ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 3 (442)

УДК 517.977

Ю.А. КОНЯЕВ

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ НАЧАЛЬНЫХ И КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Для одного класса регулярных и сингулярно возмущенных нелинейных начальных и краевых задач (рассматриваемых с единой точки зрения путем их сведения к квазилинейной системе и далее к однотипному эквивалентному интегральному уравнению) доказаны теоремы о существовании единственного и ограниченного решения, что дополняет или уточняет известные ранее результаты [1]–[4]. С помощью специальных матричных преобразований [5], [6] итерационным методом построено асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной многоточечной краевой задачи со слабой нелинейностью, справедливое как при отсутствии резонансных соотношений, так и при наличии тождественных и нетождественных резонансов (в том числе и в критическом случае, когда точки спектра предельного оператора могут касаться мнимой оси). Отметим, что удобный для численной реализации новый алгоритм выделяет сингулярности решения в замкнутой аналитической форме, позволяя проводить не только качественный, но и количественный анализ сингулярно возмущенных задач.

При изучении в R^n регулярных краевых задач вида

$$\frac{dy}{dx} = G(y,x); \quad \sum_{j=1}^{n} F_j y(x_j) = \alpha; \quad (x \in [a,b]; \;\; a = x_1 < \dots < x_n = b), \tag{1}$$

где F_j — некоторые постоянные $n \times n$ матрицы ($j = \overline{1,n}$), выделим вопрос о существовании их решения в некоторой окрестности какого-либо решения $\varphi(x)$ исходной системы $\varphi' \equiv G(\varphi,x)$. В этом случае при достаточной гладкости функции $G(y,x)$ задача (1) может быть преобразована (после соответствующей замены) к квазилинейной задаче

$$\frac{dz}{dx} = A(x)z + f(z,x); \;\; \sum_{1}^{n} F_j z(x_j) = \beta; \;\; (A(x) = G_y(\varphi(x),x) \in C[a,b]; \;\; f(0,x) \equiv 0; \;\; |z| < k_0) \tag{2}$$

и далее — к эквивалентному интегральному уравнению [5]

$$z(x) = \Phi(x)C + \sum_{1}^{n} \Phi_k(x) \int_{x_k}^{x} \Phi^{-1}(t) f(z,t)\,dt \equiv L(z), \tag{3}$$

где

$$C = F^{-1}\Big(\beta - \sum_{j=1}^{n} F_j \sum_{k=1}^{n} \Phi_k(x_j) \int_{x_k}^{x_j} \Phi^{-1}(t) f(z,t)\,dt\Big); \quad F = \sum_{1}^{n} F_j \Phi(x_j)$$

(эквивалентность задачи (2) и уравнения (3) проверяется [5] непосредственным дифференцированием уравнения (3) в случае $\det F \neq 0$); $\Phi(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \Phi_k(x) = \{\varphi_{jq}(x)\}_1^n$ — фундаментальная матрица соответствующей однородной ($f \equiv 0$) системы $\frac{dz}{dx} = A(x)z$;

$$\Phi_1(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(x) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}; \dots; \ \Phi_n(x) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \varphi_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \varphi_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Пусть для интегрального уравнения* (3)

1. *имеет место оценка*
$$\|L(z)\| \le C_0 + C_1 \max_{x\in[a,b]} \|f(z,x)\| \quad (\|x\| = \max_j |x_j|);$$
2. *для любого $x \in [a,b]$ функция $f(z,x)$ удовлетворяет неравенству $\|f(z,x)\| \le \varphi(\|z\|)$, где $\varphi(r)$ — монотонно возрастающая на $[0,R]$ непрерывная функция;*
3. *уравнение $C_0 + C_1\varphi(r) = r$ имеет хотя бы одно решение $r_0 \in (0,R)$ и при $0 < r < r_0$ не имеет решений ($r_0 < K_0$);*
4. *для любых z_1 и z_2, принадлежащих шару $\overline{S}_{r_0} : \|z\| \le r_0$, для функции $f(z,x)$ справедлива оценка*
$$\|f(z_2,x) - f(z_1,x)\| \le M\|z_2 - z_1\|, \quad x \in [a,b],$$
причем
$$C_1M < 1; \quad \|\beta\| \le \sum_{j=1}^{n} \|F_j\| r_0 \quad \Big(\|F\| = \max_j \sum_k |f_{jk}|\Big).$$

Тогда при условии

$$\det F \ne 0 \quad \Big(F = \sum_{j=1}^{n} F_j \Phi(x_j)\Big)$$

уравнение (3) *и эквивалентная ему краевая задача* (2) *однозначно разрешимы в шаре $\overline{S}_{r_0}$.*

Доказательство. В условиях теоремы оператор L переводит шар $\overline{S}_{r_0}$ в себя, т. к.

$$\|L(z)\| \le C_0 + C_1\varphi(\|z\|) \le C_0 + C_1\varphi(r_0) = r_0.$$

Кроме того, из цепочки неравенств

$$\|L(z_2) - L(z_1)\| \le C_1M\|z_2 - z_1\| \quad (z_1, z_2 \in \overline{S}_{r_0}; \ \ C_1M < 1)$$

следует, что оператор L является в шаре $\overline{S}_{r_0}$ сжимающим, что и обеспечивает однозначную разрешимость интегрального уравнения (3) и краевой задачи (2). □

Замечание 1. Для практического применения теоремы 1 систему (2) можно представить в виде

$$\frac{dz}{dx} = Q(x)z + (A(x) - Q(x))z + f(z,x),$$

где матрица $(A(x) - Q(x))$ достаточно мала по норме, а фундаментальная матрица $\Psi(x)$ линейной системы $z' = Q(x)z$ имеет явное представление. При этом приходим к интегральному уравнению

$$z(x) = \Psi(x)C + \sum_{1}^{n} \Psi_k(x) \int_{x_k}^{x} \Psi^{-1}(t)[(A(t) - Q(t))z(t) + f(z,t)]dt,$$

исследование которого проводится по описанной выше схеме [5].

Замечание 2. В случае, когда только одна из матриц F_j отлична от нуля и невырождена, выражение (3) совпадает с известным интегральным представлением решения задачи Коши [3], [7].

При исследовании сингулярно возмущенных многоточечных краевых задач вида

$$\varepsilon\frac{dy}{dx} = A(x)y + \varepsilon^r f(y,x); \quad \sum_1^m F_j y(x_j) = \alpha \tag{4}$$
$$(x \in [a,b]; \quad a = x_1 < \cdots < x_m = b; \quad 1 \le m \le n; \quad |y| < K_0),$$

где $A(x)$ и $f(y,x)$ — достаточно гладкие функции, со слабой ($r \ge 1$) или сильной ($r = 0$) нелинейностью, условия однозначной разрешимости и структура решения во многом определяются спектром $\{\lambda_{0j}(x)\}_1^n$ линейного оператора $A(x)$. В случае, когда матрица $A(x)$ имеет простой ненулевой стабильный спектр $\{\lambda_{0j}(x)\}_1^n$, удовлетворяющий условиям

$$\sigma_{jk}(x) \equiv \lambda_{0j}(x) - \lambda_{0k}(x) \ne 0; \quad \lambda_{0j}(x) \ne 0 \quad (j \ne k; \ j,k = \overline{1,n}, \ x \in [a,b]). \tag{5}$$

Необходимые результаты могут быть получены с помощью метода специальных матричных преобразований [5], [6], для реализации которого для произвольной квадратной матрицы A понадобятся следующие обозначения:

$$A = \{a_{jk}\}_1^n; \quad \overline{A} = \operatorname{diag}\{a_{11},\ldots,a_{nn}\}; \quad \overline{\overline{A}} = A - \overline{A}.$$

С помощью невырожденной при достаточно малых $|\varepsilon|$ замены [5]

$$y = S_0(x)(E + \varepsilon\overline{\overline{H}}_1(x))z \equiv S(x,\varepsilon)z \quad (S_0^{-1}(x)A(x)S_0(x) = \Lambda_0(x) = \operatorname{diag}\{\lambda_{01}(x),\ldots,\lambda_{0n}(x)\}) \tag{6}$$

система (4) приводится к более удобному для анализа виду

$$\varepsilon\frac{dz}{dx} = Q(x,\varepsilon)z + \varepsilon^r h(z,x,\varepsilon) \quad (|z| < K_1), \tag{7}$$

где $Q(x,\varepsilon) = S^{-1}(x,\varepsilon)(A(x)S(x,\varepsilon) - \varepsilon\frac{dS}{dx}) = \Lambda(x,\varepsilon) + \varepsilon^2 G(x,\varepsilon)$; $\Lambda(x,\varepsilon) = \Lambda_0(x) + \varepsilon\Lambda_1(x) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(x,\varepsilon),\ldots,\lambda_n(x,\varepsilon)\}$.

Рассмотрим сначала для системы (4) с сильной нелинейностью ($r = 0$) двухточечную краевую задачу, при этом краевые условия

$$\sum_1^2 F_j y(x_j,\varepsilon) = \alpha \quad (x_1 = 0; \ x_2 = 1; \ x \in [0,1]) \tag{8}$$

с учетом замены (6) преобразуются к виду

$$\sum_1^2 T_j(\varepsilon)z(x_j,\varepsilon) = \alpha \quad (T_j(\varepsilon) = F_j S(x_j,\varepsilon) = (\vec{T}_{1j}(\varepsilon), \vec{T}_{2j}(\varepsilon))). \tag{9}$$

При выполнении условия

$$\det T(0) \ne 0 \quad (T(0) = (\vec{T}_{11}(0), \vec{T}_{22}(0)) \tag{10}$$

и дополнительных ограничениях на спектр матрицы $A(x)$

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}\lambda_{0j}(x) < 0; \quad j = \overline{1,p}; \quad x \in [0,1] \quad (1 \le p \le n), \\ &\operatorname{Re}\lambda_{0k}(x) > 0; \quad k = \overline{p+1,\, n}; \quad x \in [0,1], \end{aligned} \tag{11}$$

можно от задачи (7)–(9) перейти к нелинейному интегральному уравнению

$$z(x,\varepsilon) = \Phi(x,\varepsilon)C + \sum_1^2 \Phi_k(x,\varepsilon)\int_{x_k}^x \Phi^{-1}(t,\varepsilon)(\varepsilon G(t,\varepsilon)z + \varepsilon^{-1}h(z,t,\varepsilon))dt \equiv L_1(z) \tag{12}$$
$$(L_1 : C[0,1] \to C[0,1]),$$

где вектор C определяется аналогично предыдущему с учетом неравенства (10), с ограниченной по норме в силу (11) фундаментальной матрицей

$$\Phi(x,\varepsilon)=\sum_1^2\Phi_k(x,\varepsilon);\quad \Phi_1(x,\varepsilon)=\mathrm{diag}\{e^{\varphi_1(x,\varepsilon)},\dots,e^{\varphi_p(x,\varepsilon)},0,\dots,0\};$$
$$\Phi_2(x,\varepsilon)=\mathrm{diag}\{0,\dots,0,e^{\varphi_{p+1}(x,\varepsilon)},\dots,e^{\varphi_n(x,\varepsilon)}\};$$
$$\varphi_j(x,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}\int_0^x\lambda_j(t,\varepsilon)dt;\quad \varphi_k(x,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}\int_1^x\lambda_k(t,\varepsilon)dt\quad (j=\overline{1,p};\ \ k=\overline{p+1,\,n}).$$

В этом случае для оператора L_1 (12) имеет место оценка

$$\|L_1(z)\|\le C_0+\varepsilon C_1\|z\|+C_2\max_{x\in[0,1]}\|h(z,x,\varepsilon)\|\quad (0<\varepsilon<\varepsilon_0). \tag{13}$$

Теорема 2. *Пусть для интегрального уравнения* (12)

1. *выполнены условия* (5), (10), (11) *и* (13);
2. *для любого* $x\in[0,1]$ *и достаточно малых* ε $(0<\varepsilon\le\varepsilon_1<\varepsilon_0)$ *функция* $h(z,x,\varepsilon)$ *удовлетворяет неравенству* $\|h(z,x,\varepsilon)\|\le\varphi(\|z\|)$, *где* $\varphi(r)$ *— монотонно возрастающая на* $[0,R]$ *непрерывная функция;*
3. *уравнение* $C_0+\varepsilon_1C_1r+C_2\varphi(r)=r$ *имеет относительно* r *хотя бы одно решение* $r_0\in(0,R)$ *и при* $0<r<r_0$ *не имеет решений* $(r_0<K_1)$;
4. *для любых* z_1 *и* z_2, *принадлежащих шару* $\overline{S}_{r_0}:\|z\|\le r_0$, *для функции* $h(z,x,\varepsilon)$ *справедлива оценка* $\|h(z_2,x,\varepsilon)-h(z_1,x,\varepsilon)\|\le M\|z_2-z_1\|$ $(x\in[0,1];\ 0\le\varepsilon\le\varepsilon_1)$, *и при этом* $\varepsilon_1C_1+C_2M<1$, $\|\alpha\|\le\Big(\sum\limits_1^2\|T_j(\varepsilon)\|\Big)r_0$ $(0\le\varepsilon\le\varepsilon_1)$.

Тогда при достаточно малых $\varepsilon>0$ *уравнение* (12) *и эквивалентная ему задача* (7)–(9) *имеют в шаре* $\overline{S}_{r_0}$ *единственное и ограниченное при* $\varepsilon\to+0$ *решение.*

Доказательство. В условиях теоремы 2 оператор L_1 (12) переводит шар $\overline{S}_{r_0}$ в себя, т. к.

$$\|L_1(z)\|\le C_0+\varepsilon C_1\|z\|+C_2\varphi(\|z\|)\le C_0+\varepsilon_1C_1r_0+C_2\varphi(r_0)=r_0.$$

Кроме того, для любых $z_1,z_2\in\overline{S}_{r_0}$ справедливы неравенства

$$\|L_1(z_2)-L_1(z_1)\|\le\varepsilon C_1\|z_2-z_1\|+C_2M\|z_2-z_1\|\le(\varepsilon_1C_1+C_2M)\|z_2-z_1\|\quad(\varepsilon_1C_1+C_2M<1).$$

Отсюда следует, что оператор L_1 является в шаре $\overline{S}_{r_0}$ сжимающим. Это означает, что интегральное уравнение (12) и эквивалентная ему краевая задача (7)–(9) имеют единственное и ограниченное при $\varepsilon\to+0$ решение в шаре $\overline{S}_{r_0}$. Следовательно, и эквивалентная им двухточечная краевая задача (4)–(8) также однозначно разрешима в некотором шаре $\overline{S}_{r_1}$. $\square$

Для системы (4) со слабой нелинейностью $(r=1)$ может быть рассмотрена и более общая сингулярно возмущенная многоточечная краевая задача

$$\sum_1^n F_jy(x_j,\varepsilon)=\alpha\quad (x\in[a,b]), \tag{14}$$

при этом условие (14) с учетом замены (6) преобразуется к виду

$$\sum_1^n T_j(\varepsilon)z(x_j,\varepsilon)=\alpha\quad (T_j(\varepsilon)=F_jS(x_j,\varepsilon)=(\vec{T}_{1j}(\varepsilon),\dots,\vec{T}_{nj}(\varepsilon))),\quad j=\overline{1,n}. \tag{15}$$

При выполнении условия

$$\det T(0)\ne0\quad (T(0)=(\vec{T}_{11}(0),\dots,\vec{T}_{nn}(0))) \tag{16}$$

и дополнительных ограничениях на спектр матрицы $A(x)$

$$\begin{gathered}\operatorname{Re}\lambda_{0k}(x)\le 0;\quad x\in[x_k,\beta]\quad (k=\overline{2,\,n-1});\\ \operatorname{Re}\lambda_{0k}(x)\ge 0;\quad x\in[a,x_k];\quad \operatorname{Re}\lambda_{01}(x)\le 0;\quad \operatorname{Re}\lambda_{0n}(x)\ge 0\quad (x\in[a,b]);\\ \operatorname{Re}\int_{x_j}^{x}\lambda_{0j}(t)dt<0;\quad x\in[a,b]\setminus x_j\quad (j=\overline{1,n})\end{gathered}\tag{17}$$

(которые в отличие от условий (11) допускают касание точками спектра $\{\lambda_{0j}(x)\}_1^n$ оператора $A(x)$ мнимой оси) можно от задачи (7), (15) перейти к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению

$$z(x,\varepsilon)=\Phi(x,\varepsilon)C+\sum_1^n\Phi_k(x,\varepsilon)\int_{x_k}^{x}\Phi^{-1}(x,\varepsilon)(\varepsilon G(t,\varepsilon)z+h(z,t))dt\equiv L_2(z)\tag{18}$$

с ограниченной по норме фундаментальной матрицей $\Phi(x,\varepsilon)=\sum\limits_1^n\Phi_k(x,\varepsilon)$;

$$\begin{gathered}\Phi_1(x,\varepsilon)=\operatorname{diag}\{e^{\varphi_1(x,\varepsilon)},0,\dots,0\},\ \dots,\ \Phi_n(x,\varepsilon)=\operatorname{diag}\{0,\dots,0,e^{\varphi_n(x,\varepsilon)}\};\\ \varphi_k(x,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}\int_{x_k}^{x}\lambda_k(t,\varepsilon)dt\quad (k=\overline{1,n};\ \ L_2:C[a,b]\to C[a,b])\end{gathered}$$

(постоянный вектор C в силу (16) однозначно определяется аналогично предыдущему краевыми условиями). При этом для оператора L_2 (18) справедлива оценка (13).

Теорема 3. *Пусть для многоточечной краевой задачи* (7), (15) *и эквивалентного ей интегрального уравнения* (18) *выполнены соотношения* (5), (16), (17) *и условия теоремы* 2. *Тогда при достаточно малых* $\varepsilon>0$ *уравнение* (18) *и эквивалентная ему краевая задача* (7), (15) *имеют единственное и ограниченное при* $\varepsilon\to+0$ *решение в шаре* $\overline{S}_{r_0}$ *(при этом эквивалентная им задача* (4), (14) *однозначно разрешима в некотором шаре* $\overline{S}_{r_1}$*).*

Доказательство теоремы 3 во многом аналогично доказательству теоремы 2 и нами опускается.

Теорема 4. *Пусть для краевой задачи* (4), (14) *со слабой нелинейностью* ($r=1$) *выполнены условия теоремы* 3. *Тогда в случае* $f(y,x)=\sum\limits_{|k|=2}^{m}f_k(x)y^k$ *асимптотическое разложение решения указанной задачи может быть при достаточно малых* $\varepsilon>0$ *представлено в виде*

$$y(x,\varepsilon)\sim y_{(N)}(x,\varepsilon)=\sum_0^N y_k(x,\varepsilon)\varepsilon^k\quad (N\ge 1),$$

где функции $y_{(q)}(x,\varepsilon)$ $(q=\overline{1,N})$ *удовлетворяют сингулярно возмущенным линейным краевым задачам*

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{dy_{(0)}}{dx}=A(x)y_{(0)};\quad ly_{(0)}\equiv\sum_1^n F_jy_{(0)}(x_j)=\alpha;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varepsilon\frac{dy_{(q)}}{dx}=A(x)y_{(q)}+\varepsilon f(y_{(q-1)}(x,\varepsilon),x);\quad ly_{(q)}=\alpha\quad (q=\overline{1,N}),\end{gathered}\tag{19}$$

причем оценка

$$\|y(x,\varepsilon)-y_{(N)}(x,\varepsilon)\|_{C[a,b]}\le K\varepsilon^{N+1}\quad (\|y(x)\|_{C[a,b]}=\max_{[a,b]}\|y(x)\|),\tag{20}$$

где постоянная K не зависит от ε, имеет место как при отсутствии резонансных соотношений, когда

$$(p,\lambda_0(x))\neq\lambda_{0j}(x)\quad(j=\overline{1,n};\ \ x\in[a,b]),\quad \lambda_0(x)=(\lambda_{01}(x),\ldots,\lambda_{0n}(x));$$

$$p=(p_1,\ldots,p_n)\quad(p_k=0,1,2,\ldots\ ;\ \ k=\overline{1,n})\quad\Big(2\leq|p|\equiv\sum_1^n p_k\leq q(N)\Big),$$

так и при наличии тождественных и нетождественных резонансов, когда

$$(p_q,\lambda_0(x))\equiv\lambda_{0q}(x)\quad\Big(x\in\Omega_q\subset[a,b];\quad\sum_q|\Omega_q|<b-a;\ \ 1\leq q\leq n\Big)$$

для некоторых целочисленных векторов p_q и номеров q.

Доказательство. Покажем, что каждая частичная сумма $y_{(q)}(x,\varepsilon)=\sum\limits_0^q y_k(x,\varepsilon)\varepsilon^k$, являющаяся решением краевой задачи $(19)_q$, $\varepsilon\frac{dy_{(q)}}{dx}=A(x)y_{(q)}+\varepsilon f(y_{(q-1)}(x,\varepsilon),x)$; $\sum\limits_1^n F_j y_{(q)}(x_j,\varepsilon)=\alpha$, удовлетворяет при достаточной гладкости $f(y,x)$ задаче (7), (15) с точностью $O(\varepsilon^{q+1})$. Действительно, это следует из соотношений

$$\varepsilon\frac{dy_{(0)}}{dx}-A(x)y_{(0)}-\varepsilon f(y_{(0)}(x,\varepsilon),x)=O(\varepsilon);\quad ly_{(0)}=\alpha;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{dy_{(q)}}{dx}-A(x)y_{(q)}-\varepsilon f(y_{(q-1)}(x,\varepsilon),x)+\varepsilon f(y_{(q-1)}(x,\varepsilon),x)-\\ -\varepsilon f(y_{(q)}(x,\varepsilon),x)=\varepsilon[f(y_{(q-1)}(x,\varepsilon),x)-f(y_{(q)}(x,\varepsilon),x)]=O(\varepsilon^{q+1});\\ ly_{(q)}=\alpha\quad(y_{(q)}(x,\varepsilon)=y_{(q-1)}(x,\varepsilon)+\varepsilon^q y_q(x,\varepsilon))\quad(q=\overline{1,N}).\end{gathered}$$

Представим далее решение $y(x,\varepsilon)$ задачи (4), (14) в виде

$$y(x,\varepsilon)=y_{(N+1)}(x,\varepsilon)+\varepsilon^{N+1}R(x,\varepsilon)=y_{(N)}(x,\varepsilon)+\varepsilon^{N+1}R_1(x,\varepsilon),$$

при этом функция $R(x,\varepsilon)$ с учетом (19) является решением краевой задачи

$$\varepsilon\frac{dR}{dx}=A(x)R+\varepsilon\frac{\partial f(y_{(N)},x)}{\partial y}(y_{N+1}(x,\varepsilon)+R)+O(\varepsilon^{N+1});\quad\sum_1^n F_jR(x_j,\varepsilon)=0,$$

которая в силу теоремы 3 имеет единственное и ограниченное при $\varepsilon\to+0$ решение, что и доказывает оценку (20), если учесть, что $\|R_1(x,\varepsilon)\|=\|R(x,\varepsilon)+y_{N+1}(x,\varepsilon)\|\leq C$.

Перейдем далее от задачи (4), (14) к эквивалентной задаче (7), (15), асимптотическое разложение решения которой может быть представлено в виде

$$z(x,\varepsilon)\sim z_{(N)}(x,\varepsilon)=\sum_0^N z_k(x,\varepsilon)\varepsilon^k,$$

где функции $z_{(q)}(x,\varepsilon)$ удовлетворяют линейным краевым задачам

$$\varepsilon\frac{dz_{(0)}}{dx}=\Lambda_0(x)z_{(0)},\quad l_1z_{(0)}\equiv\sum_1^n T_j(\varepsilon)z_{(0)}(x_j,\varepsilon)=\alpha;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{dz_{(q)}}{dx}=\Lambda_0(x)z_{(q)}+\varepsilon g(z_{(q-1)}(x,\varepsilon),x,\varepsilon),\quad l_1z_{(q)}=\alpha\\ (q\geq 1;\ \ g(z,x,\varepsilon)=(\Lambda_1(x)+\varepsilon G(x,\varepsilon))z+h(z,x,\varepsilon))\end{gathered}$$

с точностью до $O(\varepsilon^{q+1})$. При этом структура решения нулевого приближения

$$z_{(0)}(x,\varepsilon)=\Phi_0(x,\varepsilon)C;$$
$$\Phi_0(x,\varepsilon)=\operatorname{diag}\{e^{\varphi_{01}(x,\varepsilon)},\dots,e^{\varphi_{0n}(x,\varepsilon)}\};$$
$$\varphi_{0j}(x,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}\int_{x_j}^{x}\lambda_{0j}(t)dt\quad (j=\overline{1,n};\ \ x\in[a,b])$$

позволяет записать уравнение для определения $z_{(1)}(x,\varepsilon)$ в явном виде

$$\varepsilon\frac{dz_{(1)}}{dx}=\Lambda_0(x)z_{(1)}+\varepsilon P_1(x)e^{\beta_0(x,\varepsilon)}+\varepsilon\sum_{k=1}^{n_1}\overline{Q}_{1k}(x)e^{\beta_k(x,\varepsilon)}+\varepsilon\sum_{k=1}^{m_1}\overline{S}_{1k}(x)e^{\delta_k(x,\varepsilon)};\ \ l_1z_{(1)}=\alpha,\quad (21)$$

где $e^{\beta_q}=(e^{\beta_{q_1}},\dots,e^{\beta_{q_n}})^T$ $(q=\overline{0,n_1})$; $e^{\delta_k}=(e^{\delta_{k_1}},\dots,e^{\delta_{k_n}})^T$ $(k=\overline{1,m_1})$;

$$\varepsilon\frac{d\beta_{0j}}{dx}\equiv\lambda_{0j}(x)\quad (x\in[a,b];\ \ j=\overline{1,n});$$
$$\varepsilon\frac{d\beta_{kj}}{dx}\equiv\nu_{kj}(x)\neq\lambda_{0q}(x)\quad (j,q=\overline{1,n};\ \ k=\overline{1,n_1};\ \ x\in[a,b];$$
$$\varepsilon\frac{d\delta_{kj}}{dx}\equiv\rho_{kj}(x)=\lambda_{0q_j}(x)\quad (j=\overline{1,n};\ \ 1\le q_j\le n;\ \ x\in\Omega_{q_j}\subset[a,b];\ \ k=\overline{1,m_1}).$$

При этом функция $\varepsilon P_1(x)e^{\beta_0(x,\varepsilon)}$ в уравнении (21) отражает наличие тождественных резонансов, функции $\varepsilon\overline{Q}_{1k}(x)e^{\beta_k(x,\varepsilon)}$ — наличие нерезонансных сингулярностей, а функции $\varepsilon\overline{S}_{1k}(x)e^{\delta_k(x,\varepsilon)}$ — наличие нетождественных резонансов. Решение линейной системы (21) будем искать в виде суммы решений однородной задачи и четырех ее частных решений различных типов:

$$z_{(1)}(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{4}z_{1k}(x,\varepsilon)=z_{10}(x,\varepsilon)+O(\varepsilon),$$

где $z_{10}(x,\varepsilon)=\Phi_0(x,\varepsilon)C_1$ — общее решение однородной системы $\varepsilon\frac{dz}{dx}=\Lambda_0(x)z$; $z_{11}(x,\varepsilon)=\overline{V}_1(x)e^{\beta_0(x,\varepsilon)}=O(\varepsilon^{N+1})$ — частное решение неоднородной системы $\varepsilon\frac{dz}{dx}=\Lambda_0(x)z+\varepsilon\overline{P}_1(x)e^{\beta_0(x,\varepsilon)}$, возникающее при наличии тождественных резонансов; $z_{12}(x,\varepsilon)=\varepsilon\overline{\overline{V}}_1(x,\varepsilon)e^{\beta_0(x,\varepsilon)}$ — частное решение неоднородной системы

$$\varepsilon\frac{dz}{dx}=\Lambda_0(x)z+\varepsilon\overline{\overline{P}}_1(x)e^{\beta_0(x,\varepsilon)},$$

также отражающее наличие тождественных резонансов; $z_{13}(x,\varepsilon)=\varepsilon\sum\limits_{0}^{n_1}\overline{H}_{1k}(x)e^{\beta_k(x,\varepsilon)}$ — частное решение неоднородной системы

$$\varepsilon\frac{dz}{dx}=\Lambda_0(x)z+\varepsilon\sum_{k=1}^{n_1}\overline{Q}_{1k}(x)e^{\beta_k(x,\varepsilon)},$$

отвечающее нерезонансным правым частям; $z_{14}(x,\varepsilon)=O(\varepsilon)$ — частное решение неоднородной системы

$$\varepsilon\frac{dz}{dx}=\Lambda_0(x)z+\varepsilon\sum_{k=1}^{m_1}\overline{S}_{1k}(x)e^{\delta_k(x,\varepsilon)},\quad (22)$$

отражающее наличие нетождественных резонансов. При этом постоянный вектор C_1 определяется краевыми условиями, а матрицы $\overline{V}_1(x)$, $\overline{\overline{V}}_1(x,\varepsilon)$, $\overline{H}_{1k}(x,\varepsilon)$ $(k=\overline{1,n_1};\ x\in[a,b])$ при непосредственной подстановке указанных частных решений в соответствующие уравнения, что позволяет записать

$$\frac{d\overline{V}_1}{dx} = \overline{P}_1(x) = \operatorname{diag}\{p_{11}(x), \dots, p_{1n}(x)\},$$

$$\overline{V}_1(x) = \operatorname{diag}\{v_{11}(x), \dots, v_{1n}(x)\}; \quad v_{1j}(x) = \int_{x_j}^{x} p_{1j}(t)dt \quad (j = \overline{1,n});$$

$$\varepsilon\frac{d\overline{\overline{V}}_1}{dx} = \Lambda_0(x)\overline{\overline{V}}_1 - \overline{\overline{V}}_1\Lambda_0(x); \quad \overline{\overline{V}}_1(x,\varepsilon) = \sum_0^\infty \overline{\overline{V}}_{1k}(x)\varepsilon^k;$$

$$\varepsilon\frac{d\overline{H}_{1q}}{dx} = (\Lambda_0(x) - \overline{N}_{0q}(x))\overline{H}_{1q} + \overline{Q}_{1q}(x) \quad (q = \overline{1,n_1}),$$

$$\overline{N}_{0q}(x) = \operatorname{diag}\{\nu_{1q}(x), \dots, \nu_{nq}(x)\}, \quad \overline{H}_{1q}(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^\infty \overline{H}_{1qk}(x)\varepsilon^k.$$

Последующие приближения при отсутствии нетождественных резонансов имеют вид

$$z_{(q)}(x,\varepsilon) = \Phi_0(x,\varepsilon)C_q + V_q(x,\varepsilon)e^{\beta_0(x,\varepsilon)} + \varepsilon\sum_1^{n_q}\overline{H}_{q_k}(x,\varepsilon)e^{\mu_k(x,\varepsilon)},$$

где постоянный вектор C_q однозначно определяется краевыми условиями. При наличии нетождественных резонансов вид соответствующего уравнения может усложняться за счет появления новых сингулярностей, определяемых уравнениями вида (22), которые допускают на каждом последующем шаге непосредственное интегрирование, в частности,

$$z_{14}(x,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n}\Phi_{0j}(x,\varepsilon)\int_{x_j}^{x}\Phi_0^{-1}(t,\varepsilon)\sum_{k=1}^{m_1}\overline{S}_{1k}(t)e^{\delta_k(t,\varepsilon)}dt,$$

причем $\|z_{14}(x,\varepsilon)\| = O(\varepsilon)$ при $x \in [a,b]$.

Литература

1. Ломов С.А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений.* – М.: Наука, 1981. – 398 с.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.* – М.: Высш. школа, 1990. – 208 с.
3. Треногин В.А. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1980. – 496 с.
4. Рожков В.И., Панфилов Н.Г. *Краевая задача для линейной системы и малым параметром при производной* // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14. – № 10. – С. 1806–1813.
5. Коняев Ю.А. *Конструктивные методы исследования многоточечных краевых задач* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 2. – С. 57–61.
6. Коняев Ю.А. *Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений* // Матем. сб. – 1993. – № 12. – С. 133–144.
7. Коллатц Л. *Функциональный анализ и вычислительная математика.* – М.: Мир, 1969. – 448 с.

Московский государственный энергетический институт (Московский технический университет)

Поступили
первый вариант 25.04.1995
окончательный вариант 22.06.1998