ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 10 (461)

УДК 517.958 : 539.3

Н.Б. ПЛЕЩИНСКИЙ, А.А. ГУСЕНКОВА

КОМПЛЕКСНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В ЯДРАХ ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ С ДЕФЕКТОМ ВДОЛЬ ГЛАДКОЙ ДУГИ

В плоской теории упругости при отсутствии массовых (объемных) сил напряжения и перемещения могут быть выражены через *две аналитические функции* по формулам Колосова–Мусхелишвили ([1], § 32). Интегральное уравнение, эквивалентное исходной граничной задаче, может быть получено, если представить эти функции в виде интегралов по границе рассматриваемой области и подставить их в граничные условия.

В данной работе построены *интегральные представления с логарифмическими особенностями в ядрах* для функций, аналитических в различных областях комплексной плоскости с разрезами вдоль гладкой дуги. Рассмотрены полная плоскость, полуплоскость, круг и области, конформно эквивалентные кругу (полуплоскости). Получены *сингулярные интегральные уравнения с логарифмическими особенностями в ядрах*, *эквивалентные первой и второй основным граничным задачам* плоской теории упругости для тел с дефектами (с разрезами или тонкими включениями). Уточнены и дополнены результаты работы [2].

Пусть ab — гладкая разомкнутая дуга на комплексной плоскости. Для функций, определенных в плоскости с разрезом по ab, будем обозначать знаками $+$ и $-$ их предельные значения на левом и правом (по отношению к направлению движения от a к b) берегах разреза.

Следуя принципам математической теории трещин, построенной в работах В.В.Панасюка, М.П.Саврука и др. (напр., [3]), назовем *комплексными потенциалами для упругого тела с дефектом вдоль дуги ab* функции $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$, аналитические в соответствующей области комплексной плоскости с разрезом, предельные значения которых на ab удовлетворяют условиям

$$[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^+ - [\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^- = (k+1)\int_{at} \alpha(\tau)d\tau, \quad t \in ab, \tag{1}$$

$$[k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^+ - [k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^- = (k+1)\int_{at} \beta(\tau)d\tau, \quad t \in ab, \tag{2}$$

где $k > 0$ — некоторая вещественная постоянная ($k = 3 - 4\mu$ в случае плоской деформации или $k = (3-\mu)/(1+\mu)$ в случае обобщенного плоского напряженного состояния, μ — коэффициент Пуассона) и $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ — некоторые определенные на ab функции, причем

$$\int_{ab} \alpha(\tau)d\tau = 0, \quad \int_{ab} \beta(\tau)d\tau = 0. \tag{3}$$

Будем считать, что функции $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ удовлетворяют условию Гёльдера на любой части дуги ab, не содержащей концов, а в точках a и b могут иметь особенности интегрируемого порядка (принадлежат классу H^* по Н.И. Мусхелишвили).

Условия (1) и (2) задают на ab скачки напряжений и перемещений, множитель $k+1$ в правой части используется для упрощения некоторых формул.

1. Упругая плоскость с дефектом вдоль гладкой дуги

Пусть рассматриваемые в разрезанных по ab областях аналитические функции непрерывно продолжимы на все точки дуги, кроме, может быть, ее концов.

Лемма 1. *Если аналитические в разрезанной по дуге ab комплексной плоскости функции $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ ограничены на бесконечности и удовлетворяют условиям* (1)–(3), *то*

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[\alpha(\tau)+\beta(\tau)]\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi - z}d\tau + P, \tag{4}$$

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[\alpha(\tau)+\beta(\tau)]\frac{\overline{\tau}d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[k\overline{\alpha(\tau)} - \overline{\beta(\tau)}]\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi - z}\,d\overline{\tau} + Q, \tag{5}$$

где P и Q — произвольные комплексные постоянные.

Доказательство. Сложив (1) и (2), получим

$$\varphi^+(t) - \varphi^-(t) = \int_{at}[\alpha(\tau)+\beta(\tau)]d\tau, \quad t \in ab.$$

Решение этой задачи о скачке дает формула (4). Тогда, учитывая равенства (3), найдем

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[\alpha(\tau)+\beta(\tau)]\frac{d\tau}{\tau - z}, \quad \varphi'^+(t) - \varphi'^-(t) = \alpha(t)+\beta(t), \quad t \in ab.$$

Умножив равенство (1) на k и вычитая из него (2), получим

$$\overline{\psi^+(t)} - \overline{\psi^-(t)} = \int_{at}[k\alpha(\tau) - \beta(\tau)]\,d\tau - t\,[\overline{\varphi'^+(t)} - \overline{\varphi'^-(t)}], \quad t \in ab,$$

а отсюда следует представление (5). □

Если задать значения функций $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ в некоторой точке z_0, то постоянные P и Q однозначно определяются. Например, если $z_0 = \infty$, то $P = \varphi(\infty)$, $Q = \psi(\infty)$.

Следствие 1. Если функции $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ удовлетворяют условиям леммы 1, то

$$\begin{gathered}[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^+ + [\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^- = \\ = \frac{1}{\pi i}\int_{ab}[\alpha(\tau)+\beta(\tau)]\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi - t}\,d\tau - \frac{1}{\pi i}\int_{ab}[k\alpha(\tau) - \beta(\tau)]\int_{\tau b}\frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi} - \overline{t}}\,d\tau + \\ + \frac{1}{\pi i}\int_{ab}[\overline{\alpha(\tau)} + \overline{\beta(\tau)}]\frac{\tau - t}{\overline{\tau} - \overline{t}}\,d\overline{\tau} + 2P + 2\overline{Q},\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}[k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^+ + [k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^- = \\ = \frac{k}{\pi i}\int_{ab}[\alpha(\tau)+\beta(\tau)]\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi - t}\,d\tau + \frac{1}{\pi i}\int_{ab}[k\alpha(\tau) - \beta(\tau)]\int_{\tau b}\frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi} - \overline{t}}\,d\tau - \\ - \frac{1}{\pi i}\int_{ab}[\overline{\alpha(\tau)} + \overline{\beta(\tau)}]\frac{\tau - t}{\overline{\tau} - \overline{t}}\,d\overline{\tau} + 2kP - 2\overline{Q}.\end{gathered} \tag{7}$$

Рассмотрим первую и вторую основные граничные задачи для упругой плоскости с дефектом вдоль дуги ab, когда на берегах разреза заданы напряжения (несамоуравновешенные усилия)

$$[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^{\pm} = \int_{at} f^{\pm}(\tau)d\tau + A, \quad t \in ab,$$

или перемещения (в интегральной форме)

$$[k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^{\pm} = \int_{at} g^{\pm}(\tau)d\tau + B, \quad t \in ab,$$

здесь постоянные A и B определяют напряжение и перемещение в точке a дуги.

С помощью формул (6) и (7) легко получить следующее утверждение.

Теорема 1. *Первая и вторая основные граничные задачи для упругой плоскости с дефектом вдоль дуги ab эквивалентны интегральным уравнениям*

$$\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[\alpha(\tau)+\beta(\tau)]\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-t}\,d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[k\alpha(\tau)-\beta(\tau)]\int_{\tau b}\frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi}-\overline{t}}d\tau+$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[\overline{\alpha(\tau)}+\overline{\beta(\tau)}]\frac{\tau-t}{\overline{\tau}-\overline{t}}\,d\overline{\tau}=\int_{at}[f^+(\tau)+f^-(\tau)]d\tau+2(A-P-\overline{Q}),\quad t\in ab,\tag{8}$$

где $\alpha(t)=f^+(t)-f^-(t)$, а $\beta(\cdot)$ – искомая функция, и

$$\frac{k}{\pi i}\int_{ab}[\alpha(\tau)+\beta(\tau)]\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-t}\,d\tau+\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[k\alpha(\tau)-\beta(\tau)]\int_{\tau b}\frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi}-\overline{t}}\,d\tau-$$
$$-\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[\overline{\alpha(\tau)}+\overline{\beta(\tau)}]\frac{\tau-t}{\overline{\tau}-\overline{t}}\,d\overline{\tau}=\int_{at}[g^+(\tau)+g^-(\tau)]d\tau+2(B-kP+\overline{Q}),\quad t\in ab,\tag{9}$$

где $\beta(t)=g^+(t)-g^-(t)$, а $\alpha(\cdot)$ — искомая функция.

Интегральные уравнения (8) и (9) являются аналогами уравнений (I.78) и (I.81) из [3]. Отличие состоит в том, что ядра уравнений (I.78) и (I.81) содержат особенности 1-го порядка, а ядра уравнений (8) и (9) — особенности логарифмического типа [4], [5]. Интегральные уравнения работы [3] могут быть получены из уравнений (8) и (9) дифференцированием, что ухудшает их свойства. Как показано в [4], от уравнений (8), (9) легко перейти к эквивалентным сингулярным интегральным уравнениям с ядром Коши относительно первообразных искомых функций. При этом

$$\int_{ab}\beta(\tau)\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-z}\,d\tau=\int_{ab}\frac{\gamma(\xi)\,d\xi}{\xi-z},\quad \gamma(\xi)=\int_{a\xi}\beta(\tau)d\tau.$$

Такие сингулярные уравнения более устойчивы при численном решении квадратурными методами типа метода механических квадратур.

Заметим, что первая основная граничная задача сводится к случаю, когда $f^+(\cdot)=f^-(\cdot)$. Для доказательства используем прием, указанный в ([6], § 23). Действительно, введем новую искомую функцию

$$\psi_1(z)=\psi(z)-\overline{\psi_0(z)},\quad \psi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[f^+(\tau)-f^-(\tau)]\ln\frac{b-z}{\tau-z}\,d\tau.$$

Тогда

$$[\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi_1(t)}]^{\pm}=[\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}]^{\pm}\mp\frac{1}{2}\int_{at}[f^+(\tau)-f^-(\tau)]d\tau-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[f^+(\tau)-f^-(\tau)]\ln\frac{b-t}{t-\tau}\,d\tau=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[f^+(\tau)-f^-(\tau)]\ln\frac{b-t}{t-\tau}\,d\tau+\frac{1}{2}\int_{at}[f^+(\tau)+f^-(\tau)]d\tau+A,$$

здесь выбрана ветвь многозначной логарифмической функции

$$\ln\frac{b-t}{t-\tau}=\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-t}\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2}\left(\left[\ln\frac{t-b}{t-\tau}\right]^{+}+\left[\ln\frac{t-b}{t-\tau}\right]^{-}\right),\quad t\in(\tau b).$$

Точно так же можно показать, что вторая граничная задача сводится к случаю, когда $g^+(\cdot)=g^-(\cdot)$.

2. Полуплоскость с дефектом вдоль дуги

Пусть D^+, D^- — верхняя и нижняя полуплоскости комплексной плоскости и L — вещественная ось.

Лемма 2. *Если аналитические в разрезанной по дуге ab нижней полуплоскости D^- функции $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$*

1) *непрерывно продолжимы на все точки вещественной оси, включая бесконечно удаленную точку, и*

$$\varphi^-(t) + t\overline{\varphi'^-(t)} + \overline{\psi^-(t)} = 0, \quad t \in L, \tag{10}$$

2) *удовлетворяют условиям (1)–(3),*

то

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[\alpha(\tau)+\beta(\tau)]\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi - z}\,d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[k\alpha(\tau)-\beta(\tau)]\int_{\tau b}\frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi} - z}\,d\tau -$$
$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[\overline{\alpha(\tau)}+\overline{\beta(\tau)}]\,\frac{\tau-\overline{\tau}}{\overline{\tau}-z}\,d\overline{\tau} + R, \tag{11}$$
$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[\alpha(\tau)+\beta(\tau)]\frac{\overline{\tau}}{\tau - z}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[k\alpha(\tau)-\beta(\tau)]\frac{z}{\overline{\tau}-z}\,d\tau +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[\overline{\alpha(\tau)}+\overline{\beta(\tau)}]\Big[\int_{\tau b}\frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi}-z} + \frac{z(\tau-\overline{\tau})}{(\overline{\tau}-z)^2}\Big]\,d\overline{\tau} +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[k\overline{\alpha(\tau)}-\overline{\beta(\tau)}]\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-z}\,d\overline{\tau} - \overline{R}, \tag{12}$$

где R — произвольная комплексная постоянная.

Доказательство. Пусть $\varphi_1(\cdot)$, $\psi_1(\cdot)$ — определенные формулами (4), (5) потенциалы для разрезанной по дуге ab плоскости. Введем новые искомые функции $\varphi_0(\cdot) = \varphi(\cdot) - \varphi_1(\cdot)$ и $\psi_0(\cdot) = \psi(\cdot) - \psi_1(\cdot)$, для которых дуга ab уже не является особой линией. Рассмотрим вспомогательную функцию, аналитическую в D^+ и D^- и непрерывно продолжимую на L сверху и снизу,

$$F(z) = \{\varphi_0(z),\ z \in D^-;\ -z\overline{\varphi_0'(\overline{z})} - \overline{\psi_0(\overline{z})},\ z \in D^+\}.$$

Отметим, что в нижней полуокрестности бесконечно удаленной точки $\varphi_0(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots$. Поэтому существует конечный предел произведения $z\overline{\varphi_0'(\overline{z})}$ при $z \to \infty \in L$ по любому пути из D^+. Разность предельных значений $F(\cdot)$ на оси в силу (10)

$$F^+(t) - F^-(t) = f(t), \quad f(t) = \varphi_1^-(t) + t\overline{\varphi_1'^-(t)} + \overline{\psi_1^-(t)}, \quad t \in L.$$

Тогда, как решение задачи о скачке,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)dx}{x-z} + C,$$

где C – произвольная комплексная постоянная. Подставив выражение функции

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[\alpha(\tau)+\beta(\tau)]\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-x}\,d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[k\alpha(\tau)-\beta(\tau)]\int_{\tau b}\frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi}-\overline{x}}\,d\tau +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[\overline{\alpha(\tau)}+\overline{\beta(\tau)}]\,\frac{\tau - x}{\overline{\tau}-\overline{x}}\,d\overline{\tau} + P + \overline{Q}, \quad x \in L, \tag{13}$$

в сингулярный интеграл, учтем, что $\overline{x}=x$, и изменим порядок интегрирования. Методом вычетов легко вычислить интегралы (удобно использовать готовую формулу из ([7], пример 26а к главе 1))

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(\xi-x)(x-z)}=\left\{\frac{1}{\xi-z},\ z\in D^+;\ 0,\ z\in D^-\right\},\\
\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(\overline{\xi}-x)(x-z)}=\left\{0,\ z\in D^+;\ -\frac{1}{\overline{\xi}-z},\ z\in D^-\right\},\\
\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x-z}=\left\{\frac{1}{2},\ z\in D^+;\ -\frac{1}{2},\ z\in D^-\right\},\\
\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tau-x}{\overline{\tau}-x}\frac{dx}{x-z}=\left\{\frac{1}{2},\ z\in D^+;\ -\frac{1}{2}-\frac{\tau-\overline{\tau}}{\overline{\tau}-z},\ z\in D^-\right\}.
\end{gathered}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
F(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[\alpha(\tau)+\beta(\tau)]\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-z}\,d\tau+\frac{P+\overline{Q}}{2}+C,\quad z\in D^+,\\
F(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[k\alpha(\tau)-\beta(\tau)]\int_{\tau b}\frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi}-z}\,d\tau-\\
&\qquad-\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[\overline{\alpha(\tau)}+\overline{\beta(\tau)}]\,\frac{\tau-\overline{\tau}}{\overline{\tau}-z}\,d\overline{\tau}-\frac{P+\overline{Q}}{2}+C,\quad z\in D^-,
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
\varphi(z)&=\varphi_0(z)+\varphi_1(z),\quad \varphi_0(z)=F(z), && z\in D^-,\\
\psi(z)&=\psi_0(z)+\psi_1(z),\quad \psi_0(z)=-zF'(z)-\overline{F(\overline{z})}, && z\in D^-.
\end{aligned}
$$

Подставив сюда функцию $F(\cdot)$ при $z\in D^-$ и $z\in D^+$ и вместо $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ правые части формул (4) и (5), получим (11) и (12), где $R=(P-\overline{Q})/2+C$. Постоянные P и Q в выражениях потенциалов $\varphi_1(\cdot)$ и $\psi_1(\cdot)$ можно было бы и не учитывать (считать их равными нулю).

Постоянная R определится, если задать значение одной из функций $\varphi(\cdot)$ или $\psi(\cdot)$ в некоторой точке z_0 нижней полуплоскости или вещественной оси. $\square$

Следствие 2. Если аналитические в нижней полуплоскости функции $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ непрерывно продолжимы на все точки вещественной оси, включая бесконечно удаленную точку, и удовлетворяют условию (10), то $\varphi(z)=C$, $\psi(z)=-\overline{C}$, где C — произвольная комплексная постоянная. При этом $\varphi(z)+\overline{\psi(z)}=0\ \forall z\in D^-\cup L$.

Теорема 2. *Первая и вторая основные граничные задачи для упругой полуплоскости с дефектом вдоль дуги ab эквивалентны интегральным уравнениям*

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[\alpha(\tau)+\beta(\tau)]\Big[\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-t}-\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-\overline{t}}+\frac{(t-\overline{t})(\overline{\tau}-\tau)}{(\tau-\overline{t})^2}\Big]\,d\tau+\\
&\qquad+\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[k\alpha(\tau)-\beta(\tau)]\Big[\int_{\tau b}\frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi}-t}-\int_{\tau b}\frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi}-\overline{t}}\Big]\,d\tau+\\
&+\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[\overline{\alpha(\tau)}+\overline{\beta(\tau)}]\Big[\frac{\tau-t}{\overline{\tau}-\overline{t}}-\frac{\tau-t}{\overline{\tau}-t}\Big]\,d\overline{\tau}-\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[k\overline{\alpha(\tau)}-\overline{\beta(\tau)}]\,\frac{t-\overline{t}}{\tau-\overline{t}}\,d\overline{\tau}=\\
&\qquad\qquad=\int_{at}[f^+(\tau)+f^-(\tau)]d\tau+2A,\quad t\in ab,
\end{aligned}
$$

где $\alpha(t) = f^+(t) - f^-(t)$, *а* $\beta(\cdot)$ — *искомая функция, и*

$$\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[\alpha(\tau)+\beta(\tau)]\left[k\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi - t} + \int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi - \overline{t}} - \frac{(t-\overline{t})(\overline{\tau}-\tau)}{(\tau-\overline{t})^2}\right]d\tau +$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[k\alpha(\tau)-\beta(\tau)]\left[k\int_{\tau b}\frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi}-t} + \int_{\tau b}\frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi}-\overline{t}}\right]d\tau -$$
$$-\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[\overline{\alpha(\tau)}+\overline{\beta(\tau)}]\left[\frac{\tau - t}{\overline{\tau}-\overline{t}} + k\frac{\tau - t}{\overline{\tau}-t}\right]d\overline{\tau} + \frac{1}{\pi i}\int_{ab}[k\overline{\alpha(\tau)}-\overline{\beta(\tau)}]\,\frac{t-\overline{t}}{\tau-\overline{t}}\,d\overline{\tau} =$$
$$= \int_{at}[g^+(\tau)+g^-(\tau)]d\tau + 2B - 2(k+1)R, \quad t\in ab,$$

где $\beta(t) = g^+(t) - g^-(t)$, *а* $\alpha(\cdot)$ — *искомая функция.*

Для доказательства достаточно вычислить на дуге ab выражения вида (6) и (7).

3. Упругий круг с дефектом вдоль гладкой дуги

Пусть теперь D^+ и D^- — круг $|z| < R$ и внешность круга $|z| > R$, а L — окружность $|z| = R$.

Лемма 3. *Если аналитические в разрезанном по дуге* ab *круге* D^+ *функции* $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$

1) *непрерывно продолжимы на все точки* L *и*

$$\varphi^+(t) + t\overline{\varphi'^+(t)} + \overline{\psi^+(t)} = 0, \quad t\in L, \tag{14}$$

2) *удовлетворяют условиям* (1)–(3),

то

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[\alpha(\tau)+\beta(\tau)]\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi - z}\,d\tau +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[k\alpha(\tau)-\beta(\tau)]\left[\int_{\tau b}\frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi}-R^2/z} - \frac{\overline{\tau}z}{2R^2}\right]d\tau -$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[\overline{\alpha(\tau)}+\overline{\beta(\tau)}]\left[\frac{\tau - z}{\overline{\tau}-R^2/z} + \frac{\tau z}{2R^2}\right]d\overline{\tau} + iSz - \overline{T}, \tag{15}$$

$$\psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[\alpha(\tau)+\beta(\tau)]\frac{\overline{\tau}d\tau}{\tau - z} +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[k\alpha(\tau)-\beta(\tau)]\frac{(\overline{\tau}-\overline{b})(\overline{\tau}\overline{b}z - \overline{\tau}R^2 - \overline{b}R^2)}{(\overline{\tau}z - R^2)(\overline{b}z - R^2)}d\tau +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[\overline{\alpha(\tau)}+\overline{\beta(\tau)}]\left[\int_{\tau b}\frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi}-R^2/z} + \frac{(\tau\overline{\tau}-R^2)(\overline{\tau}z - 2R^2)}{(\overline{\tau}z - R^2)^2}\right]d\overline{\tau} +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[k\overline{\alpha(\tau)}-\overline{\beta(\tau)}]\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi - z}\,d\overline{\tau} + T, \tag{16}$$

где S *и* T — *произвольные вещественная и комплексная постоянные.*

Доказательство. Пусть, как и в случае полуплоскости, $\varphi_1(\cdot)$, $\psi_1(\cdot)$ — потенциалы для упругой плоскости с дефектом вдоль дуги ab, и $\varphi_0(z) = \varphi(z) - \varphi_1(z)$ и $\psi_0(z) = \psi(z) - \psi_1(z)$ — новые искомые функции. Учитывая сказанное в конце доказательства леммы 2, будем считать, что $P = Q = 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(z) = \{\varphi_0(z),\ z\in D^+;\ -z\overline{\varphi_0'(R^2/\overline{z})} - \overline{\psi_0(R^2/\overline{z})},\ z\in D^-\},$$

аналитическую в D^+ и D^- всюду, кроме, может быть, бесконечно удаленной точки, в окрестности которой поведение функции $F(\cdot)$ определяет главная часть разложения в ряд Лорана $-z\overline{\varphi_0'(0)} - \overline{\psi_0(0)}$. При этом

$$F^+(t) - F^-(t) = -f(t), \quad f(t) = \varphi_1^+(t) + t\overline{\varphi_1'^+(t)} + \overline{\psi_1^+(t)}, \quad t \in L.$$

Тогда, как решение задачи о скачке,

$$F(z) = F_0(z) - z\overline{\varphi_0'(0)} - \overline{\psi_0(0)}, \quad F_0(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(x)dx}{x-z}.$$

Так как $\varphi_0(z) = F(z)$, $z \in D^+$, то при $z = 0$

$$\varphi_0(0) = F_0(0) - \overline{\psi_0(0)}, \quad \varphi_0'(0) = F_0'(0) - \overline{\varphi_0'(0)}.$$

Поэтому $2\operatorname{Re}\varphi_0'(0) = F_0'(0)$, а значение $\operatorname{Im}\varphi_0'(0)$ и одно из двух значений $\varphi_0(0)$ и $\psi_0(0)$ остаются произвольными. Обозначим $S = \operatorname{Im}\varphi_0'(0)$ и $T = \psi_0(0)$. Тогда

$$F(z) = F_0(z) - \frac{z}{2}F_0'(0) + iSz - \overline{T}, \quad z \in D^+ \cup D^-,$$

$$\varphi_0(z) = F(z) = F_0(z) - \frac{z}{2}F_0'(0) + iSz - \overline{T}, \quad z \in D^+,$$

$$\psi_0(z) = -\frac{R^2}{z}\varphi_0'(z) - \overline{F\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)} = -\frac{R^2}{z}\left[F_0'(z) - F_0'(0)\right] - \overline{F_0\left(\frac{R^2}{\overline{z}}\right)} + T, \quad z \in D^+$$

(отметим, что у функции $\psi_0(\cdot)$ полюса в точке $z = 0$ нет).

Как и в случае полуплоскости, функция $f(\cdot)$ определена формулой (13), но теперь $\overline{x} = R^2/x$. Вычислив интегралы по окружности L

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dx}{(\xi - x)(x - z)} = \left\{0,\ z \in D^+;\ -\frac{1}{\xi - z},\ z \in D^-\right\},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dx}{(\overline{\xi} - R^2/x)(x - z)} = \left\{\frac{z}{\overline{\xi}z - R^2},\ z \in D^+;\ 0,\ z \in D^-\right\},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\tau - x}{\overline{\tau} - R^2/x}\frac{dx}{x - z} = \left\{\frac{z(\tau - z)}{\overline{\tau}z - R^2},\ z \in D^+;\ 0,\ z \in D^-\right\},$$

получим

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[k\alpha(\tau) - \beta(\tau)]\int_{\tau b}\frac{z\,d\overline{\xi}}{\overline{\xi}z - R^2}\,d\tau -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[\overline{\alpha(\tau)} + \overline{\beta(\tau)}]\,\frac{z(\tau - z)}{\overline{\tau}z - R^2}\,d\overline{\tau}, \quad z \in D^+,$$

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[\alpha(\tau) + \beta(\tau)]\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi - z}\,d\tau, \quad z \in D^-. \quad \square$$

Следствие 3. Если аналитические в D^+ функции $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ непрерывно продолжимы на L и удовлетворяют условию (14), то $\varphi(0) + \overline{\psi(0)} = 0$, $\operatorname{Re}\varphi'(0) = 0$ и $\varphi(z) = iSz - \overline{T}$, $\quad \psi(z) = T$, где S и T — произвольные вещественная и комплексная постоянные.

Как и в случае полуплоскости, вычислив выражения

$$[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^+ + [\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}]^-,$$

$$[k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^+ + [k\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]^-,$$

можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Первая и вторая основные граничные задачи для упругого круга с дефектом вдоль дуги* ab *эквивалентны интегральным уравнениям*

$$\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[\alpha(\tau)+\beta(\tau)]\Big[\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-t}-\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-R^2/\overline{t}}-$$
$$-\frac{(\tau\overline{\tau}+t\overline{t})(\tau\overline{t}-2R^2)+R^2(\overline{\tau}t-\tau\overline{t}+2R^2)}{(\tau\overline{t}-R^2)^2}+\frac{\overline{\tau}t}{2R^2}\Big]d\tau+$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[k\alpha(\tau)-\beta(\tau)]\Big[\int_{\tau b}\frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi}-R^2/t}-\int_{\tau b}\frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi}-\overline{t}}-\frac{\overline{\tau}t}{2R^2}\Big]d\tau+$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[\overline{\alpha(\tau)}+\overline{\beta(\tau)}]\Big[\frac{\tau-t}{\overline{\tau}-\overline{t}}-\frac{\tau-t}{\overline{\tau}-R^2/t}-\frac{\tau t}{2R^2}\Big]d\overline{\tau}+$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[k\overline{\alpha(\tau)}-\overline{\beta(\tau)}]\Big[\frac{tR^2}{\overline{t}(\tau\overline{t}-R^2)}-\frac{(\tau-b)(\tau b\overline{t}-\tau R^2-bR^2)}{(\tau\overline{t}-R^2)(b\overline{t}-R^2)}+\frac{\tau t}{2R^2}\Big]d\overline{\tau}=$$
$$=\int_{at}[f^+(\tau)+f^-(\tau)]d\tau+2A,\quad t\in ab,$$

где $\alpha(t)=f^+(t)-f^-(t)$, *а* $\beta(\cdot)$ *— искомая функция, и*

$$\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[\alpha(\tau)+\beta(\tau)]\Big[k\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-t}+\int_{\tau b}\frac{d\xi}{\xi-R^2/\overline{t}}+$$
$$+\frac{(\tau\overline{\tau}+t\overline{t})(\tau\overline{t}-2R^2)+R^2(\overline{\tau}t-\tau\overline{t}+2R^2)}{(\tau\overline{t}-R^2)^2}-\frac{\overline{\tau}t}{2R^2}\Big]d\tau+$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[k\alpha(\tau)-\beta(\tau)]\Big[k\int_{\tau b}\frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi}-R^2/t}+\int_{\tau b}\frac{d\overline{\xi}}{\overline{\xi}-\overline{t}}-k\frac{\overline{\tau}t}{2R^2}\Big]d\tau-$$
$$-\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[\overline{\alpha(\tau)}+\overline{\beta(\tau)}]\Big[\frac{\tau-t}{\overline{\tau}-\overline{t}}+k\frac{\tau-t}{\overline{\tau}-R^2/t}+k\frac{\tau t}{2R^2}\Big]d\overline{\tau}-$$
$$-\frac{1}{\pi i}\int_{ab}[k\overline{\alpha(\tau)}-\overline{\beta(\tau)}]\Big[\frac{tR^2}{\overline{t}(\tau\overline{t}-R^2)}-\frac{(\tau-b)(\tau b\overline{t}-\tau R^2-bR^2)}{(\tau\overline{t}-R^2)(b\overline{t}-R^2)}+\frac{\tau t}{2R^2}\Big]d\overline{\tau}=$$
$$=\int_{at}[g^+(\tau)+g^-(\tau)]d\tau+2B+2(k+1)(\overline{T}-iSt),\quad t\in ab,$$

где $\beta(t)=g^+(t)-g^-(t)$, *а* $\alpha(\cdot)$ *— искомая функция.*

4. Области, конформно эквивалентные кругу (полуплоскости)

Если упругая среда с дефектом вдоль разомкнутой дуги заполняет область, конформно эквивалентную кругу (или полуплоскости), то комплексные потенциалы также можно построить методом аналитического продолжения через границу (методом сопряжения Н.И. Мусхелишвили).

Пусть области D^+ и D^- расположены слева и справа от замкнутой линии L в плоскости комплексной переменной z, а области Δ^+ и Δ^- — слева и справа от линии Λ в плоскости переменной ζ. Рассмотрим параллельно два случая: 1) когда Δ^+ и Δ^- — единичный круг и внешность круга и 2) когда Δ^+ и Δ^- — верхняя и нижняя полуплоскости. Отметим, что оба случая эквивалентны.

Лемма 4. *Пусть рациональная функция* $z=\omega(\zeta)$ *взаимно однозначно отображает* 1) *единичный круг* Δ^+ *или* 2) *нижнюю полуплоскость* Δ^- *на область* D^+. *Если предельные значения аналитических в разрезанной по дуге* ab *области* D^+ *функций* $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ *удовлетворяют условию*

$$\varphi^+(t)+t\overline{\varphi'^+(t)}+\overline{\psi^+(t)}=0,\quad t\in L,$$

и условиям (1)–(3), *то*

$$\varphi(\omega(\zeta)) = \varphi_1(\omega(\zeta)) + \Phi_0(\zeta), \quad \psi(\omega(\zeta)) = \psi_1(\omega(\zeta)) + \Psi_0(\zeta), \tag{17}$$

где $\varphi_1(\cdot)$, $\psi_1(\cdot)$ *– комплексные потенциалы для плоскости с дефектом вдоль* ab,

$$1) \quad \Phi_0(\zeta) = F(\zeta), \quad \Psi_0(\zeta) = -\overline{F(1/\overline{\zeta})} - \frac{\overline{\omega(1/\overline{\zeta})}}{\omega'(\zeta)} F'(\zeta), \quad \zeta \in \Delta^+,$$

или

$$2) \quad \Phi_0(\zeta) = F(\zeta), \quad \Psi_0(\zeta) = -\overline{F(\overline{\zeta})} - \frac{\overline{\omega(\overline{\zeta})}}{\omega'(\zeta)} F'(\zeta), \quad \zeta \in \Delta^-,$$

и $F(\cdot)$ — *решение задачи о скачке*

$$\begin{gathered} F^+(\tau) - F^-(\tau) = \mp f(\omega(\tau)), \quad \tau \in \Lambda, \\ f(t) = \varphi_1^+(t) + t\overline{\varphi_1'^{\,+}(t)} + \overline{\psi_1^+(t)}, \quad t \in L. \end{gathered} \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $\varphi_1(\cdot)$, $\psi_1(\cdot)$ — комплексные потенциалы (4), (5). Тогда предельные значения на L аналитических в D^+ функций $\varphi_0(\cdot) = \varphi(\cdot) - \varphi_1(\cdot)$, $\psi_0(\cdot) = \psi(\cdot) - \psi_1(\cdot)$ удовлетворяют условию

$$\varphi_0^+(t) + t\overline{\varphi_0'^{\,+}(t)} + \overline{\psi_0^+(t)} = -f(t), \quad t \in L.$$

Для новых искомых функций $\Phi_0(\zeta) = \varphi_0(\omega(\zeta))$, $\Psi_0(\zeta) = \psi_0(\omega(\zeta))$, $\zeta \in \Delta^\pm$, это условие примет вид

$$\Phi_0^\pm(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}} \overline{\Phi_0'^{\,\pm}(\tau)} + \overline{\Psi_0^\pm(\tau)} = -f(\omega(\tau)), \quad \tau \in \Lambda.$$

Верхний знак в формулах соответствует случаю 1), а нижний — случаю 2). Рассмотрим вспомогательную функцию

$$1) \quad F(\zeta) = \left\{\Phi_0(\zeta),\ \zeta \in \Delta^+;\ -\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(1/\overline{\zeta})}}\, \overline{\Phi_0'(1/\overline{\zeta})} - \overline{\Psi_0(1/\overline{\zeta})},\ \zeta \in \Delta^-\right\}$$

или

$$2) \quad F(\zeta) = \left\{\Phi_0(\zeta),\ \zeta \in \Delta^-;\ -\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega'(\overline{\zeta})}}\, \overline{\Phi_0'(\overline{\zeta})} - \overline{\Psi_0(\overline{\zeta})},\ \zeta \in \Delta^+\right\}.$$

Можно показать, что $\omega'(\zeta) \neq 0\ \ \forall \zeta \in \Delta^\pm$ и $\omega'(\tau) \neq 0\ \ \forall \tau \in \Lambda$, если контур Λ имеет непрерывно изменяющуюся кривизну ([1], § 47). На единичной окружности $1/\overline{\tau} = \tau$, на вещественной оси $\overline{\tau} = \tau$. Тогда предельные значения на Λ функции $F(\cdot)$ удовлетворяют условию (18). □

Решение задачи о скачке (18) должно быть найдено в классе функций, которые могут иметь полюсы в тех точках плоскости ζ, где они имеются у функции $\omega(\cdot)$, а в случае круга — еще и в бесконечно удаленной точке. Полное исследование проводится таким же образом, что и в ([1], § 125). В каждом конкретном случае потенциалы будут зависеть от одной или от двух комплексных или вещественных постоянных. Ниже будет рассмотрен пример, а пока отметим следующее. В случае 1) у функции $\omega(\cdot)$ в области Δ^+ полюсов нет, если D^+ — ограниченная область. Если же область D^+ неограничена, то у функции $\omega(\cdot)$ может быть простой полюс в Δ^+ или на Λ. В случае 2) бесконечно удаленная точка принадлежит линии Λ, поэтому в области Δ^- у функции $\omega(\cdot)$ не может быть особых точек. Поэтому если область D^+ неограничена, то удобнее рассматривать в качестве эквивалентной ей области полуплоскость Δ^-. В общем случае $F(\cdot) = \mp F_0(\cdot) + G(\cdot)$, где $F_0(\cdot)$ — интеграл типа Коши с плотностью $f(\omega(\cdot))$, а $G(\cdot)$ — некоторая рациональная функция.

Существенно, что $\omega(\cdot)$ — рациональная функция, т. к. тогда и только тогда эта функция, определенная в области $\Delta^{\pm}$, может быть естественным образом аналитически продолжена через единичную окружность или через вещественную ось на всю комплексную плоскость (за исключением, может быть, конечного числа точек, где у нее расположены полюсы).

Рассмотрим пример. Пусть D^- — нижняя полуплоскость, конформно эквивалентная единичному кругу Δ^+ плоскости ζ. Отображающая функция имеет единственный простой полюс в точке $\zeta = 1$ единичной окружности,

$$\omega(\zeta) = i\frac{\zeta+1}{\zeta-1}, \quad \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}} = \frac{1}{2}\frac{\tau^2-1}{\tau^2}, \quad \tau \in \Lambda,$$

но у функции $F(\cdot)$ в этой точке нет особенности. Поэтому в решении задачи о скачке (18) содержится только одна произвольная комплексная постоянная. При $P = Q = 0$

$$\begin{aligned} F_0(\zeta) = &-\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[\alpha(\tau)+\beta(\tau)]\int_{\tau b}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda}\frac{1}{(\xi-\omega(x))(x-\zeta)}dx\right]d\xi\, d\tau + \\ &+\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[k\alpha(\tau)-\beta(\tau)]\int_{\tau b}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda}\frac{1}{(\overline{\xi}-\overline{\omega(x)})(x-\zeta)}dx\right]d\overline{\xi}\, d\tau - \\ &-\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}[\overline{\alpha(\tau)}+\overline{\beta(\tau)}]\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda}\frac{\tau-\omega(x)}{\overline{\tau}-\overline{\omega(x)}}\frac{dx}{x-\zeta}\right]d\overline{\tau}, \end{aligned}$$

все внутренние интегралы вычисляются по формуле Коши, если учесть, что $\overline{\omega(1/\overline{\zeta})} = \omega(\zeta)$ и $1/\overline{x} = x$ при $x \in \Lambda$. Дальнейшие вычисления проводятся аналогично случаю круга. Как и следовало ожидать, вернувшись на плоскость z, получим выражения вида (11) и (12) комплексных потенциалов для упругой полуплоскости с дефектом.

С помощью потенциалов (17), как и в ранее рассмотренных случаях, можно перейти от основных граничных задач для областей с дефектом, конформно отображаемых на круг или полуплоскость, к сингулярным интегральным уравнениям с логарифмической особенностью в ядре.

Как уже было отмечено, значения постоянных P, Q, R, S, T в формулах (4), (5), (11), (12), (15), (16) и (17) могут быть определены из каких-либо дополнительных условий. Но, как следует из формул Колосова–Мусхелишвили, вычисленные по функциям $\varphi(\cdot)$, $\psi(\cdot)$ напряжения и перемещения не зависят от этих постоянных.

Численные решения интегральных уравнений с логарифмической особенностью в ядре и сингулярных уравнений с ядром Коши в различных случаях были получены методом Галёркина (обсуждению результатов будет посвящена другая работа). Если дефект расположен близко к границе или к особой точке, то можно выделить ситуации, когда численные алгоритмы на основе полученных в данной работе имеют преимущества перед другими.

Литература

1. Мусхелишвили Н.И. *Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения. Плоская теория упругости. Кручение и изгиб.* – М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. Плещинский Н.Б. *Интегральные уравнения с логарифмической особенностью в ядре для граничных задач теории упругости для плоскости, полуплоскости и круга с дефектом вдоль гладкой дуги* // Препринт № 1. Казанск. матем. об-во. – Казань, 1997. – 22 с.
3. Саврук М.П. *Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.* – Киев: Наук. думка, 1981. – 323 с.
4. Плещинский Н.Б. *Приложения теории интегральных уравнений с логарифмическими и степенными ядрами.* Учеб. пособие. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1987. – 157 с.

5. Pleshchinskii N.B. *Some classes of singular integral equations solvable in a closed form and their applications* // Pitman Research Notes in Math. Ser. Longman Scientific & Technical. – New York, 1991. – V.256. – P.246-256.
6. Партон В.З., Перлин П.И. *Интегральные уравнения теории упругости*. – М.: Наука, 1977. – 312 с.
7. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи*. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

Казанский государственный университет

Поступила
12.11.1998