8] для случая $\omega(t) = 1$ и [2], [9] для $\omega(t) = t^{\gamma_0/p}$).

Отметим, что при условиях теоремы 1 справедлива оценка “сильного типа”

$$\|\mathcal{N}_\varepsilon(\mathcal{K}_\omega u)\|_{L^p_\nu(X)} \le c\|\mathcal{N}u\|_{L^p_\mu(X)}, \tag{7}$$

причем требование $\mu \in D(\gamma)$ для этого излишне (см. теорему 3). Тем не менее (7) недостаточно для заключения о сходимости п. в. при тех же условиях. Как показано выше, это связано с тем, что отсутствует второй компонент, нужный для вывода сходимости п. в. из оценок для максимального оператора: в классе функций $u \in C(\mathbf{X})$, удовлетворяющих условию $\mathcal{N}u \in L^p_\mu(X)$, нет плотного подмножества функций, для которых сходимость п. в. имеет место. Поэтому для доказательства теоремы 1 нужны дополнительные соображения, не связанные с плотностью.

2. Доказательство основной теоремы

Приведем сначала ряд известных результатов. Обозначим $\delta_t = 1 - t$, $t \in (0, 1)$.

Теорема 3 ([6]). *Пусть $p > 0$, $\varepsilon \in \Omega(1)$, $\gamma \in \Omega(\gamma_0)$ для некоторого $\gamma_0 > 0$ и выполнено* (5). *Пусть также ν — внешняя мера и μ — мера на X, (ν, μ) удовлетворяет условию $D(\beta, \gamma)$ с β из* (6). *Тогда для любой функции $u \in C(X \times [0, 1))$ имеет место неравенство* (7).

Лемма 1 ([6]). *В условиях теоремы* 3 *для любой функции $u \in C(X \times [0, 1))$ справедливо*

$$\|N^\omega_\varepsilon u\|_{L^p_\nu(X)} \le c\|\mathcal{N}u\|_{L^p_\mu(X)}, \tag{8}$$

где $N^\omega_\varepsilon u(x) = \sup\{\omega(\delta_t)|u(y, t)| : (y, t) \in \mathbf{X},\ d(x, y) < \varepsilon(\delta_t)\}$.

Замечание. Утверждения теоремы 3 и леммы 1 останутся справедливыми и в случае, если условие $\varepsilon \in \Omega(1)$ заменить парой условий $\varepsilon \in \Omega(0)$ и $\varepsilon(t) \ge t^{1-\eta}$ при некотором $\eta > 0$.

Лемма 2 ([5]). *Пусть $p > 0$, μ — мера на X, $u \in C(\mathbf{X})$, $\mathcal{N}_\varepsilon u \in L^p_\mu(X)$. Тогда равносильны следующие утверждения*:

1) *для почти всех точек $x \in X$ существует $\Gamma_\varepsilon(x)$-$\lim u$,*
2) $\|\mathcal{N}_\varepsilon(u - u_r)\|_{L^p_\mu(X)} \to 0$ *при $r \to 1$, где $u_r(x, t) = u(x, rt)$, $x \in X$, $0 \le t \le 1$.*

Понадобится также максимальная функция Харди–Литтлвуда

$$Mf(x) = \sup_B \left\{\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu : x \in B\right\}$$

и ее обычные свойства [7].

Лемма 3. *Для каждого $p \geq 1$ существует такая постоянная c, что для всех функций $f \in L^1_\mu(X)$ и $\lambda > 0$*

$$\mu\{Mf > \lambda\} \leq \frac{c}{\lambda}\|f\|_{L^1_\mu(X)}.$$

Перейдем теперь непосредственно к изучению операторов вида (4). Пусть $\alpha > 0$ таково, что функция $\omega(t)/t^{1+\alpha}$ суммируема на отрезке $[0, 1]$. Тогда имеет место представление

$$\mathcal{K}_\omega u(x,t) \equiv (\mathcal{K}_{\omega,\alpha} \circ I_\alpha)u(x,t), \quad u \in C(\mathbf{X}), \tag{9}$$

где $I_\alpha u(x,t) = (1-t)^\alpha u(x,t)$, $(x,t) \in \mathbf{X}$,

$$\mathcal{K}_{\omega,\alpha}u(x,t) = \int_0^1 \frac{\omega(1-s)}{(1-ts)^\alpha} u(x,ts)\frac{ds}{1-s}, \quad (x,t) \in \mathbf{X}.$$

Необходимые свойства операторов I_α и $\mathcal{K}_{\omega,\alpha}$ перечисляются в следующих вспомогательных утверждениях.

Лемма 4. *Пусть $p > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma \in \Omega(\gamma_0)$ для некоторого $\gamma_0 > 0$, $t^{-\alpha p}\gamma(t) \in \Omega(0)$ и*

$$\varepsilon_0(t) \equiv \gamma^{-1}\{t^{-\alpha p}\gamma(t)\}. \tag{10}$$

Пусть также мера μ на X удовлетворяет условию удвоения $D(\gamma)$. Тогда для любой функции $u \in C(\mathbf{X})$ с $\mathcal{N}u \in L^p_\mu(X)$

1) $\|\mathcal{N}_{\varepsilon_0}(I_\alpha u)\|_{L^p_\mu(X)} \leq c\|\mathcal{N}u\|_{L^p_\mu(X)}$,

2) $\Gamma_{\varepsilon_0}(x)$-$\lim I_\alpha u = 0$ *для μ-почти всех точек $x \in X$,*

3) $\|\mathcal{N}_{\varepsilon_0}(I_\alpha(u - u_r))\|_{L^p_\mu(X)} \to 0$ *при $r \to 1$,*

где $0 < r < 1$, $u_r(x,t) = u(x,rt)$, $x \in X$, $0 \leq t \leq 1$.

Доказательство. Утверждение 1) легко получить как следствие леммы 1 для случая $\nu = \mu$, $\omega(t) = t^\alpha$ и $\varepsilon = \varepsilon_0$. Действительно, т. к. $\gamma \in \Omega(\gamma_0)$ и $t^{-\alpha p}\gamma(t) \in \Omega(0)$, то $\varepsilon_0 \in \Omega(0)$ и найдется такое $\eta > 0$, что $t^{1-\eta} \leq \varepsilon_0(t)$. Поэтому в силу замечания 1 имеет место неравенство (8).

Докажем утверждение 2). Так как $\mathcal{N}u \in L^p(X)$, то найдется положительная возрастающая функция ρ на $\mathbb{R}_+$, для которой $\rho(t) \equiv 1$ при $t \in [0,1]$, $\lim\limits_{t\to\infty} \rho(t) = +\infty$ и

$$\int_X (\mathcal{N}u)^p \rho(\mathcal{N}u)d\mu < \infty.$$

Обозначим $\Phi(t) = t^p\rho(t)$, и пусть $\Psi = \Phi^{-1}$ — обратная функция. Следовательно, $\Psi(t) = t^{1/p}\psi(t)$, где $\psi(t) \equiv 1$ на отрезке $[0,1]$ и убывает на $[1,\infty)$, причем $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t) = 0$.

Так как $\Phi(\mathcal{N}u) \in L^1(X)$, то в силу леммы 3 максимальная функция Харди–Литтлвуда $M(\Phi(\mathcal{N}u))(x)$ конечна п. в. на X. Следовательно, если покажем, что $\Gamma_{\varepsilon_0}(x)$-предел функции $I_\alpha u$ существует и равен нулю в каждой точке $x \in X$, где $M(\Phi(\mathcal{N}u))(x) < \infty$, то тем самым утверждение 2) будет доказано.

Пусть $(y,t) \in \Gamma_{\varepsilon_0}(x)$ и $0 < \delta_t < \tau$. Так как функция Φ возрастает, то

$$|u(y,t)| \leq \mathcal{N}u(z) \;\Rightarrow\; \Phi(|u(y,t)|) \leq \Phi(\mathcal{N}u(z)), \quad z \in B(y,\delta_t). \tag{11}$$

Не ограничивая общности, положим $M(\Phi(\mathcal{N}u))(x) = 1$ и проинтегрируем (11) по z. Так как $x \in B(y, \varepsilon_0(\delta_t))$, то в силу (2)

$$|u(y,t)| \leq \Psi\left\{\frac{\mu(B(y,\varepsilon_0(\delta_t)))}{\mu(B(y,\delta_t))}M(\Phi(\mathcal{N}u))(x)\right\} \leq \left\{c\frac{\gamma(\varepsilon_0(\delta_t))}{\gamma(\delta_t)}\right\}^{1/p}\psi\left(c\frac{\gamma(\varepsilon_0(\delta_t))}{\gamma(\delta_t)}\right) \leq c\delta_t^{-\alpha}\psi(c\delta_t^{-\alpha p}).$$

Следовательно,

$$\sup\{(1-t)^\alpha|u(y,t)| : d(x,y) < \varepsilon_0(\delta_t),\ 0 < \delta_t < \tau\} \leq c\psi(c\tau^{-\alpha p}) \to 0, \quad \tau \to 0.$$

Отсюда непосредственно следует существование нулевого $\Gamma_{\varepsilon_0}(x)$-$\lim I_\alpha u$ для точки $x \in X$.

Для обоснования утверждения 3) воспользуемся утверждением 2) и покажем сначала, что

$$\lim_{r\to 1}\mathcal{N}_{\varepsilon_0}(I_\alpha(u-u_r))(x)=0 \quad \mu\text{-п. в. на } X. \tag{12}$$

Пусть $x\in X$ и $\Gamma_{\varepsilon_0}(x)$-$\lim I_\alpha u=0$. Для любого $\delta>0$ выберем $\delta'>0$ так, что $\sup\{|I_\alpha u(y,s)|:(y,s)\in A\}<\delta/2$, $A=\{(y,s)\in\Gamma_{\varepsilon_0}(x),\ 0<\delta_s<2\delta'\}$ и обозначим $B=\{(y,s)\in\overline{\Gamma_{\varepsilon_0}(x)}:\delta'\le\delta_s\le 1\}$. Тогда при $0<1-r<\delta'$ для $\mathcal{N}_{\varepsilon_0}(I_\alpha(u-u_r))(x)$ справедливо соотношение

$$\mathcal{N}_{\varepsilon_0}(I_\alpha(u-u_r))(x)\le\max\{2\sup_A|I_\alpha u|,\ \sup_B|I_\alpha(u-u_r)|\}.$$

Так как $u\in C(\mathbf{X})$, то она равномерно непрерывна на B и, следовательно, найдется $0<\delta''<\delta'$ такое, что $\sup\limits_B|I_\alpha(u-u_r)|<\delta$ для всех $0<1-r<\delta''$. Таким образом, $\mathcal{N}_{\varepsilon_0}(I_\alpha(u-u_r))(x)$ мало при малых $r>0$, и имеет место (12).

Утверждение 3) получается в силу 1), равенства (12) и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Таким образом, оператор I_α ограниченно действует из класса $C(\mathbf{X})$ в подкласс непрерывных функций, имеющих некасательные пределы п. в. на $X\times\{1\}$. $\square$

Лемма 5. *Пусть $p>0$, $\alpha\ge 0$, $\varepsilon\in\Omega(0)$, $\gamma\in\Omega(\gamma_0)$ для некоторого $\gamma_0>0$,*

$$t^{-\alpha p}\gamma(t), t^{-\alpha}\omega(t), \gamma\omega^{-p} \ \in\Omega(0) \tag{13}$$

и найдется такая постоянная $0<\eta<1$, что для всех $t\in(0,1]$

$$t^{-\alpha p}\gamma(t^{1-\eta})\le\gamma(\varepsilon(t)). \tag{14}$$

Пусть также μ и ν — меры на X и $(\nu,\mu)\in D(\beta,\gamma)$ с β из (6). Тогда для любой функции $u\in C(\mathbf{X})$ справедливо $\|\mathcal{N}_\varepsilon(K_{\omega,\alpha}u)\|_{L^p_\nu(X)}\le c\|\mathcal{N}_{\varepsilon_0}u\|_{L^p_\mu(X)}$, где функция ε_0 определяется тождеством (10).

Доказательство. Введем для удобства следующие обозначения:

$$d_*(x,y)=\varepsilon_0^{-1}(d(x,y)),\quad \omega_*(t)=t^{-\alpha}\omega(t),\quad \varepsilon_*(t)=\varepsilon_0^{-1}(\varepsilon(t)),$$
$$\gamma_*(t)=\gamma(\varepsilon_0(t)),\quad \beta_*(t)=\beta(\varepsilon_0(t)),\quad x,y\in X,\quad t\in(0,1).$$

Так как $\gamma\in\Omega(\gamma_0)$ и выполнены (13) и (14), то $\varepsilon_0,\varepsilon_*\in\Omega(0)$ и

$$\omega_*,\gamma_*\omega_*^{-p}\in\Omega(0),\quad \gamma_*\in\Omega(\gamma_0),\quad \varepsilon_*(t)\ge t^{1-\eta}\ \text{ для всех }\ t\in(0,1).$$

Кроме того, в силу монотонности $\varepsilon_0(t)t^{-b}$ функция d_* является квазиметрикой:

$$d_*(x,y)=0\ \Leftrightarrow\ x=y,\quad d_*(x,y)=d_*(y,x),$$
$$d_*(x,y)\le\varepsilon_0^{-1}(a_d[d(x,z)+d(z,y)])\le(2a_d)^{1/b}[d_*(x,z)+d_*(z,y)].$$

Заметим также, что $\beta_*(t)\equiv\gamma_*(\varepsilon_*^{-1}(t))[\omega_*(\varepsilon_*^{-1}(t))]^{-p}$. Следовательно, если $(\nu,\mu)\in D_d(\beta,\gamma)$ с β из (6), то $(\nu,\mu)\in D_{d^*}(\beta_*,\gamma_*)$.

Далее, принимая во внимание замечание, воспользуемся теоремой 3 для пространства (X,d_*,μ), меры ν и функций ω_*, ε_*, γ_*. Тогда справедливо неравенство

$$\|(\mathcal{N}_{\varepsilon_*}(\mathcal{K}_{\omega_*}u))_{d_*}\|_{L^p_\nu(x)}\le c\|(\mathcal{N}u)_{d_*}\|_{L^p_\mu(X)}. \tag{15}$$

В силу определения квазиметрики d_* получим, что области $\Gamma_{\varepsilon_*}(x)$ и $\Gamma(x)$ подхода к границе в (X,d_*) совпадают соответственно с областями $\Gamma_\varepsilon(x)$ и $\Gamma_{\varepsilon_0}(x)$ в (X,d). Действительно,

$$(\Gamma_{\varepsilon_*}(x))_{d_*}=\{(y,t)\in X\times[0,1):\varepsilon_0^{-1}(d(x,y))<\varepsilon_0^{-1}(\varepsilon(1-t))\}=(\Gamma_\varepsilon(x))_d,$$
$$(\Gamma(x))_{d_*}=\{(y,t)\in X\times[0,1):\varepsilon_0^{-1}(d(x,y))<(1-t)\}=(\Gamma_{\varepsilon_0}(x))_d.$$

Поэтому

$$(\mathcal{N}_{\varepsilon_*}u)_{d_*}=(\mathcal{N}_\varepsilon u)_d,\quad (\mathcal{N}u)_{d_*}=(\mathcal{N}_{\varepsilon_0}u)_d.$$

Кроме того, легко видеть, что

$$\mathcal{K}_{\omega,\alpha}u(x,t) \le \mathcal{K}\omega_* u(x,t), \quad x \in X, \quad 0 \le t < 1.$$

Таким образом, в силу (15) получим

$$\|\mathcal{N}_\varepsilon(K_{\omega,\alpha}u)\|_{L^p_\nu(X)} \le \|(\mathcal{N}_{\varepsilon_*}(\mathcal{K}_{\omega_*}u))_{d_*}\|_{L^p_\nu(X)} \le c\|\mathcal{N}_{\varepsilon_0}u\|_{L^p_\mu(X)}. \quad \square$$

Доказательство теоремы 1. Так как $\varepsilon \in \Omega(1)$ и выполнено условие (5), то найдутся такие постоянные $b_0 > 0$ и $b_1 > 0$, что для всех $t < s$ справедливы неравенства

$$t^{-b_0}\omega(t) \le s^{-b_0}\omega(s), \quad t^{-b_0}\gamma(t)\omega(t)^{-p} \le s^{-b_0}\gamma(s)\omega(s)^{-p}, \quad \varepsilon(t)t^{-b_1} \le \varepsilon(s)s^{-b_1}, \quad \varepsilon(s)s^{b_1-1} \le \varepsilon(t)t^{b_1-1}.$$

Пусть $\alpha < b^2/p$ и $\eta = b - \alpha p/b$, где $b = \min\{b_0, b_1, p, 1\}$, тогда

$$t^{-\alpha}\omega(t),\, t^{-\alpha p}\gamma(t) \in \Omega(0), \quad t^{-\alpha p}\gamma(t^{1-\eta}) \le \gamma(\varepsilon(t)), \quad 0 < t < 1.$$

Следовательно, используя разложение (9) и леммы 5 и 4, получим

$$\|\mathcal{N}_\varepsilon(\mathcal{K}_\omega u - \mathcal{K}_\omega u_r)\|_{L^p_\nu(X)} = \|\mathcal{N}_\varepsilon(\mathcal{K}_{\omega,\alpha} \circ I_\alpha(u-u_r))\|_{L^p_\nu(X)} \le c\|\mathcal{N}_{\varepsilon_0}(I_\alpha(u-u_r))\|_{L^p_\mu(X)} \to 0, \quad r \to 1.$$

Теперь в силу леммы 2 заключаем, что для ν-почти всех точек $x \in X$ существует $\Gamma_\varepsilon(x)$-предел функции $\mathcal{K}_\omega u$. $\square$

Литература

1. Fefferman C., Stein E.M. *H^p spaces of several variables* // Acta Math. – 1972. – V. 129. – № 3–4. – P. 137–193.
2. Nagel A., Rudin W., Shapiro J. *Tangential boundary behavior of function in Dirichlet-type spaces* // Ann. Math. – 1982. – V. 116. – № 2. – P. 331–360.
3. Nagel A., Stein E.M. *On certain maximal functions and approach regions* // Adv. in Math. – 1984. – V. 54. – № 1. – P. 83–106.
4. Кротов В.Г. *Оценки для максимальных операторов, связанных с граничным поведением, и их приложения* // Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. – 1989. – Т. 190. – С. 117–138.
5. Кротов В.Г. *О граничном поведении функций из пространств типа Харди* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1990. – Т. 54. – № 5. – С. 957–974.
6. Кротов В.Г., Смовж Л.В. *О граничном поведении операторов с общими ядрами* // Тез. докл. 12-й Саратовской зимней школы. – Саратов, 2004. – С. 109–110.
7. Coifman R.R., Weiss G. *Extensions of Hardy spaces and their use in analysis* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 83. – № 4. – P. 569–645.
8. Sjögren P. *Une remarque sur la convergence des fonctions propres du Laplasian à valeur propre critique* // Lect. Notes in Math. – 1984. – V. 1096. – P. 544–548.
9. Кротов В.Г. *О граничном поведении дробных интегралов голоморфных функций в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$* // Изв. вузов. Математика. – 1988. – № 4. – С. 73–75.

Белорусский государственный университет

Поступила 27.12.2004