КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Том 123, кн. 2 *Ученые записки* *1963*

А. З. ПЕТРОВ

О ТЕОРЕМЕ БИРКГОФА

Одним из наиболее важных частных случаев полей гравитации является поле с центральной симметрией. При этом, при решении многих конкретных задач приходится рассматривать именно *статические поля.*

Что же касается вопроса о центрально-симметрических полях в пустом пространстве, не обязательно статических, то их существование отвергалось на основании следующего утверждения, высказанного впервые Биркгофом [1]: *„всякое центрально-симметрическое поле в пустоте — статическое"* и поэтому определяется метрикой Шварцшильда. Это утверждение стало с тех пор общепринятым и вошло во все серьезные монографии по общей теории относительности [2 — 8], за исключением, по-видимому, только известной книги Фока [13]; его придерживался ранее и автор статьи [9]; оно часто используется в релятивистской космологии и механики для обоснования ответственных выводов. Однако, это утверждение является ошибочным.

В этой работе дается *строгое решение уравнений центрально-симметрического поля в пустоте*

$$R_{\alpha\beta} = 0, \tag{1}$$

и попутно выясняется вопрос, когда такое решение будет статическим, что и опровергает сформулированное выше утверждение Биркгофа.

Отметим, что критика корректности этого утверждения, как это обнаружилось уже после написания работы, содержится в работе [14], где подмечается, что невозможно доказать теорему Биркгофа не нарушая известных условий непрерывности Лихнеровича [15]. В данной статье дается общее решение вопроса и эти соображения предварительного характера подтверждаются непосредственно. Некоторые авторы для обоснования положения Биркгофа привлекают еще предельные условия, но это не меняет положения, как будет показано в § 4.

Решение поставленной выше задачи основывается на теории *конформно-приводимых* полей гравитации и некоторых результатов ее, полученных ранее автором.

§ 1 Центрально-симметрические поля

Как известно метрику центрально-симметрического поля (нестатического) можно записать в виде [5, стр. 317] [9, стр. 210]

$$ds^2 = A dx^{1^2} = 2B dx^1\, dx^4 + C(dx^{2^2} + \mathrm{Sin}^2 x^2\, dx^{3^2}) + D dx^{4^2}, \tag{2}$$

где A, B, C, D — некоторые функции от x^1, x^4, и метрика определена с точностью до преобразований координат.

$$x^{1'} = f(x^{1'}, x^4), \; x^{2'} = x^2 + \kappa\pi, x^{3'} = x^3 + s\pi, \; x^{4'} = \theta(x^1, x^4), \tag{3}$$

где κ, s — целые числа, а f, θ — *произвольные* функции своих аргументов.

Строгое математическое определение любого центрально-симметрического поля заключается в том, что линейный элемент определяемый таким полем, допускает 3 членную группу движений, имеющий ту же структуру, что и группа вращений в трехмерном евклидовом пространстве. Это [9] — так называемая *неразрешимая* группа G_3 со структурой операторов.

$$[X_1 X_2] = X_3, \quad [X_2 X_3] = X_1, \quad [X_3 X_1] = X_2$$

где $X_s f \overset{def}{=} \underset{s}{\xi}{}^\alpha\, \partial_\alpha f$ $(s = 1, 2, 3)$ и для той системы координат, в которой имеет место метрика (2), как легко убедиться, векторы $\underset{s}{\xi}{}^\alpha$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \underset{1}{\xi}{}^\alpha &= \mathrm{Cos}\, x^3\, \delta_2^\alpha - \mathrm{Sin}\, x^3\, \mathrm{ctg}\, x^2\, \delta_3^\alpha \\ \underset{2}{\xi}{}^\alpha &= \mathrm{Sin}\, x^3\, \delta_2^\alpha + \mathrm{Cos}\, x^3\, \mathrm{ctg}\, x^2\, \delta_3^\alpha \\ \underset{3}{\xi}{}^\alpha &= \delta_3^\alpha \end{aligned} \tag{4}$$

Заметим, что метрику (2) можно получить строго однозначно, исходя из приведенного выше *инвариантно-группового* определения понятия центрально-симметрического поля, и показать, что системы координат, для которой записаны (2) и (4) определяется вполне корректно [9, стр. 209 — 210]. Наоборот, если исходить из метрик (12), считая ее определением такого поля, то однозначно определяется структура, вид вектора Киллинга (4), доказывается, что вообще метрика не допускает группы движений, отличной от группы (4). Это подтверждает, что определение центральной симметрии данное выше, является инвариантно-групповым и поэтому не зависит от выбора системы координат; оно эквивалентно другим определениям, приводимым в книгах по общей теории относительности.

Используя произвольные функции f и θ в допустимых преобразованиях (3) можно на компоненты $g_{\alpha\beta}(x)$ метрики (2) наложить еще два условия, упрощающие вид метрики. Эти условия, однако, не совсем произвольны, так как они только тогда будут математически корректны, если будут удовлетворять следующим трем условиям: 1). Преобразования (3) должны быть *невырожденными* (это записывается условием: якобиан преобразования $\partial_1 f \partial_4 \theta - \partial_4 f \partial_1 \theta \neq 0$); 2). Оно должно быть также *вещественным* (так как иначе терялся бы смысл понятия *сигнатуры* метрики и, в частности, понятия статичности); 3) Накладываемые при преобразованиях (3) условия не должны содержать никаких *дополнительных* предположений о компонентах метрики $g_{\alpha\beta}(x)$.

Последнее условие особенно важно, так как ошибки в „доказательствах“ утверждения Бирктофа большею частью связаны именно с нарушением этого условия. Например, нельзя было бы потребовать, чтобы компоненты g'_{22} (в новой системе координат), как это часто делается, удовлетворяли требованию $g'_{22} = -(x^{2'})^2$, так как легко подсчитать, что $g'_{22} \equiv g_{22}(x^{\alpha}(x^{\beta'}) \equiv C(x^{\alpha})$, и можно указать много случаев, когда указанное здесь требование не может быть удовлетворено, если не предполагалось, что C обладает вполне определенными свойствами, никак не вытекающими из определения центрально-симметрического поля (например, если $C = \text{const}$, то требование $g'_{22} = -(x^{1'})^2$ невыполнимо). Более того, можно строго показать [2 — 5], что требование $g'_{22} = -(x^{1'})^2$ строго эквивалентно условию статичности пустого пространства-времени.

Среди различных возможных корректных требований можно указать следующие два, удовлетворяющие всем трем указанным выше условиям [9, стр. 211]:

$$g'_{14} = 0, \quad g'_{11} g'_{44} = -1.$$

Выполняя именно такое преобразование координат мы, разумеется, снова получим метрику вида (2), где однако можно положить $B = 0$, $AD = -1$.

После этого, вынося C за скобку, запишем эту метрику в виде

$$ds^2 = C(x^1, x^4)\,[\mathrm{I}(x^1, x^4) + \mathrm{II}(x^2, x^3)], \tag{5}$$

где квадратичные бинарные формы

$$\mathrm{I}(x^1, x^4) \overset{def}{=} \frac{A}{C}\, {dx^1}^2 - \frac{1}{AC}\, {dx^4}^2, \quad \mathrm{II}(x^2, x^3) \overset{def}{=} {dx^2}^2 + \sin^2 x^2\, {dx^3}^2, \tag{6}$$

каждая зависит от двух переменных, различных для каждой формы и имеют, соответственно, сигнатуры вида $(-+)$, $(--)$.

Такие поля можно назвать *конформно-приводимыми* и в специальной системе координат общий вид метрики такого поля за счет *бинарных* преобразований можно записать в виде

$$ds^2 = v^2\,[e(\gamma^2\, {dx^1}^2 - {dx^4}^2) - ({dx^2}^2 + \beta\, {dx^3}^2)], \tag{7}$$

где v — произвольная функция x^1, x^2, x^3, x^4; γ зависит только от x^1, x^4; β от x^2, x^3; $e = \pm 1$ (в связи с чем роль координатного времени может играть или x^1 или x^4 и удобно не фиксировать заранее значение e).

Из (5) следует, что *всякое центрально-симметрическое поле является конформно-приводимым полем специального вида*. Общего решения вопроса о решениях уравнений конформно-приводимого поля, не получило до сих пор, но в том случае, когда рассматривается решение поля в пустоте ($R_{\alpha\beta} = 0$) или же $R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$, имеется общее решение вопроса [9, § 46]. Постановка вопроса, метод решения и исследование некоторых из возможных случаев даны автором статьи. Обобщение для уравнений поля $R_{\alpha\beta} = \varkappa g_{\alpha\beta}$ ($\varkappa \neq 0$) и анализ нерассмотренных случаев даны в работе [11]. Таким образом, для центрально-симметрических полей в *пустоте* возникает возможность приложить общие результаты, имеющие место для конформно-приводимых полей в пустоте.

§ 2. Центрально-симметрические поля в пустоте

Для всякого конформно-приводимого пространства-времени в пустоте, имея в виду метрику (7) можно сформулировать следующие свойства:

1) функция v в (7) имеет вид

$$v^{-1} = \psi(x^1, x^4) + \varphi(x^2, x^3); \tag{8}$$

2) в зависимости от вида функций φ, ψ, β, γ выделяется восемь различных возможных случаев. Для того, чтобы определить какой из этих случаев возможен для центрально-симметрического поля в пустоте, отметим специфику формы (5), при условиях (6). Эта метрика, по сравнению с (7) и (8), имеет следующие особенности:

$$(1)\ \psi^2 = \frac{1}{c^2}\ ,\ \varphi = 0 \qquad (2)\ \beta = \sin x^2.$$

Эти два условия определяют возможный [один из восьми] тип решения однозначно [9, стр. 397]. Имеем, таким образом, следующий результат (вместо утверждения Биркгофа): *общий вид метрики центрально-симметрического поля в пустом пространстве-времени, в специальной системе координат, может быть записан в виде:*

$$ds^2 = \frac{1}{\psi^2}\left[e(\gamma^2 dx^{1^2} - dx^{4^2}) - dx^{2^2} \sin^2 x^2\ dx^{3^2}\right], \tag{8}$$

где функции ψ, γ зависят только от переменных x^1, x^4 и определяются интегро-дифференциальными условиями.

$$\begin{aligned} &\psi_1 = \nu\gamma \\ &\psi_4^2 = c_1\psi^3 + e\psi^2 + \nu^2 \qquad \left(\psi_i \equiv \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right) \\ &\gamma = \psi_4\left(\nu^1 \int \frac{dx^4}{\psi_4^2} + \lambda\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $\nu(x^1)$, $\lambda(x^1)$ — *произвольные* функции от x^1, $e = \pm 1$.

Уравнения (9) в общем случае не интегрируются в элементарных функциях, и только при некоторых дополнительных требованиях, накладываемых на ψ, γ, отсюда могут быть получены различные конкретные решения уравнений поля.

Так, например, известное решение Шварцшильда, можно получить из (9) при $e = 1$ (и только в этом случае), когда роль координатного времени играет переменная x^1, а x^4 является „обобщенным радиусом-вектором". Полагая в (8) и (9)

$$e = 1,\ x^1 \to x^4\ ,\ x^4 \to x^1\ ,\ c_1 = -2m$$

$$\psi = \frac{1}{f}, \quad \gamma = \pm\left(\frac{f-2m}{f^3}\right)^{1/2}, \; f = \frac{c_1}{2} e^{x^1} + \frac{m^2}{c_1} e^{-x^1} + m$$

не трудно убедиться, подбирая λ, ν, что условия (9) выполняются тождественно. После этого, совершая преобразования координат (всегда, очевидно, возможное)

$$x^{1'} = f, \; x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3, \quad x^{4'} = x^4,$$

приведем метрику (8) к классической форме метрики Шварцшильда в „сферических" координатах:

$$dS^2 = -A^{-1}\, dx^{1^2} - x^{1^2}\,(dx^{2^2} + \sin^2 x^2\; dx^{3^2}) + A\; dx^{4^2} \quad (10)$$

$$A = 1 - \frac{2m}{x^1}.$$

Если же взять в (8) $e = -1$, то роль времени будет играть переменная x^4 и не трудно убедиться, что в этом случае ни при каких значениях γ, ψ нельзя получить метрику Шварцшильда. Можно провести следующую грубую оценку сформулированного выше решения по сравнению с метрикой Шварцшильда (оценка ошибки, допущенной Биркгофом). Если обозначить весь класс допустимых решений за единицу, то Биркгоф сначала потерял ровно половину ($e = -1$) и затем пропустил ∞ решений, зависящих от функции одного переменного.

§ 3. Условие статичности

Как известно, поле называется *статическим*, если существует такая система координат, в которой $g_{i_4} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) и $g_{\alpha\beta}$ не зависит от переменной x^4, играющей роль координатного времени [сигнатура метрики $- - - +$]. Это, по существу неинвариантное определение, можно выразить инвариантным образом, пользуясь аппаратом теории групп. Рассмотрим, в частности, центрально-симметрическое статическое решение в пустоте. Его метрика должна быть метрикой Шварцшильда, и, как это ясно непосредственно, в этом случае, кроме операторов движения (4) со структурой G_3 вращений, оно допускает еще и оператор $X_4 = \underset{4}{\xi}^{\sigma}\,\partial_{\sigma}$, где $\underset{4}{\xi}^{\sigma}(x) = \delta^{\alpha}_{4}$, и, следовательно, условие статичности инвариантным образом можно определить условиями: 1) поле допускает группу движений G_4 со структурой [9, §§ 10, 49]

$$[X_1\, X_2] = X_3\,,\; [X_2\, X_3]\, X_1\,,\; [X_3\, X_1] = X_2$$

$$[X_i\; X_4] = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \qquad (11)$$

Причем норма вектора $\underset{4}{\xi}^{\alpha}$, определяющего четвертый оператор (оператор статичности)

$$g_{\alpha\beta}\underset{4}{\xi}^{\alpha}\underset{4}{\xi}^{\beta}>0 \tag{12}$$

(при сигнатуре вида $---+$) 2). Метрика допускает еще дискретную группу зеркальных отображений $x^4\to -x^4$. Условия (11) и (12) не зависят, очевидно, от выбора системы координат и поэтому являются инвариантными как необходимое (но недостаточно, вообще говоря) условие того, что центрально-симметрическое поле в пустоте было и статическим; необходимо, во всяком случае, потребовать, чтобы оно допускало и четвертый оператор статичности.

Для того, чтобы показать некорректность утверждения Биркгофа, поступим следующим образом.

Рассмотрим метрику (8) при $e=-1$, покажем, что она допускает группу G_4 со структурой (11), но, вообще говоря, не удовлетворяет необходимому условию (12).

Определим вид четвертого оператора из уравнений структуры (11), вычисляя для этого коммутаторы $[X_i\, X_4]=0$ для $i=1, 2, 3$ и имея в виду, что эти три оператора определяются формулами (4). Непосредственно получим отсюда, что

$$\underset{4}{\xi}^{\alpha}(x)=\underset{4}{\xi}^{1}(x^1,\ x^4)\,\delta_1^{\alpha}+\underset{4}{\xi}^{4}(x^1,\ x^4)\,\delta_4^{\alpha},\qquad \underset{4}{\xi}^{2}=\underset{4}{\xi}^{3}=0.$$

Для того, чтобы этот оператор определял движение, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял уравнением Киллинга [11, § 51]

$$\underset{4}{\xi}^{\sigma}\,\partial_{\sigma}\,g_{\alpha\beta}+g_{\alpha\sigma}\,\partial_{\beta}\,\underset{4}{\xi}^{\sigma}+g_{\beta\sigma}\,\partial_{\alpha}\,\underset{4}{\xi}^{\sigma}=0. \tag{13}$$

Записывая эти уравнения для метрики (8) при условиях (9), найдем, что вектор $\underset{4}{\xi}^{\alpha}$ будет иметь вид:

$$\underset{4}{\xi}^{\alpha}=-\frac{\nu\psi_4}{\psi_1}\,\delta_1^{\alpha}+\nu\delta_4^{\alpha},\quad \nu_1\neq 0, \tag{14}$$

где ν, ψ определены условиями (9) при $e=-1$. При этом уравнения [13] для данного вектора удовлетворяются вследствие условий (9) и их следствий.

При этом возникает вопрос: не допускает ли пространство, кроме оператора (14), еще и других операторов, среди которых может оказаться оператор статичности?

Автором показано, что, во-первых, всякое конформно-приводимое поле в пустоте является полем I типа по классификации полей, предложенной автором [9, § 19], и, во-вторых, что если поле I типа [в пустоте] допускает группу движений G_r $(r>4)$, то оно будет плоским с метрикой Минковского [9, § 28, 46]. Так как поле, рассматриваемое нами не плоское, то других операторов, кроме (14) поле не допускает. Кроме того, в принципе оператором группы будет всякая линейная комбинация операторов некоторого базиса группы. Не трудно видеть, что для структуры (11), когда вектор Киллинга может иметь только координаты $\underset{4}{\xi}^1$, $\underset{4}{\xi}^4$, всякая линейная комбинация с векторами (4) запрещена. Следовательно, единственный возможный здесь четвертый оператор $\xi^\alpha(x)$ будет иметь только координаты (14). Но не трудно убедиться, что, вообще говоря, для него необходимо условие (12) не выполняется. Именно, записывая (12) при $e=-1$, получим

$$-\frac{\gamma^2}{\psi^2}\left(\frac{\nu\psi_4}{\psi_1}\right)^2+\frac{\nu^2}{\psi^2}>0.$$

Заменяя в этом неравенстве ψ_1, ψ_4 по формулам (9) и деля его на точные квадраты, получим условие:

$$C_1\,\psi<1.$$

В любой четырехмерной области пространства-времени там где ψ непрерывна, она ограничена. Поэтому, выбирая постоянную C_1, (которая произвольна), можно добиться того, что в этой области неравенство не имело места. Следовательно, $\underset{4}{\xi}^\alpha$ не может определять в этом случае оператора статичности. Утверждение Биркгофа не имеет места. Этот же факт можно установить менее экономно, показав, что не существует преобразования координат, которые переводили бы метрику (8) в метрику Шварцшильда при дополнительном условии, что векторы (4) сохраняют свой вид, а вектор $\underset{4}{\xi}^\alpha$ переходит в $\underset{4}{\xi}^{\alpha'}=\delta_4^{\alpha'}$. Мы опускаем это тривиальное рассуждение.

§ 4. Некоторые следствия и обсуждение результата

Существование нестатических центрально-симметрических полей в пустоте означает, что, например, в случае островного центрально-симметрического распределения материи, во *внешней* области пространства-времени могут создаваться нестатические поля. *Центрально-симметрические пульсации гравитирующих масс могут создавать гравитационные волны* — вывод интересный не только для космологических задач.

Как уже отмечалось выше, иногда при формулировке утверждения Биркгофа требуют дополнительно, чтобы метрика на „пространственной“ бесконечности ($r \to \infty$) стремилась к метрике Минковского.

Относительно этого требования следует прежде всего отметить, что оно имеет смысл только в определенной специальной системе координат и поэтому для серьезного рассмотрения требует еще инвариантной формулировки. В инвариантной форме оно означает следующее: по мере приближения к некоторой гиперповерхности (аналог гиперповерхности $r = \mathrm{const} \to \infty$ в сферических координатах, для метрики Шварцшильда), которая определяется физическими требованиями, чтобы около нее поле становилось сколько угодно слабым, метрика пространства сколько угодно мало отличается от метрики плоского пространства (тензор кривизны должен стремиться к нулю). Для поля с метрикой (8) это утверждение выполняется автоматически. Это можно подтвердить прежде всего следующим рассуждением. Постепенное ослабление поля по мере приближения к гиперповерхности S означает уменьшение искривления пространства-времени, что всегда означает увеличение возможности отображения пространства за себя (автоморфизм).

Более точно — ослабление поля эквивалентно утверждению, что его тензор кривизны стремится к нулю, то есть его метрика приближается к метрике плоского пространства. Поэтому, приближаясь к S, пространство сколько угодно мало будет отличаться от пространства Минковского. Всякое поле с метрикой (8) — поле I типа, по классификации автора. Всякое поле I типа, если его подвижность превышает G_4 — плоское. Т. е. предельные условия имеют место автоматически.

Иначе к тому же выводу придем, вычисляя компоненты тензора-кривизны для метрики (8), при условиях (9). Нетрудно убедиться, что все отличные от нуля компоненты тензора кривизны, с точностью до ограниченных по величине множителей, имеют вид

$$\frac{1}{\psi} \tag{15}$$

Следовательно, роль „обобщенного радиуса-вектора в данном случае играет здесь функция ψ. Гиперповерхность S может быть записана в виде $\psi = C$, когда $c \to \infty$. *При неограниченном увеличении ψ будем получать метри-*

ку сколь угодно близкую к метрике плоского пространства.

Следующий вопрос, который возникает естественным образом при исследовании полученного решения, можно формулировать следующим образом.

На больших расстояниях (в волновой зоне) будем иметь слабую гравитационную волну, которую в небольших участках допустимо представлять себе в виде плоской волны, которая должна быть поперечной. Этот вывод однако казалось бы противоречит симметрии задачи.

Тут можно рассуждать следующим образом. Если рассматривать поле на небольших расстояниях, то поле будет вообще, не слабым. Линеаризация уравнений поля не является корректной операцией, а вместе с этим не проходит вывод о поперечности волн, полученный еще в свое время Эйнштейном. Если же изучать поле на больших расстояниях, то вывод о поперечности волн, казалось бы, имеет место. Однако на больших расстояниях, как показано выше, кривизна пространства становится как угодно малой, а поле будет сколько угодно близко к плоскому — волны затухают, их „почти" нет. Тем самым противоречие снимается. Можно возразить, что их только „почти" нет, а на самом деле они все же есть. Ответ является очевидным. Пространство в волновой зоне является статическим (неволновым) с такой же степенью точности, с какой имеет место утверждение о „слабости" поля, связанное с отбрасыванием квадратичных членов в разложении, необходимое для линеаризованной теории и для вывода о поперечности волн.

Во всяком случае, поле с метрикой (8) (при $\epsilon = \pm 1$) несомненно заслуживает тщательного изучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. D. Birkhoff. Relativity and Modern Physics. Cambr. 1923.
2. A. S. Eddington. The Mathematical Theory of Relativity. Cambr. 1924.
3. R. C. Tolman. Relativity, Thermodynamics and Cosmogony. Oxford 1934.
4. P. G. Bergmann. Introduction to the theory of relativity. Nou-York, 1942. Перев. Введение в теорию относительности. ИЛ М. 1947.
5. Л. Ландау и Е. Лифшиц. Теория поля ГТТИ. М.-Л. 1948
6. J. L. Synge. Relativity: the general theory. Amsterdam. 1960.
7. Hand Buch der Physic. t. IV. 1962.
8. И. Г. Фихтенгольц. О сферически-симметрических решениях уравнений тяготения Эйнштейна. Препринт. ДАН СССР, М., 1961, т. V.
9. А. З. Петров. Пространство Эйнштейна. М. Физматгиз, 1961.
10. А. З. Петров. О решении уравнений полей тяготения. Тематический сборник „Геометрия и теория относительности". Казань, Изд. КГУ, 1958.
11. А. М. Анчиков. О конформно-приводимых полях тяготения с

однородным распределением материи. Тематический сб. „Гравитация", Казань, Изд. КГУ, 1962.

12. L. P. Eisenhart. Continous Croups of Transformation. Princeton, 1933. Перев. Непрерывные группы преобразований. ИЛ. М. 1947.

13. В. А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. М. Физматгиз, 1961.

14. В. Унт. О преобразованиях координат и условиях непрерывности в общей теории относительности. Тем. сборник „Исследования по теоретической физике". Изд-во Тартуского университета, 1962.

15. A. Lichnerowicz. Theories relativistes de la gravitation et de l'electromagnetisme. Paris. 1955.