ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 4 (515)

УДК 517.983

В.Н. БОБОЧКО

НЕСТАБИЛЬНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ТОЧКА ПОВОРОТА В ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

1. Постановка задачи

Рассмотрим сингулярно возмущенное дифференциальное уравнение (СВДУ)

$$\mathbf{L}_\varepsilon y(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^3 y'''(x,\varepsilon) + x\widetilde{a}(x)y'(x,\varepsilon) + b(x)y(x,\varepsilon) = h(x) \tag{1.1}$$

при $\varepsilon \to +0$, $x \in I = [0,1]$.

В [1] исследовано СВДУ (1.1) при выполнении условий $\widetilde{a}(x) > 0$, $b(x) < 0$, а в [2] — при $\widetilde{a}(x) > 0$ и $b(x) > 0$. В цитируемых работах существенным было то, что в обоих случаях точка поворота была стабильной. Стабильность точки поворота обеспечивало применение аппарата функций Эйри–Дородницына для построения асимптотики решения этого уравнения.

В данной работе уравнение (1.1) исследуем при выполнении таких условий.

Условие 1. $a(x), b(x), h(x) \in \mathbf{C}^\infty[0,1]$.

Условие 2. $a(x) = x\widetilde{a}(x)$, причем $\widetilde{a}(x) < 0$ и $b(x) < 0$ при $x \in I \equiv [0,1]$.

К сожалению, до настоящего времени аппарат функций Эйри–Дородницына ([3], раздел 1; [4]; [5], с. 198) не удалось применить в случае нестабильной точки поворота. Поэтому в предложенной работе для построения равномерно пригодной асимптотики решения СВДУ (1.1) на всем отрезке $[0,1]$ вместо функций Эйри–Дородницына будет использована другая модификация функций Эйри — функции Эйри–Лангера, свойства которых описаны в ([3], раздел 1; [6], с. 264–270; [7], глава 11). С использованием функций Эйри–Лангера разработан метод построения равномерно пригодной асимптотики решения уравнения Лиувилля и систем СВДУ как со стабильной, так и с нестабильной и внутренней алгебраическими точками поворота ([3], разделы 5–7). Поэтому основной целью этой работы будет обобщение результатов, полученных и описанных в [3] для нестабильной алгебраической точки поворота, на случай нестабильной дифференциальной точки поворота.

В этой работе исследуем случай, когда $\rho = \frac{b(0)}{\widetilde{a}(0)} \in N$. Поскольку $\rho > 0$, то решение вырожденного уравнения

$$\mathbf{L}_0 \omega(x) \equiv x\widetilde{a}(x)\omega'(x) + b(x)\omega(x) = h(x) \tag{1.2}$$

и его производные по аналогии с [2] не являются гладкими в окрестности точки поворота $x = 0$. Поэтому в явном виде решение уравнения (1.2) нельзя использовать для построения равномерно пригодной асимптотики решения СВДУ (1.1).

2. Расширение возмущенного уравнения

Согласно разработанному методу [1]–[3] наряду с независимой переменной $x \in I$ введем новую переменную t по формуле

$$t \equiv \varepsilon^{-1}\varphi(x) \equiv \Phi(x,\varepsilon), \tag{2.1}$$

где регуляризующая функция $\varphi(x)$ подлежит определению.

С вводом дополнительной переменной t в виде (2.1) для определения расширенной функции $\widetilde{y}(x,t,\varepsilon)$ получим расширенное уравнение

$$\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon \widetilde{y}(x,t,\varepsilon) = h(x), \tag{2.2}$$

в котором расширенный оператор $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$ имеет вид

$$\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon \equiv [\varphi'(x)]^3\frac{\partial^3}{\partial t^3} + \varepsilon\mathbf{d}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon^2\mathbf{m}\frac{\partial}{\partial t} + a(x)\left[\varepsilon^{-1}\varphi'(x)\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right] + \varepsilon^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} + b(x), \tag{2.3}$$

где

$$\mathbf{d} \equiv 3[\varphi'(x)]^2\frac{\partial}{\partial x} + 3\varphi'(x)\varphi''(x),$$
$$\mathbf{m} \equiv 3\varphi'(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 3\varphi''(x)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi'''(x).$$

В отличие от [1] и [2], в которых был использован модельный оператор Эйри–Дородницына, в тождестве (2.3) выделим модельный оператор Эйри–Лангера, т. е. $\mathbf{T} \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - t$, следующим образом:

$$[\varphi'(x)]^3\frac{\partial^3}{\partial t^3} + \varepsilon^{-1}\varphi'(x)a(x)\frac{\partial}{\partial t} \equiv [\varphi'(x)]^3\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{a(x)}{\varepsilon[\varphi'(x)]^2}\right]\frac{\partial}{\partial t} \equiv [\varphi'(x)]^3\mathbf{T}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Здесь введено обозначение

$$\frac{a(x)}{\varepsilon[\varphi'(x)]^2} \equiv -t\big|_{t=\varepsilon^{-1}\varphi(x)} \equiv -\varepsilon^{-1}\varphi(x).$$

Таким образом, регуляризующую функцию $\varphi(x)$ определяем как решение задачи

$$[\varphi'(x)]^2\varphi(x) = -x\widetilde{a}(x) \equiv -a(x), \quad \varphi(0) = 0. \tag{2.4}$$

С учетом тождества (2.4) $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$ запишем в виде

$$\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon \equiv [\varphi'(x)]^3\mathbf{T}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{L}_0 + \varepsilon\mathbf{d}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon^2\mathbf{m}\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^3\frac{\partial^3}{\partial x^3}. \tag{2.5}$$

Замечание 1. Явный вид расширенного оператора (2.5) формально полностью совпадает с соответствующим расширенным оператором, полученным в [2] (см. тождество (2.3)). Пространства безрезонансных решений (ПБР) для исследуемого случая уже будут отличаться от ПБР, описанных в [2], и тем более от ПБР, описанных в [1]. Однако общий формализм построения линейно независимых решений СВДУ (1.1) будет сохранен.

Для исследуемого случая, т. е. при выполнении условия 2, регуляризующая функция имеет вид

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{-\tau\widetilde{a}(\tau)}d\tau\right)^{2/3}.$$

Легко проверить справедливость следующих свойств $\varphi(x)$:

1) $\varphi(x) \in C^\infty[0,1]$;
2) $\varphi(x) > 0$ для всех $x \in (0,1]$;

3) функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает на всем отрезке I, т. е. $\varphi'(x) > 0$ для всех $x \in [0,1]$;

4) $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \sqrt[3]{-a'(0)} \equiv \sqrt[3]{-\widetilde{a}(0)}$.

Из полученного видно, что в исследуемом случае, т. е. когда $\widetilde{a}(x) < 0$, регуляризующая функция $\varphi(x)$ выбрана таким образом, что одна из функций Эйри–Лангера, а именно $Bi(t)$, неограниченно возрастает при $t \to +\infty$.

Чтобы не отсылать читателя к не всегда доступной соответствующей литературе ([6], с. 267), приведем асимптотические равенства, когда $t \to +\infty$,

$$Ai(t) = \frac{e^{-\xi}}{2\sqrt{\pi}\sqrt[4]{t}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k \xi^{-k}, \qquad Bi(t) = \frac{e^{\xi}}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{t}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^{-k}, \tag{2.6}$$

$$Ai'(t) = \frac{-\sqrt[4]{t}e^{-\xi}}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k d_k \xi^{-k}, \quad Bi'(t) = \frac{\sqrt[4]{t}e^{\xi}}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \xi^{-k}, \tag{2.7}$$

где

$$c_0 = d_0 = 1, \quad \xi = \frac{2}{3}t^{3/2}, \quad c_k = \frac{(2k+1)(2k+3)\cdots(6k-1)}{216^k k!}, \quad d_k = -\frac{6k+1}{6k-1}, \quad k \in N.$$

Из написанных асимптотических формул видно, что при $t \to +\infty$ функция $Ai(t)$ будет ограниченной, а $Bi(t)$ и ее производная неограниченно возрастают.

3. Пространства безрезонансных решений

Введем множества (подпространства) функций

$$\begin{gathered} Y_{1r} = \{V_{1r}(x)Ai(t) + Q_{1r}(x)Ai'(t)\}, \\ Y_{2r} = \{V_{2r}(x)Bi(t) + Q_{2r}(x)Bi'(t)\}, \\ Y_{3r} = \{f_r(x)\nu(t) + g_r(x)\nu'(t)\}, \quad Y_{4r} = \{\omega_r(x)\}, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где $V_{kr}(x), Q_{kr}(x), f_r(x), g_r(x), \omega_r(x) \in C^\infty[I]$, $k = 1, 2$. Здесь $Ai(t)$ и $Bi(t)$ — функции Эйри–Лангера, а существенно особая функция (СОФ) $\nu(t)$ имеет вид

$$\nu(t) = Bi(t)\int_\infty^t Ai(\tau)d\tau - Ai(t)\int_0^t Bi(\tau)d\tau. \tag{3.2}$$

Функция (3.2) впервые была введена в [8] и использована в [9] при исследовании уравнения Лиувилля с нестабильной и внутренней точками поворота. Напомним только, что $\nu(t)$ является решением задачи ([3], сс. 59–63, 71)

$$\nu''(t) - t\nu(t) = \pi^{-1}, \quad \nu(0) = -3^{-7/6}\Gamma^{-1}(\tfrac{2}{3}), \quad \nu'(0) = -3^{-5/6}\Gamma^{-1}(\tfrac{1}{3})$$

и $\nu(t) = O(t^{-1})$ при $t \to +\infty$.

Из подпространств (3.1) составим новое пространство безрезонансных решений

$$Y_r = \bigoplus_{k=1}^{4} Y_{rk}. \tag{3.3}$$

Элемент ПБР (3.3) имеет вид

$$U_r(x,t) = V_{1r}(x)Ai(t) + Q_{1r}(x)Ai'(t) + V_{2r}(x)Bi(t) + Q_{2r}(x)Bi'(t) + \\ + f_r(x)\nu(t) + g_r(x)\nu'(t) + \omega_r(x). \tag{3.4}$$

Впоследствии необходимы будут некоторые тождества, справедливость которых легко проверить:

$$
\begin{aligned}
&W_k^{(3)}(t) \equiv W_k(t) + tW_k'(t)\big|_{t=\varepsilon^{-1}\varphi(x)} \equiv W_k(t) + \varepsilon^{-1}\varphi(x)W_k'(t),\\
&W_k^{(4)}(t) \equiv 2W_k'(t) + t^2\big|_{t=\varepsilon^{-1}\varphi(x)}W_k(t) \equiv 2W_k'(t) + \varepsilon^{-2}\varphi^2(x)W_k(t)
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\nu^{(3)}(t) \equiv \nu(t) + t\nu'(t)\big|_{t=\varepsilon^{-1}\varphi(x)} \equiv \nu(t) + \varepsilon^{-1}\varphi(x)\nu'(t),\\
&\nu^{(4)}(t) \equiv 2\nu'(t) + t^2\big|_{t=\varepsilon^{-1}\varphi(x)}\nu(t) + \pi^{-1}t\big|_{t=\varepsilon^{-1}\varphi(x)} \equiv 2\nu'(t) + \varepsilon^{-2}\varphi^2(x)\nu(t) + \pi^{-1}\varepsilon^{-1}\varphi(x).
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

В тождествах (3.5) введены обозначения $W_1(t) \equiv Ai(t)$ и $W_2(t) \equiv Bi(t)$.

4. Регуляризация сингулярно возмущенного уравнения

Для проведения регуляризации СВДУ (1.1) необходимо исследовать действие расширенного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$ на элемент ПБР (3.3), т. е. на функцию (3.4). Учитывая свойства СОФ $Ai(t)$, $Bi(t)$ и их производных, т. е. равенства (3.5), получим тождества

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon[V_{1r}(x)Ai(t) + Q_{1r}(x)Ai'(t) + V_{2r}(x)Bi(t) + Q_{2r}(x)Bi'(t)] \equiv\\
&\qquad\equiv P_{1r}^V(x,\varepsilon)Ai(t) + P_{1r}^Q(x,\varepsilon)Ai'(t) + P_{2r}^V(x,\varepsilon)Bi(t) + P_{2r}^Q(x,\varepsilon)Bi'(t),
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

где

$$
\begin{aligned}
P_{kr}^V(x,\varepsilon) \equiv\ & \varepsilon^{-2}\varphi'(x)\varphi(x)\big[[\varphi'(x)]^2\varphi(x) + a(x)\big]Q_{kr}(x) + \mathbf{D_1}V_{kr}(x) +\\
&+ \varepsilon[\mathbf{d} + \varphi(x)\mathbf{m}]Q_{kr}(x) + \varepsilon^3 V_{kr}'''(x), \quad k = 1,2,
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{kr}^Q(x,\varepsilon) \equiv\ & \varepsilon^{-1}\varphi'(x)\big[[\varphi'(x)]^2\varphi(x) + a(x)\big]V_{kr}(x) + \mathbf{D_2}Q_{kr}(x) +\\
&+ \varepsilon^2\mathbf{m}V_{kr}(x) + \varepsilon^3 Q_{kr}'''(x), \quad k = 1,2.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Аналогично, учитывая равенства (3.6), получим

$$
\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon[f_r(x)\nu(t) + g_r(x)\nu'(t) + \omega_r(x)] \equiv P_r^f(x,\varepsilon)\nu(t) + P_r^g(x,\varepsilon)\nu'(t) + P_r^\omega(x,\varepsilon),
\tag{4.4}
$$

где

$$
P_r^f(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{-2}\varphi'(x)\varphi(x)\big[[\varphi'(x)]^2\varphi(x)+a(x)\big]g_r(x)+\mathbf{D_1}f_r(x)+\varepsilon[\mathbf{d}+\varphi(x)\mathbf{m}]g_r(x)+\varepsilon^3 f_r'''(x),
\tag{4.5}
$$

$$
P_r^g(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{-1}\varphi'(x)\big[[\varphi'(x)]^2\varphi(x)+a(x)\big]f_r(x)+\mathbf{D_2}g_r(x)+\varepsilon^2\mathbf{m}f_r(x)+\varepsilon^3 g_r'''(x),
\tag{4.6}
$$

$$
P_r^\omega(x,\varepsilon) \equiv \mathbf{L_0}\omega_r(x)+\varepsilon\pi^{-1}\mathbf{d}f_r(x)+\varepsilon^2\pi^{-1}\mathbf{m}g_r(x)+\varepsilon^3\omega_r'''(x).
\tag{4.7}
$$

Операторы $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ будут играть основную роль в построении асимптотики линейно независимых решений исследуемого уравнения. Поэтому запишем явный вид этих операторов

$$
\mathbf{D}_1 \equiv -2a(x)\frac{\partial}{\partial x} + b_1(x), \quad \mathbf{D}_2 \equiv -2a(x)\frac{\partial}{\partial x} + b_2(x),
\tag{4.8}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&b_1(x) \equiv b(x) + [\varphi'(x)]^3 + 3\varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x),\\
&b_2(x) \equiv b(x) + 2[\varphi'(x)]^3 + 3\varphi(x)\varphi'(x)\varphi''(x).
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Замечание 2. Сравнивая выражения (4.8), (4.9) с соответствующими выражениями, полученными в [2] (см. (2.15), (2.16)), видим отличие только в некоторых знаках. Это обстоятельство объясняется тем, что в данной работе использован модельный оператор Эйри–Лангера $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - t$, а в [1], [2] использован оператор Эйри–Дородницына $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + t$. Несмотря на незначительные изменения, все же необходимо будет тщательно исследовать вопрос о существовании достаточно гладких решений дифференциальных уравнений, содержащих эти операторы (см. серии дифференциальных уравнений (5.4), (5.5) и (5.12), (5.13)).

Анализируя полученные тождества (4.1)–(4.7), сделаем

Вывод 1. 1) Подпространства Y_{1r} и Y_{2r} инвариантны относительно расширенного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$;

2) само подпространство Y_{3r} не является инвариантным относительно расширенного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$. Однако подпространство $Y_{3r} \bigoplus Y_{4r}$ уже инвариантно относительно расширенного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$;

3) пространства Y_r инвариантны относительно расширенного оператора $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$;

4) расширенный оператор $\widetilde{\mathbf{L}}_\varepsilon$ в его действии на элементы из пространства ПБР (3.3) уже является регулярно возмущенным относительно малого параметра $\varepsilon > 0$ в этом пространстве. Значит, в пространстве безрезонансных решений Y_r проведена *регуляризация СВДУ* (1.1).

Замечание 3. С учетом определения регуляризующей функции $\varphi(x)$ как решения задачи (2.4), выражение $[\varphi'(x)]^2\varphi(x) + a(x)$, находящееся в записанных равенствах (4.2), (4.3), (4.5) и (4.6), тождественно равно нулю, и это условие впоследствии будет учтено.

5. Формализм построения ряда решений расширенного уравнения

1. Согласно сделанным выводам сначала построим асимптотику двух решений расширенного уравнения (2.2), соответствующих точке поворота в подпространствах Y_{kr}, $k = 1, 2$. Эти решения строим в виде рядов

$$y_1(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r y_{1r}(x,t) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [V_{1r}(x)Ai(t) + Q_{1r}(x)Ai'(t)], \quad y_{1r}(x,t) \in Y_{1r}; \tag{5.1}$$

$$y_2(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r y_{2r}(x,t) \equiv \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r [V_{2r}(x)Bi(t) + Q_{2r}(x)Bi'(t)], \quad y_{2r}(x,t) \in Y_{2r}. \tag{5.2}$$

Подставим ряды (5.1) и (5.2) в расширенное уравнение (2.2). Учитывая линейную независимость СОФ $Ai(t)$, $Bi(t)$, их производных и (4.1), получим

$$P^V_{kr}(x,\varepsilon) \equiv 0, \quad P^Q_{kr}(x,\varepsilon) \equiv 0, \quad k = 1, 2. \tag{5.3}$$

Далее необходимо показать, что из (5.3) будут определены все коэффициенты рядов (5.1), (5.2) и все полученные при этом функции будут достаточно гладкими на всем отрезке $[0, 1]$, включая и точку поворота $x = 0$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра в тождествах (5.3), получим для определения коэффициентов рядов (5.1) и (5.2) следующие рекуррентные системы дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{D}_1 V_{k0}(x) = 0, \quad \mathbf{D}_1 V_{kr}(x) = -[\mathbf{d} + \varphi(x)\mathbf{m}]Q_{k(r-1)}(x) - V'''_{k(r-3)}(x), \quad r \geq 1; \tag{5.4}$$

$$\mathbf{D}_1 Q_{k0}(x) = 0, \quad \mathbf{D}_2 Q_{kr}(x) = -\mathbf{m}V_{k(r-2)}(x) - Q'''_{k(r-3)}(x), \quad r \geq 1. \tag{5.5}$$

Рекуррентные системы уравнений (5.4) и (5.5) формально совпадают с соответствующими системами, полученными в [2] (см. равенства (3.2) и (3.3)). Несмотря на сказанное, все же исследуем вопрос о существовании гладких решений этих систем уравнений. Общими решениями уравнений (5.4) и (5.5) при $r = 0$ будут функции

$$
\begin{aligned}
V_{k0}(x) &= V_k^0 \exp\left\{ \int_1^x \frac{b_1(x)}{2x\tilde{a}(x)} dx \right\} \equiv V_{\text{общ. одн.}}(x), \\
Q_{k0}(x) &= Q_k^0 \exp\left\{ \int_1^x \frac{b_2(x)}{2x\tilde{a}(x)} dx \right\} \equiv Q_{\text{общ. одн.}}(x), \quad k = 1, 2,
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

где V_k^0, Q_k^0 — произвольные постоянные интегрирования. Гладкость этих решений на всем отрезке $[0,1]$, включая и точку поворота, существенно зависит от знаков выражений $b_k(0)/2\tilde{a}(0)$, $k = 1, 2$. Учитывая (1.2) и (4.9), имеем

$$
\frac{b_1(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{b(0) + [\varphi'(0)]^3}{2\tilde{a}(0)} = \frac{1}{2}[\rho + 1] = \rho_1, \quad \frac{b_2(0)}{2\tilde{a}(0)} = \frac{b(0) + 2[\varphi'(0)]^3}{2\tilde{a}(0)} = \frac{1}{2}\rho + 1 = \rho_2.
$$

Замечание 4. Сравнивая полученные тождества с соответствующими тождествами работы [2], видим, что формализм исследований сохраняется, а различие состоит только в знаках этих выражений и структуре регуляризующей функции $\varphi(x)$.

В данной работе рассматривается случай, когда $\rho = \frac{b(0)}{\tilde{a}(0)} \in N$. Поэтому по аналогии с [2] проведем более тщательное исследование возможных двух случаев.

Случай 1. Пусть $\rho = 2n+1$, т. е. $\rho_1 = (n+1) \in N$. Тогда серию дифференциальных уравнений (5.5) решаем при условиях $|Q_{kr}(0)| < \infty$, $k = 1, 2$, а дифференциальные уравнения (5.4) имеют достаточно гладкие общие решения, т. е.

$$
\begin{gathered}
Q_{k0}(x) \equiv Q_{k1}(x) \equiv 0, \quad Q_{kr}(x) = Q_{\text{част. неодн.}}(x), \quad r \geq 2, \\
V_{kr}(x) = V_{\text{общ. одн.}}(x), \quad r = 0, 1, 2, \quad V_{kr}(x) = V_{\text{общ. одн.}}(x) + V_{\text{част. неодн.}}(x), \quad r \geq 3.
\end{gathered}
\tag{5.7}
$$

Вывод 2. Если $\rho = 2n + 1$, то получим формальные решения расширенного уравнения (2.2) в виде рядов (5.1) и (5.2), в которых каждая из функций $V_{kr}(x)$ будет определена с точностью до одной произвольной постоянной, а $Q_{kr}(x)$ определены как частные решения соответствующих дифференциальных уравнений при начальных условиях $|Q_{kr}(0)| < \infty$.

В этом случае с учетом (5.7) построенные решения имеют такую структуру:

$$
\begin{aligned}
y_1(x,t,\varepsilon) &\equiv \sum_{r=0}^{1} \varepsilon^r V_{1r}(x) Ai(t) + \sum_{r=2}^{\infty} \varepsilon^r [V_{1r}(x) Ai(t) + Q_{1r}(x) Ai'(t)], \\
y_2(x,t,\varepsilon) &\equiv \sum_{r=0}^{1} \varepsilon^r V_{2r}(x) Bi(t) + \sum_{r=2}^{\infty} \varepsilon^r [V_{2r}(x) Bi(t) + Q_{2r}(x) Bi'(t)].
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Случай 2. Пусть $\rho = 2n$, т. е. $\rho_2 = (n + 1) \in N$. В этом случае решаем постепенно серии дифференциальных уравнений (5.4) при условиях $|V_{kr}(0)| < \infty$, $k = 1, 2$, а для дифференциальных уравнений (5.5) находим достаточно гладкие общие решения. Таким образом, будут определены все коэффициенты рядов (5.1) и (5.2) вида

$$
\begin{gathered}
V_{k0}(x) \equiv 0, \quad V_{kr}(x) = V_{\text{част. неодн.}}(x), \quad r \geq 1, \\
Q_{kr}(x) = Q_{\text{общ. одн.}}(x), \quad r = 0, 1, 2, \quad Q_{kr}(x) = Q_{\text{общ. одн.}}(x) + Q_{\text{част. неодн.}}(x), \quad r \geq 3.
\end{gathered}
$$

Здесь, как и в предыдущем случае, все определенные нами функции будут достаточно гладкими для всех $x \in [0, 1]$.

Вывод 3. Если $\rho = 2n$, то получим формальные решения расширенного уравнения (2.2) в виде рядов (5.1) и (5.2), в которых каждая из функций $Q_{kr}(x)$ будет определена с точностью до одной произвольной постоянной, а $V_{kr}(x)$ определены как частные решения соответствующих дифференциальных уравнений при начальных условиях $|V_{kr}(0)| < \infty$.

Построенные решения имеют следующую структуру:

$$
\begin{aligned}
y_1(x,t,\varepsilon) &\equiv Q_{10}(x)Ai'(t) + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r [V_{1r}(x)Ai(t) + Q_{1r}(x)Ai'(t)],\\
y_2(x,t,\varepsilon) &\equiv Q_{20}(x)Bi'(t) + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r [V_{2r}(x)Bi(t) + Q_{2r}(x)Bi'(t)].
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

2. Построим третье формальное асимптотическое решение однородного расширенного уравнения (2.2) в подпространстве $Y_3 \bigoplus X_r$ в виде ряда

$$
y_3(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r y_{3r}(x,t) \equiv \sum_{r=0}^{+\infty} \varepsilon^r [f_r(x)\nu(t) + g_r(x)\nu'(t) + \omega_r(x)], \tag{5.10}
$$

где $y_{3r}(x,t) \in Y_{3r} \bigoplus X_r$.

Учитывая (4.4)–(4.7), имеем следующие три (независимые одно от другого) тождества:

$$
P_r^f(x,\varepsilon) \equiv 0, \quad P_r^g(x,\varepsilon) \equiv 0, \quad P_r^\omega(x,\varepsilon) \equiv 0.
$$

Из этих тождеств для определения коэффициентов формального решения (5.10) получим три рекуррентные системы уравнений:

$$
\mathbf{D_1} f_0(x) = 0, \quad \mathbf{D}_1 f_r(x) = -[\mathbf{d} + \varphi(x)\mathbf{m}] g_{(r-1)}(x) - f'''_{(r-3)}(x), \quad r \geq 0, \tag{5.11}
$$

$$
\mathbf{D_2} g_0(x) = 0, \quad \mathbf{D}_2 g_r(x) = -\mathbf{m} f_{(r-2)}(x) - g'''_{(r-3)}(x), \quad r \geq 0, \tag{5.12}
$$

$$
\mathbf{L_0}\omega_0(x) = 0, \quad \mathbf{L_0}\omega_r(x) = -\pi^{-1}\mathbf{d} f_{(r-1)}(x) - \pi^{-1}\mathbf{m} g_{(r-2)}(x) - \omega'''_{(r-3)}(x). \tag{5.13}
$$

Полученные системы уравнений (5.11) и (5.12) формально содержат те же операторы, что и системы (5.4) и (5.5). Поэтому вопрос о существовании достаточно гладких решений этих систем уравнений решается аналогично предыдущим рассуждениям.

Сначала исследуем рекуррентную систему уравнений (5.13). При $r = 0$ имеем однородное уравнение $\mathbf{L}_0\omega_0(x) = 0$. Поскольку согласно постановке задачи $\rho = \frac{b(0)}{\tilde{a}(0)} \in N$, т.е. $\rho > 0$, то гладким решением этого уравнения на всем отрезке I, включая и точку поворота $x = 0$, будет $\omega_0(x) \equiv 0$.

Продолжая далее итерационный процесс, независимо от того, имеет ли место *случай* 1 или *случай* 2, получим однородные дифференциальные уравнения (5.13), гладкими решениями которых будет тождественный нуль, или неоднородные дифференциальные уравнения (5.13), содержащие в правой части произвольные постоянные. В этом случае определим частные решения этих уравнений, которые будут содержать произвольные постоянные.

Таким образом, имеют место следующие выводы.

Вывод 4. Если $\rho = 2n + 1$, то получим формальное решение расширенного уравнения (2.2) в виде ряда

$$
y_3(x,t,\varepsilon) \equiv \sum_{r=0}^{1} \varepsilon^r f_r(x)\nu(t) + \sum_{r=2}^{\infty} \varepsilon^r [f_r(x)\nu(t) + g_r(x)\nu'(t)] + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_r(x), \tag{5.14}
$$

в котором каждая из функций $f_r(x)$ определена с точностью до одной произвольной постоянной, а $g_r(x)$ определены как частные решения дифференциальных уравнений (5.12) при начальных условиях $|g_r(0)| < \infty$.

Вывод 5. Если $\rho = 2n$, то получим формальное решение расширенного уравнения (2.2) в виде ряда

$$y_3(x,t,\varepsilon) \equiv g_0(x)\nu'(t) + \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon^r [f_r(x)\nu(t) + g_r(x)\nu'(t)] + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_r(x), \tag{5.15}$$

в котором каждая из функций $g_r(x)$ определена с точностью до одной произвольной постоянной, а $f_r(x)$ определены как частные решения дифференциальных уравнений (5.11) при начальных условиях $|f_r(0)| < \infty$. При необходимости для функций $f_r(x)$ и $g_r(x)$ можно выписать и решения, аналогичные решениям (5.6).

Вывод 6. Решая постепенно серии дифференциальных уравнений (5.11)–(5.13), в подпространстве $Y_3 \bigoplus X_r$ построим третье формальное решение расширенного уравнения (2.2) в виде ряда (5.10). Каждое слагаемое этого ряда, т. е. каждая функция $y_r(x,t)$, зависит от произвольных постоянных, полученных от интегрирования дифференциальных уравнений (5.11), если $\rho = 2n+1$, или дифференциальных уравнений (5.12), если $\rho = 2n$.

3. Частное решение неоднородного СВДУ (1.1) строим в виде ряда

$$Y_{\text{частн.}}(x,\varepsilon) \equiv Y_4(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^{3r} \widetilde{y}_r(x), \quad \widetilde{y}_r(x) \in X_r. \tag{5.16}$$

Подставим (5.16) в СВДУ (1.1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра. Для определения коэффициентов этого ряда получим следующую рекуррентную систему дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{L}_0 \widetilde{y}_0(x) = h(x), \quad \mathbf{L}_0 \widetilde{y}_r(x) = -\widetilde{y}'''_{r-1}(x), \quad r \geq 1. \tag{5.17}$$

Поскольку $\rho > 0$, то не существует достаточно гладких общих решений этих уравнений. Однако по аналогии с [2] достаточно построить только частные решения уравнений (5.17) на всем отрезке $I = [0,1]$. Существование достаточно гладких частных решений этих уравнений при любой достаточно гладкой правой части $h(x)$ обеспечено *условием* 1 и тем, что $b(0) \neq 0$.

6. Оценка остаточных членов

Как уже было сказано, случай нестабильной точки поворота вносит принципиальные изменения в характер оценок остаточных членов асимптотики решений по сравнению с теми, что были получены в [1], [2]. Однако схема получения этих оценок та же самая, что и в цитируемых работах автора.

Запишем построенные решения (5.1), (5.2), (5.11) расширенного уравнения (2.2) и частное решение (5.17) уравнения (1.1) в виде

$$Y_k(x,t,\varepsilon) = Y_{kP}(x,t,\varepsilon) + \varepsilon^{P+1}\xi_{k(P+1)}(x,t,\varepsilon), \quad k = \overline{1,3}, \tag{6.1}$$

$$Y_4(x,\varepsilon) = Y_{4P}(x,\varepsilon) + \varepsilon^{3(P+1)}\xi_{4(P+1)}(x,\varepsilon), \tag{6.2}$$

где

$$Y_{kP}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{P} \varepsilon^r y_{kr}(x,t), \quad Y_4(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{P} \varepsilon^{3r} \widetilde{y}_r(x)$$

— частичные суммы, а $\varepsilon^{P+1}\xi_{k(P+1)}(x,t,\varepsilon)$ и $\varepsilon^{3(P+1)}\xi_{4(P+1)}(x,\varepsilon)$ — остаточные члены соответствующих рядов.

По аналогии с [2] (см. формулы (4.14)–(4.16)), используя (2.6) и (2.7), для остаточных членов решений (6.1) и (6.2) получим оценки

$$Y_1(x,t,\varepsilon) = Ai(t)\Big[\sum_{r=0}^{p}\varepsilon^r V_{1r}(x) + O(\varepsilon^{p+1})\Big] + Ai'(t)\Big[\sum_{r=0}^{p}\varepsilon^r Q_{1r}(x) + O(\varepsilon^{p+1})\Big], \tag{6.3}$$

$$Y_2(x,t,\varepsilon) = Bi(t)\Big[\sum_{r=0}^{p}\varepsilon^r V_{2r}(x) + O(\varepsilon^{p+1})\Big] + Bi'(t)\Big[\sum_{r=0}^{p}\varepsilon^r Q_{2r}(x) + O(\varepsilon^{p+1})\Big], \tag{6.4}$$

$$Y_3(x,t,\varepsilon) = \nu(t)\Big[\sum_{r=0}^{p}\varepsilon^r f_r(x) + O(\varepsilon^{p+1})\Big] + \nu'(t)\Big[\sum_{r=0}^{p}\varepsilon^r g_r(x) + O(\varepsilon^{p+1})\Big] +$$

$$+\sum_{r=0}^{p}\varepsilon^r \omega_r(x) + O(\varepsilon^{p+1}), \tag{6.5}$$

$$Y_{\text{частн.}}(x,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{p}\varepsilon^{3r}\widetilde{y}_r(x) + O(\varepsilon^{3(p+1)}). \tag{6.6}$$

Сформулируем полученные результаты.

Теорема. *Пусть для СВДУ* (1.1) а) *имеют место условия* 1 *и* 2; б) $\rho = \frac{b(0)}{\tilde{a}(0)} \in N$.
Тогда при достаточно малых значениях параметра $\varepsilon > 0$

1) *вышеописанным методом можно построить три линейно независимых решения однородного расширенного уравнения* (2.2) *в виде формул* (5.1), (5.2) *и* (5.10), *причем*
   1 a) *если* $\rho = 2n+1$, *то эти решения имеют структуру, представленную рядами* (5.8) *и* (5.14),
   1 b) *если* $\rho = 2n$, *то эти решения представимы рядами* (5.9) *и* (5.15);
2) *сужение этих решений при* $t = \varepsilon^{-1}\varphi(x)$ *являются формальными асимптотическими решениями однородного СВДУ* (1.1);
3) *частное решение неоднородного СВДУ* (1.1) *представимо в виде ряда* (5.16);
4) *для остаточных членов асимптотических рядов решений имеют место оценки* (6.3)–(6.6).

Замечание 5. На первый взгляд условие $\rho = \frac{b(0)}{\tilde{a}(0)} \in N$ довольно жесткое. Однако, как было замечено в [1], это условие обеспечивает построение формальных решений с бесконечным числом слагаемых. На практике ограничиваются только конечным числом слагаемых в ряде решений. Поэтому это условие можно заменить более благоприятным условием, потребовав, чтобы $\rho = \frac{b(0)}{\tilde{a}(0)}$ было достаточно большим числом, величину которого при необходимости легко определить.

Замечание 6. Пусть $-\rho = \frac{b(0)}{\tilde{a}(0)} \in N$ и имеет место условие 2. В этом случае точка поворота остается нестабильной и обеспечивается существование достаточно гладкого решения вырожденного уравнения (1.2) на всем отрезке I, включая и точку поворота $x = 0$. Используя методику [1] и заменяя функции Эйри–Дородницына функциями Эйри–Лангера, можно получить результаты, аналогичные результатам работы [1].

Замечание 7. Для того чтобы утверждать, что для СВДУ (1.1) в основном разработана теория асимптотического интегрирования, аналогичная той, которая описана в [3], необходимо еще исследовать это уравнение с внутренней точкой поворота. Для случая с внутренней точкой поворота основная трудность состоит в построении гладких решений дифференциальных уравнений типа (5.4), (5.5) на всем отрезке $[-1, 1]$.

Литература

1. Бобочко В.Н. *Дифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений.* I // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 3. – С. 3–14.
2. Бобочко В.Н. *Дифференциальная точка поворота в теории сингулярных возмущений.* II // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 5. – С. 3–13.
3. Бобочко В.М., Перестюк М.О. *Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту.* – Київ: Наук. думка, 2002. – 310 с.
4. Дородницын А.А. *Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка* // УМН. – 1952. – Т. 7. – Вып. 6. – С. 3–96.
5. Ломов С.А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений.* – М.: Наука, 1981. – 400 с.
6. *Справочник по специальным функциям* / Под ред. Абрамовица М. и Стигана И. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
7. Олвер Ф.*Асимптотика и специальные функции.* – М.: Наука, 1990. – 528 с.
8. Бобочко В.Н. *Внутренняя точка поворота в теории сингулярных возмущений* // Укр. матем. журн. — 1996. – Т. 48. – № 7. – С. 876–890.
9. Бобочко В.Н. *Система дифференциальных уравнений с нестабильной точкой поворота.* – Ред. журн. “Изв. вузов. Математика”. – Казань, 1997. – № 3. – С. 77. – Деп. в ВИНИТИ – № 366-В97.

Кировоградский государственный педагогический университет

Поступила 26.12.2002