

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Направление: 050100.68: Педагогическое образование

Профиль: Информационные технологии в физико-математическом образовании

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

**«Математическое моделирование движения небесных тел
с помощью пакета программ Maple»**

Работа завершена:

«___» _____ 2014 г. _____ (Аслан Осман.)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель,

доктор физ.-мат. наук

«___» _____ 2014 г. _____ (Сушков С.В.)

Рецензент:

Проф. кафедры теории относительности

и гравитации

«___» _____ 2014 г. _____ (Хуснутдинов Н.Р.)

Дата защиты:

«___» _____ 2014 г. Оценка _____

Заведующий кафедрой

Доктор физ.-мат. наук, профессор

«___» _____ 2014 г. _____ (Игнатьев Ю.Г.)

Казань – 2014 год

Оглавление

Введение		2
I	Кривые второго порядка	3
I.1	Кривые второго порядка и их свойства	3
I.2	Эллипс	12
I.3	Гипербола	17
I.4	Парабола	23
I.5	Некоторые общие свойства эллипса, гиперболы, параболы	27
II	Математические основы движения в поле тяжести	31
II.1	Движение материальной точки под действием силы тяготения (задача двух тел)	31
II.2	Движение искусственных спутников Земли	36
III	Математическое моделирование в MAPLE	41
III.1	Кривые второго порядка	41
III.2	Движение небесных тел	51
III.3	Движение искусственных спутников Земли	65
Заключение		70
Литература		72

Введение

Задачи о движении тела во внешнем поле тяготения и о движении двух тел под действием взаимной силы тяготения представляют одну из центральных проблем классической физики. Важнейшим приложением этой проблемы является описание движения планет в Солнечной системе, а также описание движения искусственных спутников Земли. Феноменологические законы движения планет были получены Кеплером в 17 веке. Позже Ньютон получил математическое обоснование законов Кеплера на основе теории построенной им теории тяготения.

В своей диссертационной работе я ставлю целью изучение движения небесных тел с помощью компьютерного моделирования. Для достижения этой цели ставятся следующие задачи:

- Изучить основные законы движения небесных тел (закон тяготения, законы Кеплера)
- Изучить возможности пакета Maple для компьютерного моделирования
- Создать программу построения кривых второго порядка в пакете Maple
- Разработать компьютерные модели движения небесных тел, иллюстрирующие различные законы Кеплера
- Построить компьютерные модели движения искусственных спутников Земли

Глава I

Кривые второго порядка

I.1 Кривые второго порядка и их свойства

I.1.1 Канонические уравнения линий второго порядка

Алгебраической линией второго порядка называется геометрическое место точек плоскости, которое в какой-либо аффинной системе координат Ox_1x_2 может быть задано уравнением вида

$$p(x_1, x_2) = 0,$$

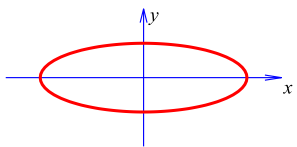
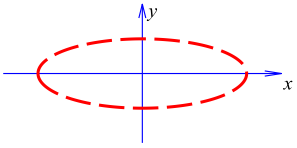
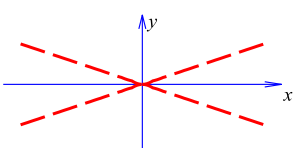
где $p(x_1, x_2)$ — многочлен второй степени двух переменных x_1, x_2 .

Требуется найти прямоугольную систему координат, в которой уравнение линии приняло бы наиболее простой вид.

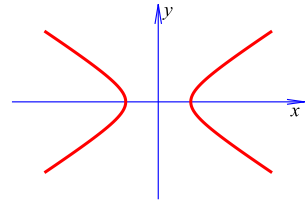
Результатом решения поставленной задачи является следующая основная теорема.

Теорема.1: (Классификация алгебраических линий второго порядка). Для любой алгебраической линии второго порядка существует прямоугольная система координат Oxy , в которой уравнение этой линии принимает один из следующих девяти канонических видов:

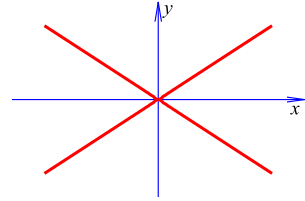
Таблица.1: Канонические уравнения линий второго порядка

1.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	уравнение эллипса;	
2.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	уравнение мнимого эллипса;	
3.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	уравнение пары мнимых пересекающихся прямых;	

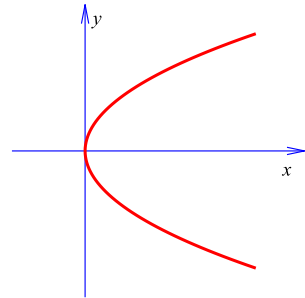
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ уравнение гиперболы;



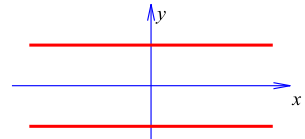
5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ уравнение пары пересекающихся прямых;



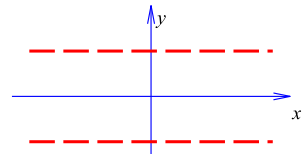
6. $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ уравнение параболы;



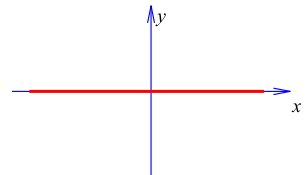
7. $y^2 - b^2 = 0$ уравнение пары параллельных прямых;



8. $y^2 + b^2 = 0$ уравнение пары мнимых параллельных прямых;



9. $y^2 = 0$ уравнение пары мнимых совпадающих прямых.



Теорема 1. даёт **аналитические определения** линий второго порядка. Линии (1), (4), (5), (6), (7), (9) **называются вещественными (действительными)**, а линии (2), (3), (8) — **мнимыми**.

Приведем доказательство теоремы, поскольку оно фактически содержит алгоритм решения поставленной задачи.

Без ограничения общности можно предполагать, что уравнение линии второго порядка задано в прямоугольной системе координат Oxy . В противном случае можно перейти от непрямоугольной системы координат Ox_1x_2 к прямоугольной Oxy , при этом уравнение линии будет иметь тот же вид и ту же степень согласно теореме об инвариантности порядка алгебраической линии.

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy алгебраическая линия второго порядка задана уравнением

I.1. Кривые второго порядка и их свойства

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \quad (\text{I.1})$$

в котором хотя бы один из старших коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} отличен от нуля, т.е. левая часть (I.1) — многочлен двух переменных x, y второй степени. Коэффициенты при первых степенях переменных x и y , а также при их произведении $x \cdot y$ взяты удвоенными просто для удобства дальнейших преобразований.

Для приведения уравнения (I.1) к каноническому виду используются следующие преобразования прямоугольных координат:

– поворот на угол φ

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi, \\ y = x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi; \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

– параллельный перенос

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'; \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

– изменение направлений координатных осей (отражения в координатных осях):

$$\text{оси ординат} \begin{cases} x = x', \\ y = -y', \end{cases} \quad \text{оси абсцисс} \begin{cases} x = -x', \\ y = y', \end{cases} \quad \text{обеих осей} \begin{cases} x = -x', \\ y = -y'; \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

– переименование координатных осей (отражение в прямой $y = x$)

$$\begin{cases} x = y', \\ y = x', \end{cases} \quad (\text{I.5})$$

где x, y и x', y' — координаты произвольной точки в старой (Oxy) и новой ($O'x'y'$) системах координат соответственно.

Кроме преобразования координат обе части уравнения можно умножать на отличное от нуля число.

Рассмотрим сначала частные случаи, когда уравнение (I.1) имеет вид:

$$\begin{aligned} (I) : \lambda_2 \cdot y^2 + a_0 &= 0, \quad \lambda_2 \neq 0; \\ (II) : \lambda_2 \cdot y^2 + 2 \cdot a_1 \cdot x &= 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad a_1 \neq 0; \\ (III) : \lambda_2 \cdot y^2 + \lambda_1 \cdot x^2 + a_0 &= 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения (также многочлены в левых частях) называются **приведёнными**. Покажем, что приведённые уравнения (I), (II), (III) сводятся к каноническим (1)–(9).

Уравнение (I). Если в уравнении (I) свободный член равен нулю ($a_0 = 0$), то, разделив обе части уравнения $\lambda_2 \cdot y^2 = 0$ на старший коэффициент ($\lambda_2 \neq 0$), получим $y^2 = 0$ — *уравнение двух совпадающих прямых* (9), содержащих ось абсцисс ($y = 0$). Если же свободный член отличен от нуля ($a_0 \neq 0$), то разделим обе части уравнения (I) на старший коэффициент ($\lambda_2 \neq 0$): $y^2 + \frac{a_0}{\lambda_2} = 0$. Если величина $\frac{a_0}{\lambda_2}$ отрицательная, то, обозначив её через $-b^2$, где $b = \sqrt{-\frac{a_0}{\lambda_2}}$, получаем $y^2 - b^2 = 0$ — *уравнение пары*

параллельных прямых (7): $y = b$ или $y = -b$. Если же величина $\frac{a_0}{\lambda_2}$ положительная, то, обозначив её через b^2 , где $b = \sqrt{\frac{a_0}{\lambda_2}}$, получаем $y^2 + b^2 = 0$ — уравнение пары мнимых параллельных прямых (8). Это уравнение не имеет действительных решений, поэтому на координатной плоскости нет точек, отвечающих этому уравнению. Однако в области комплексных чисел уравнение $y^2 + b^2 = 0$ имеет два сопряжённых решения $y = \pm ib$, которые иллюстрируются штриховыми линиями (см. пункт 8 теоремы 1.).

Уравнение (II). Разделим уравнение на старший коэффициент ($\lambda_2 \neq 0$) и перенесем линейный член в правую часть: $y^2 = -\frac{2a_1}{\lambda_2}x$. Если величина $\frac{a_1}{\lambda_2}$ отрицательная, то, обозначая $p = -\frac{a_1}{\lambda_2} > 0$, получаем $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ — уравнение параболы (6). Если величина $\frac{a_1}{\lambda_2}$ положительная, то, изменяя направление оси абсцисс, т.е. выполняя второе преобразование в I.4, получаем уравнение $(y')^2 = \frac{2a_1}{\lambda_2}x'$ или $(y')^2 = 2 \cdot p \cdot x'$, где $p = \frac{a_1}{\lambda_2} > 0$. Это уравнение параболы в новой системе координат $O'x'y'$.

Уравнение (III). Возможны два случая: либо старшие коэффициенты одного знака (*эллиптический случай*), либо противоположных знаков (*гиперболический случай*).

В *эллиптическом случае* ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$) при $a_0 \neq 0$ переносим свободный член в правую часть и делим обе части на $-a_0 \neq 0$:

$$(III) \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot x^2 + \lambda_2 \cdot y^2 = -a_0 \Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{-a_0} \cdot x^2 + \frac{\lambda_2}{-a_0} \cdot y^2 = 1.$$

Если знак старших коэффициентов λ_1, λ_2 противоположен знаку a_0 , то, обозначая положительные величины $\frac{-a_0}{\lambda_1}$ и $\frac{-a_0}{\lambda_2}$ через a^2 и b^2 , получаем $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — уравнение эллипса (1).

Если знак старших коэффициентов λ_1, λ_2 совпадает со знаком a_0 , то, обозначая положительные величины $\frac{a_0}{\lambda_1}$ и $\frac{a_0}{\lambda_2}$ через a^2 и b^2 , получаем $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ — уравнение мнимого эллипса (2). Это уравнение не имеет действительных решений. Однако оно имеет решения в области комплексных чисел, которые иллюстрируются штриховой линией (см. пункт 2 теоремы 1.).

Можно считать, что в уравнениях эллипса (действительного или мнимого) коэффициенты удовлетворяют неравенству $a \geq b$, в противном случае этого можно добиться, переименовав координатные оси, т.е. делая преобразование I.5 системы координат.

Если свободный член уравнения (III) равен нулю ($a_0 = 0$), то, обозначая положительные величины $\frac{1}{|\lambda_1|}$ и $\frac{1}{|\lambda_2|}$ через a^2 и b^2 , получаем $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ — уравнение пары мнимых пересекающихся прямых (3). Этому уравнению удовлетворяет только точка с координатами $x = 0$ и $y = 0$, т.е. точка O — начало координат. Однако в области комплексных чисел левую часть уравнения можно разложить на множители

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{y}{b} + i\frac{x}{a}\right)\left(\frac{y}{b} - i\frac{x}{a}\right),$$

1.1. Кривые второго порядка и их свойства

поэтому уравнение имеет сопряженные решения $y = \pm i \frac{b}{a} \cdot x$, которые иллюстрируются штриховыми линиями, пересекающимися в начале координат (см. пункт 3 теоремы 1.).

В *гиперболическом случае* ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$) при $a_0 \neq 0$ переносим свободный член в правую часть и делим обе части на $-a_0 \neq 0$:

$$(III) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 \cdot x^2 + \lambda_2 \cdot y^2 = -a_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda_1}{-a_0} \cdot x^2 + \frac{\lambda_2}{-a_0} \cdot y^2 = 1.$$

Величины $\frac{-a_0}{\lambda_1}$ и $\frac{-a_0}{\lambda_2}$ имеют противоположные знаки. Без ограничения общности считаем, что знак λ_2 совпадает со знаком свободного члена a_0 , т.е. $\frac{a_0}{\lambda_2} > 0$. В противном случае нужно переименовать координатные оси, т.е. сделать преобразование 1.5 системы координат. Обозначая положительные величины $\frac{-a_0}{\lambda_1}$ и $\frac{a_0}{\lambda_2}$ через a^2 и b^2 , получаем $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — уравнение гиперболы (4).

Пусть в уравнении (III) свободный член равен нулю ($a_0 = 0$). Тогда можно считать, что $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ (в противном случае обе части уравнения умножим на -1). Обозначая положительные величины $\frac{1}{\lambda_1}$ и $-\frac{1}{\lambda_2}$ через a^2 и b^2 , получаем $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ — уравнение пары пересекающихся прямых (5). Уравнения прямых находятся в результате разложения на множители левой части уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0, \text{ т.е. } y = \pm \frac{b}{a} \cdot x.$$

Таким образом, приведённые уравнения (I), (II), (III) алгебраической линии второго порядка сводятся к одному из канонических видов (1)–(9), перечисленных в (теореме 1.)

Осталось показать, что общее уравнение 1.1 можно свести к приведённым при помощи преобразований прямоугольной системы координат.

Упрощение общего уравнения 1.1 производится в два этапа. На первом этапе при помощи поворота системы координат «уничтожается» член с произведением неизвестных. Если произведения неизвестных нет ($a_{12} = 0$), то поворот делать не надо (в этом случае переходим сразу ко второму этапу). На втором этапе при помощи параллельного переноса «уничтожаются» один или оба члена первой степени. В результате получаются **приведённые** уравнения (I), (II), (III).

Первый этап: преобразование уравнения линии второго порядка при повороте прямоугольной системы координат.

Если коэффициент $a_{12} \neq 0$, выполним поворот системы координат на угол φ . Подставляя выражения 1.2 в уравнение 1.1, получаем:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot (x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot (x' \cos \varphi - y' \sin \varphi) \cdot (x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) + \\ + a_{22} \cdot (x' \sin \varphi + y' \cos \varphi)^2 + 2 \cdot a_1 (x' \cos \varphi - y' \sin \varphi) + \\ + 2 \cdot a_2 \cdot (x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) + a_0 = 0. \end{aligned}$$

Приводя подобные члены, приходим к уравнению вида 1.1:

$$a'_{11} \cdot (x')^2 + 2 \cdot a'_{12} \cdot x' \cdot y' + a'_{22} \cdot (y')^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x' + 2 \cdot a'_2 \cdot y' + a'_0 = 0, \quad (I.6)$$

где

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11} \cdot \cos^2 \varphi + 2 \cdot a_{12} \cos \varphi \cdot \sin \varphi + a_{22} \cdot \sin^2 \varphi; \\ a'_{12} &= -a_{11} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + a_{12} \cdot (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + a_{22} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi; \\ a'_{22} &= a_{11} \cdot \sin^2 \varphi - 2 \cdot a_{12} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + a_{22} \cdot \cos^2 \varphi; \\ a'_1 &= a_1 \cdot \cos \varphi + a_2 \cdot \sin \varphi; \quad a'_2 = -a_1 \cdot \sin \varphi + a_2 \cdot \cos \varphi; \quad a'_0 = a_0. \end{aligned}$$

Определим угол φ так, чтобы $a'_{12} = 0$. Преобразуем выражение для a'_{12} , переходя к двойному углу:

$$a'_{12} = -\frac{1}{2} \cdot a_{11} \cdot \sin 2\varphi + a_{12} \cdot \cos 2\varphi + \frac{1}{2} \cdot a_{22} \cdot \sin 2\varphi = \frac{a_{22} - a_{11}}{2} \cdot \sin 2\varphi + a_{12} \cdot \cos 2\varphi.$$

Угол φ должен удовлетворять однородному тригонометрическому уравнению $\frac{a_{22} - a_{11}}{2} \cdot \sin 2\varphi + a_{12} \cdot \cos 2\varphi = 0$, которое равносильно уравнению

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2 \cdot a_{12}}, \quad (I.7)$$

поскольку $a_{12} \neq 0$. Это уравнение имеет бесконечное количество корней

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arccctg} \frac{a_{11} - a_{22}}{2 \cdot a_{12}} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Выберем любой из них, например, угол φ из интервала $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Тогда в уравнении 1.6 исчезнет член $2 \cdot a'_{12} \cdot x' \cdot y'$, поскольку $a'_{12} = 0$. Обозначив оставшиеся старшие коэффициенты через $\lambda_1 = a'_{11}$ и $\lambda_2 = a'_{22}$, получим уравнение

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x' + 2 \cdot a'_2 \cdot y' + a'_0 = 0. \quad (I.8)$$

Уравнение 1.8 является уравнением второй степени (при преобразовании 1.2 порядок линии сохраняется), т.е. хотя бы один из старших коэффициентов λ_1 или λ_2 отличен от нуля. Далее будем считать, что именно коэффициент при $(y')^2$ не равен нулю ($\lambda_2 \neq 0$). В противном случае (при $\lambda_2 = 0$ и $\lambda_1 \neq 0$) следует сделать поворот системы координат на угол $\varphi + \frac{\pi}{2}$, который также удовлетворяет условию 1.7. Тогда вместо координат x' , y' в 1.8 получим y' , $-x'$ соответственно, т.е. отличный от нуля коэффициент λ_1 будет при $(y')^2$.

Второй этап: преобразование уравнения линии второго порядка при параллельном переносе прямоугольной системы координат.

Уравнение 1.8 можно упростить, выделяя полные квадраты. Нужно рассмотреть два случая: $\lambda_1 \neq 0$ или $\lambda_1 = 0$ (согласно предположению $\lambda_2 \neq 0$), которые называются **центральный** (включающий эллиптический и гиперболический случаи) или **параболический** соответственно. Геометрический смысл этих названий раскрывается в дальнейшем.

I.1. Кривые второго порядка и их свойства

Центральный случай: $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$. Выделяя полные квадраты по переменным x' , y' , получаем

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \left[(x')^2 + 2 \frac{a'_1}{\lambda_1} x' + \left(\frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 \right] + \lambda_2 \left[(y')^2 + 2 \frac{a'_2}{\lambda_2} y' + \left(\frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2 \right] - \\ & - \lambda_1 \left(\frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 - \lambda_2 \left(\frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2 + a'_0 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \lambda_1 \left(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2 - \lambda_1 \left(\frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 - \lambda_2 \left(\frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2 + a'_0 = 0. \end{aligned}$$

После замены переменных

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}, \\ y'' = y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}, \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

получаем уравнение

$$\lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + a''_0 = 0, \quad (\text{I.10})$$

где

$$a''_0 = -\lambda_1 \left(\frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 - \lambda_2 \left(\frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2 + a'_0.$$

Параболический случай: $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 \neq 0$. Выделяя полный квадрат по переменной y' , получаем

$$\begin{aligned} & \lambda_2 \cdot \left[(y')^2 + 2 \cdot \frac{a'_2}{\lambda_2} \cdot y' + \left(\frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2 \right] + 2 \cdot a'_1 \cdot x' - \lambda_2 \left(\frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2 + a'_0 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x' - \lambda_2 \left(\frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2 + a'_0 = 0. \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

Если $a'_1 \neq 0$, то последнее уравнение приводится к виду

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot \left[x' + \frac{a'_0}{2 \cdot a'_1} - \frac{\lambda_2}{2 \cdot a'_1} \cdot \left(\frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2 \right] = 0.$$

Сделав замену переменных

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{a'_0}{2 \cdot a'_1} - \frac{\lambda_2}{2 \cdot a'_1} \cdot \left(\frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2, \\ y'' = y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}, \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

получим,

$$\lambda_2 \cdot (y'')^2 + 2 \cdot a''_1 \cdot x'' = 0, \quad (\text{I.13})$$

где $a_1'' = a_1'$.

Если $a_1' = 0$, то уравнение 1.11 приводится к виду,

$$\lambda_2 \cdot (y'')^2 + a_0'' = 0, \quad (\text{I.14})$$

где $a_0'' = -\lambda_2 \left(\frac{a_2'}{\lambda_2} \right)^2 + a_0' = 0$,

$$\begin{cases} x'' = x', \\ y'' = y' + \frac{a_2'}{\lambda_2}. \end{cases} \quad (\text{I.15})$$

Замены переменных 1.9, 1.12, 1.15 соответствуют параллельному переносу системы координат $Ox'y'$ (см. пункт 1"а"замечаний 2.3).

Таким образом, при помощи параллельного переноса системы координат $O'x'y'$ получаем новую систему координат $O''x''y''$, в которой уравнение линии второго порядка принимает вид 1.9, или 1.13, или 1.14. Эти уравнения являются приведёнными (вида (III), (II) или (I) соответственно).

Основная теорема 1. о приведении уравнения алгебраической линии второго порядка к каноническому виду доказана.

Замечания 1.

1. Система координат, в которой уравнение алгебраической линии второго порядка имеет канонический вид, называется **канонической**. Каноническая система координат определяется неоднозначно. Например, изменяя направление оси ординат на противоположное, снова получаем каноническую систему координат, так как замена переменной y на $(-y)$ не изменяет уравнений (1)–(9). Поэтому ориентация канонической системы координат не имеет принципиального значения, её всегда можно сделать правой, изменив при необходимости направление оси ординат.

2. Ранее показано, что преобразования прямоугольных систем координат на плоскости сводятся к одному из преобразований:

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi, \\ y = y_0 + x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 + x' \cdot \cos \varphi + y' \cdot \sin \varphi, \\ y = y_0 + x' \cdot \sin \varphi - y' \cdot \cos \varphi. \end{cases}$$

Поэтому задача приведения уравнения линии второго порядка к каноническому виду сводится к нахождению начала $O'(x_0, y_0)$ канонической системы координат $O'x'y'$ и угла φ наклона её оси абсцисс $O'x'$ к оси абсцисс Ox исходной системы координат Oxy .

3. В случаях (3), (5), (7), (8), (9) линии называются **распадающимися**, поскольку соответствующие им многочлены второй степени разлагаются в произведение многочленов первой степени.

I.1.2 Схема приведения уравнения линии второго порядка к каноническому виду

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy алгебраическая линия второго порядка задана уравнением 1.1:

$$a_{11} \cdot x^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot x \cdot y + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_1 \cdot x + 2 \cdot a_2 \cdot y + a_0 = 0.$$

I.1. Кривые второго порядка и их свойства

Чтобы привести уравнение к каноническому виду, нужно выполнить следующие действия.

1. Если в уравнении имеется член с произведением неизвестных ($a_{12} \neq 0$), то делаем поворот системы координат:

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos \varphi - y' \cdot \sin \varphi, \\ y = x' \cdot \sin \varphi + y' \cdot \cos \varphi \end{cases}$$

на угол φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$), удовлетворяющий равенству $\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$. При этом получим "почти"приведённое уравнение линии второго порядка:

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x' + 2 \cdot a'_2 \cdot y' + a_0 = 0.$$

Если $a_{12} = 0$, переходим к пункту 2, поворот системы координат делать не нужно, так как исходное уравнение имеет "почти"приведённый вид.

2. Выполняем параллельный перенос системы координат:

а) если в уравнении нет линейных членов, то переходим к пункту 3;

б) если в уравнении имеется линейный член с какой-либо неизвестной и квадратичный член с этой же неизвестной, то, дополняя эти члены до полного квадрата, делаем замену, чтобы в уравнении не стало линейного члена с этой неизвестной. Например, если в уравнении $\lambda_1 \neq 0$ и $a'_1 \neq 0$, то выполняем преобразования:

$$\begin{aligned} \lambda_1 (x')^2 + 2 \cdot a'_1 \cdot x' &= \lambda_1 \left[(x')^2 + 2 \frac{a'_1}{\lambda_1} x' + \left(\frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 \right] - \lambda_1 \cdot \left(\frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 = \\ &= \lambda_1 \cdot \left(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 - \lambda_1 \cdot \left(\frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2, \end{aligned}$$

а затем замену неизвестных $x'' = x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}$, $y'' = y'$, после которой в уравнении не будет линейного члена с неизвестной x'' ;

в) если в уравнении имеется только один линейный член с какой-либо неизвестной, а квадрат этой неизвестной отсутствует, то при помощи замены этой переменной надо сделать равным нулю свободный член уравнения. Например, если уравнение имеет вид

$$\lambda_1 \cdot (x')^2 + 2 \cdot a'_2 \cdot y' + a_0 = 0,$$

то, выполняя замену неизвестных $x'' = x'$, $y'' = y' + \frac{a_0}{2a'_2}$, получаем уравнение без свободного члена:

$$\lambda_1 \cdot (x'')^2 + 2 \cdot a'_2 \cdot y'' = 0.$$

3. Полученное в результате упрощений (пункт 2) уравнение имеет «почти» канонический вид [9]. Для окончательного упрощения «почти» канонического уравнения при необходимости применяются следующие преобразования:

а) переименование координатных осей: $x' = y''$, $y' = x''$;

б) изменение направления координатной оси, например оси абсцисс: $x' = -x''$, $y' = y''$;

в) умножение обеих частей уравнения на отличный от нуля множитель;

г) перенос членов из одной части уравнения в другую.

В результате этих преобразований уравнение приводится к каноническому виду. Замену неизвестных, приводящую уравнение поверхности к каноническому виду, определяем как композицию всех замен, применяемых в ходе решения.

I.2 Эллипс

I.2.1 Фокальное свойство эллипса

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная ($2a$), большая расстояния ($2c$) между этими заданными точками (Рис. 1, а). Это геометрическое определение выражает **фокальное свойство эллипса**.

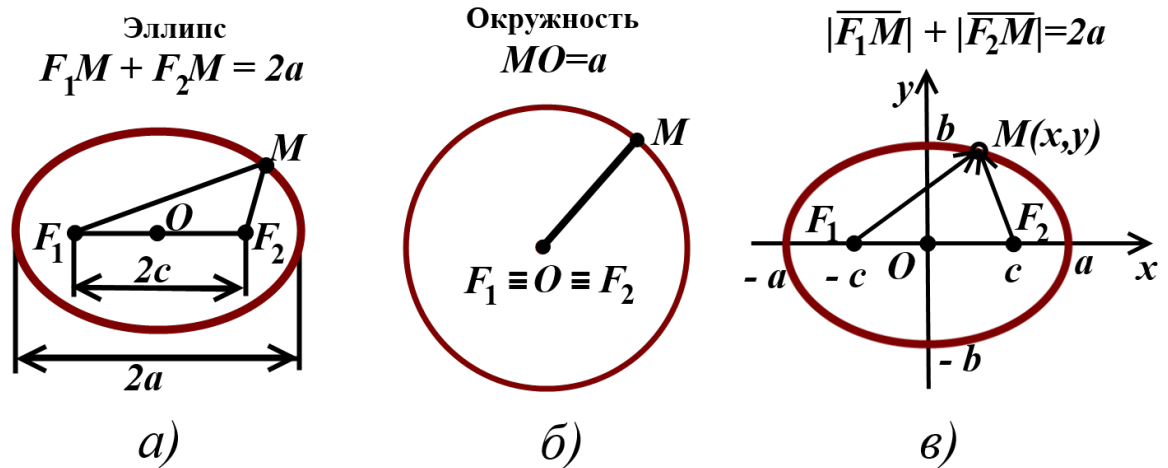


Рис. 1: Фокальное свойство эллипса

Точки F_1 и F_2 называются **фокусами** эллипса, расстояние между фокусами $2c = F_1F_2$ - **фокусным расстоянием**, середина O отрезка F_1F_2 - **центром** эллипса, число $(2a)$ - **длиной большой оси** эллипса (соответственно, число a - **большой полуосью** эллипса). Отрезки F_1M и F_2M , соединяющие произвольную точку M эллипса с его фокусами, называются **фокальными радиусами** точки M . Отрезок, соединяющий две точки эллипса, называется **хордой эллипса**.

Отношение $e = \frac{c}{a}$ называется **эксцентриситетом** эллипса. Из определения ($2a > 2c$) следует, что

$$0 \leq e < 1.$$

При $e = 0$, т.е. при $c = 0$, фокусы F_1 и F_2 , а также центр O совпадают, и эллипс является **окружностью радиуса a** (Рис. 1, б).

Геометрическое определение эллипса, выражающее его фокальное свойство, эквивалентно его аналитическому определению — линии, задаваемой каноническим уравнением эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (\text{I.16})$$

Действительно, введем прямоугольную систему координат (Рис. 1,а). Центр O эллипса примем за начало системы координат; прямую, проходящую через фокусы (**фокальную ось** или **первую ось** эллипса), примем за ось абсцисс (положительное направление на ней от точки F_1 к точке F_2); прямую, перпендикулярную фокальной оси и проходящую через центр эллипса (**вторую ось** эллипса), примем за ось ординат (направление на оси ординат выбирается так, чтобы прямоугольная система координат Oxy оказалась правой).

Составим уравнение эллипса, пользуясь его геометрическим определением, выражающим фокальное свойство. В выбранной системе координат определяем координаты фокусов $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Для произвольной точки $M(x, y)$, принадлежащей эллипсу, имеем:

$$|F_1M| + |F_2M| = 2a.$$

Записывая это равенство в координатной форме, получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Переносим второй радикал в правую часть, возводим обе части уравнения в квадрат и приводим подобные члены:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Leftrightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx.$$

Разделив на 4, возводим обе части уравнения в квадрат:

$$a^2(x-c)^2 + a^2 \cdot y^2 = a^4 - 2a^2 \cdot c \cdot x + c^2 \cdot x^2 \Leftrightarrow (a^2 - c^2) \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot (a^2 - c^2).$$

Обозначив $b = \sqrt{a^2 - c^2} > 0$, получаем $b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$. Разделив обе части на $a^2 \cdot b^2 \neq 0$, приходим к каноническому уравнению эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Следовательно, выбранная система координат является канонической.

Если фокусы эллипса совпадают, то эллипс представляет собой окружность (Рис. 1), поскольку $a = b$. В этом случае канонической будет любая прямоугольная система координат с началом в точке $O \equiv F_1 \equiv F_2$, а уравнение

$$x^2 + y^2 = a^2$$

является **уравнением окружности** с центром в точке O и радиусом, равным a .

Проводя рассуждения в обратном порядке, можно показать, что все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (I.16), и только они, принадлежат геометрическому месту точек, называемому эллипсом. Другими словами, аналитическое определение эллипса эквивалентно его геометрическому определению, выражающему фокальное свойство эллипса.

I.2.2 Директориальное свойство эллипса

Директрисами эллипса называются две прямые, проходящие параллельно оси ординат канонической системы координат на одинаковом расстоянии $\frac{a^2}{c}$ от неё. При $c = 0$, когда эллипс является окружностью, директрис нет (можно считать, что директрисы бесконечно удалены).

Эллипс с эксцентриситетом $0 < e < 1$ можно определить, как *геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояния до заданной точки F (фокуса) к расстоянию до заданной прямой d (директрисы), не проходящей через заданную точку, постоянно и равно эксцентриситету e (директориальное свойство эллипса)*. Здесь F и d — один из фокусов эллипса и одна из его директрис, расположенные по одну сторону от оси ординат канонической системы координат, т.е. F_1, d_1 или F_2, d_2 .

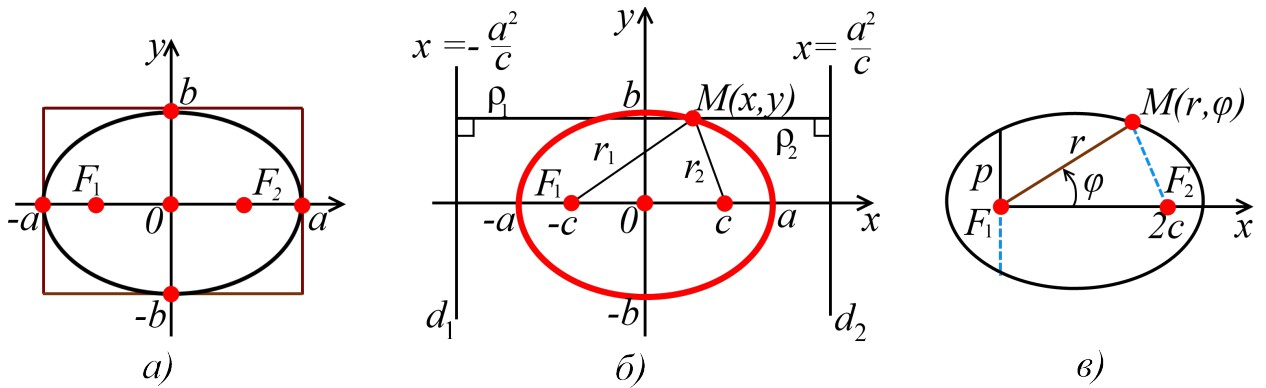


Рис. 2: Директориальное свойство эллипса

В самом деле, например, для фокуса F_2 и директрисы d_2 (Рис. 2) условие $\frac{r_2}{\rho_2} = e$ можно записать в координатной форме:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = e \cdot \left(\frac{a^2}{c} - x \right).$$

Избавляясь от иррациональности и заменяя $e = \frac{c}{a}$, $a^2 - c^2 = b^2$, приходим к каноническому уравнению эллипса (I.16) Аналогичные рассуждения можно провести для фокуса F_1 и директрисы d_1 : $\frac{r_1}{\rho_1} = e$.

I.2.3 Уравнение эллипса в полярной системе координат

Уравнение эллипса в полярной системе координат $F_1 r \varphi$ имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \varphi}, \quad (\text{I.17})$$

где $p = \frac{b^2}{a}$ — **фокальный параметр эллипса**.

В самом деле, выберем в качестве полюса полярной системы координат левый фокус F_1 эллипса, а в качестве полярной оси — луч $F_1 F_2$ (Рис. 2, в). Тогда для произвольной

I.2. Эллипс

точки $M(r, \varphi)$, согласно геометрическому определению (фокальному свойству) эллипса, имеем $r + MF_2 = 2a$. Выражаем расстояние между точками $M(r, \varphi)$ и $F_2(2c, 0)$

$$F_2M = \sqrt{(2c)^2 + r^2 - 2 \cdot (2c) \cdot r \cdot \cos(\varphi - 0)} = \sqrt{r^2 - 4 \cdot c \cdot r \cdot \cos \varphi + 4 \cdot c^2}.$$

Следовательно, в координатной форме уравнение эллипса $F_1M + F_2M = 2a$ имеет вид

$$r + \sqrt{r^2 - 4 \cdot c \cdot r \cdot \cos \varphi + 4 \cdot c^2} = 2 \cdot a.$$

Уединяем радикал, возводим обе части уравнения в квадрат, делим на 4 и приводим подобные члены:

$$r^2 - 4 \cdot c \cdot r \cdot \cos \varphi + 4 \cdot c^2 = 4 \cdot a^2 - 4 \cdot a \cdot r + r^2 \Leftrightarrow a \cdot \left(1 - \frac{c}{a} \cdot \cos \varphi\right) \cdot r = a^2 - c^2.$$

Выражаем полярный радиус r и делаем замену $e = \frac{c}{a}$, $b^2 = a^2 - c^2$, $p = \frac{b^2}{a}$:

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a \cdot (1 - e \cdot \cos \varphi)} \Leftrightarrow r = \frac{b^2}{a \cdot (1 - e \cdot \cos \varphi)} \Leftrightarrow r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \varphi},$$

что и требовалось доказать.

I.2.4 Геометрический смысл коэффициентов в уравнении эллипса

Найдем точки пересечения эллипса (Рис. 2,а) с координатными осями (*вершины эллипса*). Подставляя в уравнение $y = 0$, находим точки пересечения эллипса с осью абсцисс (с фокальной осью): $x = \pm a$. Следовательно, длина отрезка фокальной оси, заключенного внутри эллипса, равна $2a$. Этот отрезок, как отмечено выше, называется *большой осью эллипса*, а число a — *большой полуосью эллипса*. Подставляя $x = 0$, получаем $y = \pm b$. Следовательно, длина отрезка второй оси эллипса, заключенного внутри эллипса, равна $2b$. Этот отрезок называется *малой осью эллипса*, а число b — *малой полуосью эллипса*.

Действительно, $b = \sqrt{a^2 - c^2} \leq \sqrt{a^2} = a$, причём равенство $b = a$ получается только в случае $c = 0$, когда эллипс является окружностью. Отношение $k = \frac{b}{a} \leq 1$ называется *коэффициентом сжатия эллипса*.

Замечание 1.

1. Прямые $x = \pm a$, $y = \pm b$ ограничивают на координатной плоскости *основной прямоугольник*, внутри которого находится эллипс (Рис. 2,а).

2. Эллипс можно определить, как геометрическое место точек, получаемое в результате сжатия окружности к её диаметру.

Действительно, пусть в прямоугольной системе координат Oxy уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = a^2$. При сжатии к оси абсцисс с коэффициентом $0 < k \leq 1$ координаты произвольной точки $M(x, y)$, принадлежащей окружности, изменяются по закону

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = k \cdot y. \end{cases}$$

Подставляя в уравнение окружности $x = x'$ и $y = \frac{1}{k} \cdot y'$, получаем уравнение для координат образа $M'(x', y')$ точки $M(x, y)$:

$$(x')^2 + \left(\frac{1}{k} \cdot y'\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{k^2 \cdot a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1,$$

поскольку $b = k \cdot a$. Это каноническое уравнение эллипса.

3. Координатные оси (канонической системы координат) являются **осями симметрии** эллипса (называются **главными осями эллипса**), а его центр — **центром симметрии**.

Действительно, если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то и точки $M'(x, -y)$ и $M''(-x, y)$, симметричные точке M относительно координатных осей, также принадлежат тому же эллипсу.

4. Из уравнения эллипса в полярной системе координат $r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}$ (Рис. 2,в), выясняется **геометрический смысл фокального параметра** — это половина длины хорды эллипса, проходящей через его фокус перпендикулярно фокальной оси ($r = p$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$).

$$0 = e_0 < e_1 < e_2 < 1$$

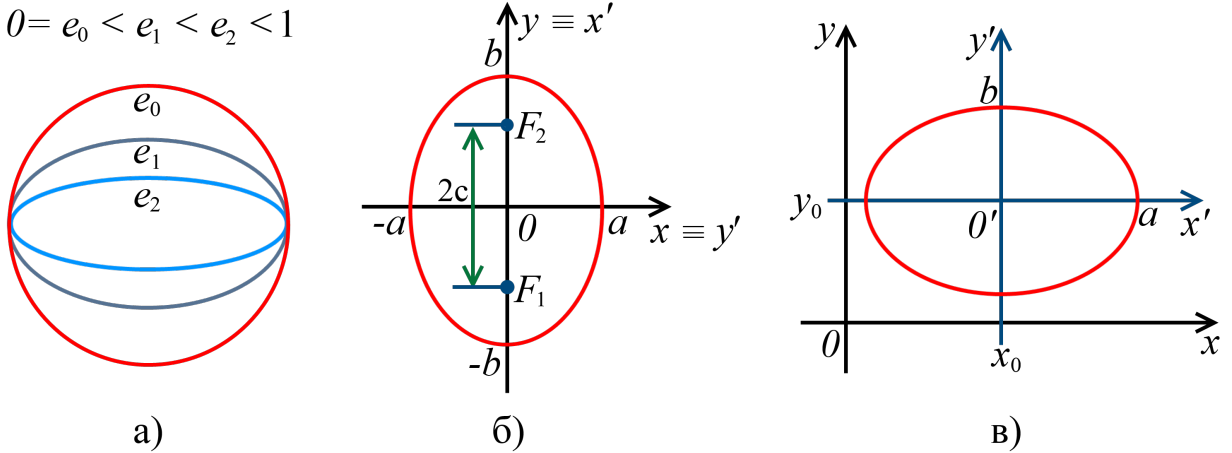


Рис. 3

5. Эксцентриситет e характеризует форму эллипса, а именно отличие эллипса от окружности. Чем больше e , тем эллипс более вытянут, а чем ближе e к нулю, тем ближе эллипс к окружности (Рис. 3,а).

Действительно, учитывая, что $e = \frac{c}{a}$ и $c^2 = a^2 - b^2$, получаем

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - k^2,$$

где k — коэффициент сжатия эллипса, $0 < k \leq 1$. Следовательно, $e = \sqrt{1 - k^2}$. Чем больше сжат эллипс по сравнению с окружностью, тем меньше коэффициент сжатия k и больше эксцентриситет. Для окружности $k = 1$ и $e = 0$.

6. Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ при $a < b$ определяет эллипс, фокусы которого расположены на оси Oy (Рис. 3,б). Это уравнение сводится к каноническому при помощи переименования координатных осей.

I.3. Гипербола

7. Уравнение $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$, $a \geq b$, определяет эллипс с центром в точке $O'(x_0, y_0)$, оси которого параллельны координатным осям (Рис. 3,в). Это уравнение сводится к каноническому при помощи параллельного переноса.

При $a = b = R$ уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ описывает окружность радиуса R с центром в точке $O'(x_0, y_0)$.

8. **Параметрическое уравнение эллипса** в канонической системе координат имеет вид

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t, \\ y = b \cdot \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Действительно, подставляя эти выражения в уравнение (I.16), приходим к основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

I.3 Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная ($2a$), меньшая расстояния ($2c$) между этими заданными точками (Рис. 4,а). Это геометрическое определение выражает **фокальное свойство гиперболы**.

I.3.1 Фокальное свойство гиперболы

Точки F_1 и F_2 называются **фокусами** гиперболы, расстояние $2c = F_1F_2$ между ними — **фокусным расстоянием**, середина O отрезка F_1F_2 — **центром** гиперболы, число $2a$ — **длиной действительной оси** гиперболы (соответственно, a — **действительной полуосью** гиперболы). Отрезки F_1M и F_2M , соединяющие произвольную точку M гиперболы с её фокусами, называются **фокальными радиусами** точки M . Отрезок, соединяющий две точки гиперболы, называется **хордой гиперболы**.

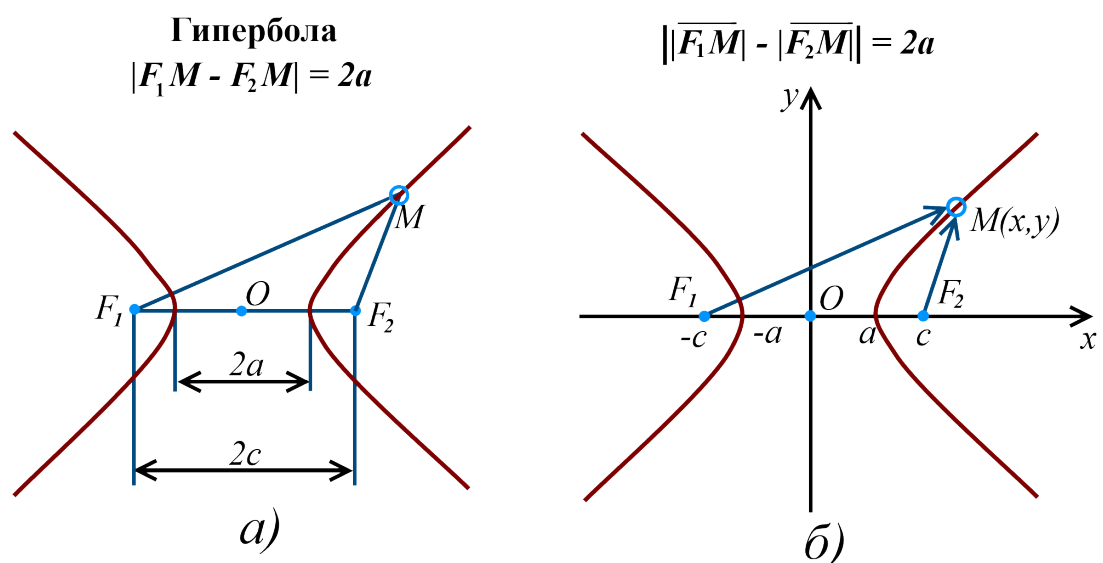


Рис. 4: Фокальное свойство гиперболы

Отношение $e = \frac{c}{a}$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, называется **эксцентриситетом** гиперболы. Из определения ($2a < 2c$) следует, что $e > 1$.

Геометрическое определение гиперболы, выражающее её фокальное свойство, эквивалентно её аналитическому определению — линии, задаваемой каноническим уравнением гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (\text{I.18})$$

Действительно, введем прямоугольную систему координат (Рис. 4,б). Центр O гиперболы примем за начало системы координат; прямую, проходящую через фокусы (**фокальную ось**), примем за ось абсцисс (положительное направление на ней от точки F_1 к точке F_2); прямую, перпендикулярную оси абсцисс и проходящую через центр гиперболы, примем за ось ординат (направление на оси ординат выбирается так, чтобы прямоугольная система координат Oxy оказалась правой).

Составим уравнение гиперболы, используя геометрическое определение, выражающее фокальное свойство. В выбранной системе координат определяем координаты фокусов $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Для произвольной точки $M(x, y)$, принадлежащей гиперболе, имеем:

$$\left| |F_1M| - |F_2M| \right| = 2a.$$

Записывая это уравнение в координатной форме, получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям, используемым при выводе уравнения эллипса (т.е. избавляясь от иррациональности), приходим к каноническому уравнению гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, т.е. выбранная система координат является канонической.

Проводя рассуждения в обратном порядке, можно показать, что все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (I.18), и только они, принадлежат геометрическому месту точек, называемому гиперболой. Таким образом, аналитическое определение гиперболы эквивалентно его геометрическому определению.

I.3.2 Директориальное свойство гиперболы

Директрисами гиперболы называются две прямые, проходящие параллельно оси ординат канонической системы координат на одинаковом расстоянии $\frac{a^2}{c}$ от неё (Рис. 5,а). При $a = 0$, когда гипербола вырождается в пару пересекающихся прямых, директрисы совпадают.

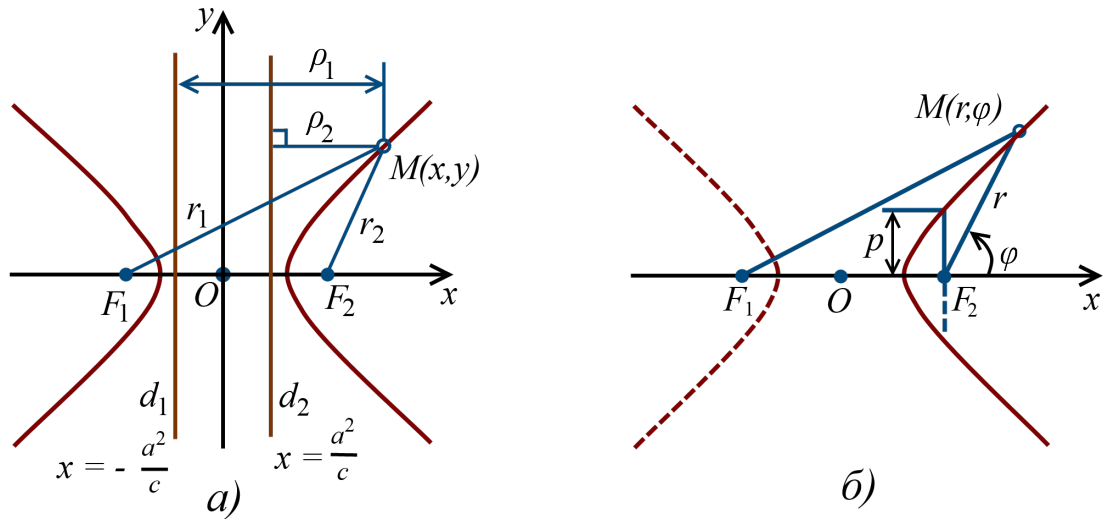


Рис. 5: Директориальное свойство гиперболы

Гиперболу с эксцентриситетом $e > 1$ можно определить, как геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояния до заданной точки F (фокуса) к расстоянию до заданной прямой d (директрисы), не проходящей через заданную точку, постоянно и равно эксцентриситету e (**директориальное свойство гиперболы**). Здесь F и d — один из фокусов гиперболы и одна из её директрис, расположенные по одну сторону от оси ординат канонической системы координат.

В самом деле, например, для фокуса F_2 и директрисы d_2 (Рис. 5,а) условие $\frac{r_2}{\rho_2} = e$ можно записать в координатной форме:

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = e \left(x - \frac{a^2}{c} \right).$$

Избавляясь от иррациональности и заменяя $e = \frac{c}{a}$, $c^2 - a^2 = b^2$, приходим к каноническому уравнению гиперболы (I.18). Аналогичные рассуждения можно провести для фокуса F_1 и директрисы d_1 :

$$\frac{r_1}{\rho_1} = e \Leftrightarrow \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = e \left(x + \frac{a^2}{c} \right).$$

1.3.3 Уравнение гиперболы в полярной системе координат

Уравнение правой ветви гиперболы в полярной системе координат $F_2 r \varphi$ (Рис. 5,б) имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \varphi},$$

где $p = \frac{p^2}{a}$ — **фокальный параметр гиперболы**.

В самом деле, выберем в качестве полюса полярной системы координат правый фокус F_2 гиперболы, а в качестве полярной оси — луч с началом в точке F_2 , принадлежащий прямой $F_1 F_2$, но не содержащий точки F_1 (Рис. 5,б). Тогда для произвольной точки

$M(r, \varphi)$, принадлежащей правой ветви гиперболы, согласно геометрическому определению (фокальному свойству) гиперболы, имеем $F_1M - r = 2a$. Выражаем расстояние между точками $M(r, \varphi)$ и $F_1(2c, \pi)$

$$F_1M = \sqrt{(2c)^2 + r^2 - 2 \cdot (2c) \cdot r \cdot \cos(\varphi - \pi)} = \sqrt{r^2 + 4 \cdot c \cdot r \cdot \cos \varphi + 4 \cdot c^2}.$$

Следовательно, в координатной форме уравнение гиперболы имеет вид

$$\sqrt{r^2 + 4 \cdot c \cdot r \cdot \cos \varphi + 4 \cdot c^2} - r = 2a.$$

Уединяем радикал, возводим обе части уравнения в квадрат, делим на 4 и приводим подобные члены:

$$r^2 + 4 \cdot c \cdot r \cdot \cos \varphi + 4 \cdot c^2 = 4 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot r + r^2 \Leftrightarrow a \left(1 - \frac{c}{a} \cos \varphi\right) r = c^2 - a^2.$$

Выражаем полярный радиус r и делаем замены $e = \frac{c}{a}$, $b^2 = c^2 - a^2$, $p = \frac{b^2}{a}$:

$$r = \frac{c^2 - a^2}{a(1 - e \cos \varphi)} \Leftrightarrow r = \frac{b^2}{a(1 - e \cos \varphi)} \Leftrightarrow r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi},$$

что и требовалось доказать. Заметим, что в полярных координатах уравнения гиперболы и эллипса совпадают, но описывают разные линии, поскольку отличаются эксцентриситетами ($e > 1$ для гиперболы, $0 \leq e < 1$ для эллипса).

1.3.4 Геометрический смысл коэффициентов в уравнении гиперболы

Найдем точки пересечения гиперболы (Рис. 6,а) с осью абсцисс (**вершины гиперболы**). Подставляя в уравнение $y = 0$, находим абсциссы точек пересечения: $x = \pm a$. Следовательно, вершины имеют координаты $(-a, 0)$, $(a, 0)$. Длина отрезка, соединяющего вершины, равна $2a$. Этот отрезок называется **действительной осью гиперболы**, а число a — **действительной полуосью гиперболы**. Подставляя $x = 0$, получаем $y = \pm ib$. Длина отрезка оси ординат, соединяющего точки $(0, -b)$, $(0, b)$, равна $2b$. Этот отрезок называется **мнимой осью гиперболы**, а число b — **мнимой полуосью гиперболы**. Гипербола пересекает прямую, содержащую действительную ось, и не пересекает прямую, содержащую мнимую ось.

Замечание 2.

1. Прямые $x = \pm a$, $y = \pm b$ ограничивают на координатной плоскости **основной прямоугольник**, вне которого находится гипербола (Рис. 6,а).

2. Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$, содержащие диагонали основного прямоугольника, называются **асимптотами гиперболы** (Рис. 6,а).

Для равносторонней гиперболы, описываемой уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ (т.е. при $a = b$), основной прямоугольник является квадратом, диагонали которого перпендикулярны. Поэтому асимптоты равносторонней гиперболы также перпендикулярны, и их можно взять в качестве координатных осей прямоугольной системы координат $Ox'y'$ (Рис.

6,б). В этой системе координат уравнение гиперболы имеет вид $y' = \frac{a^2}{2x'}$ (гипербола совпадает с графиком элементарной функции, выражающей обратно-пропорциональную зависимость).

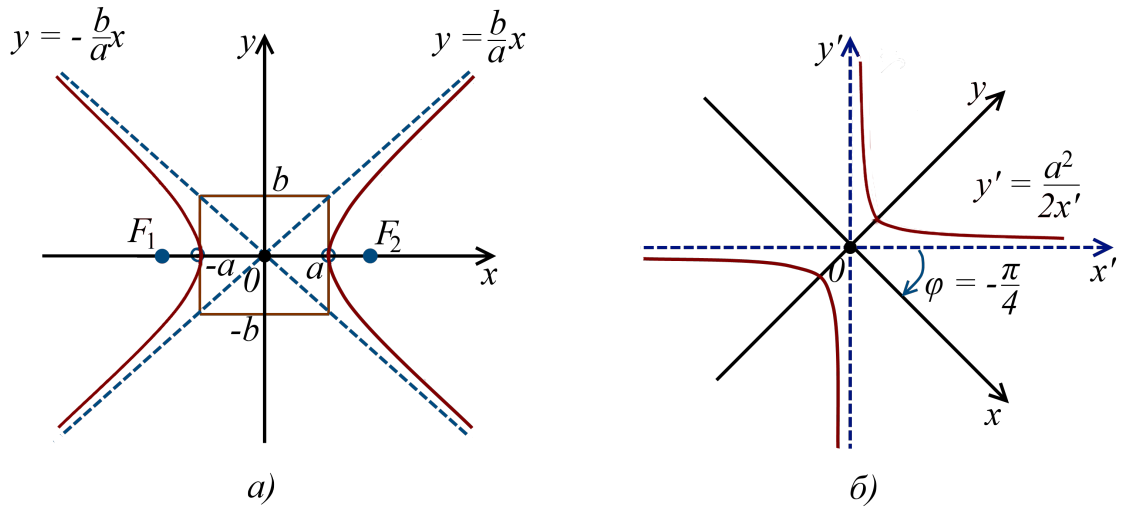


Рис. 6

В самом деле, повернём каноническую систему координат на угол $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ (Рис. 6,б). При этом координаты точки в старой и новой системах координат связаны равенствами

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y', \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y', \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (x' + y'), \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (y' - x'). \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

Подставляя эти выражения в уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ равносторонней гиперболы и приводя подобные члены, получаем

$$\frac{\frac{1}{2}(x' + y')^2}{a^2} - \frac{\frac{1}{2}(y' - x')^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot x' \cdot y' = a^2 \Leftrightarrow y' = \frac{a^2}{2 \cdot x'}.$$

3. Координатные оси (канонической системы координат) являются **осями симметрии** гиперболы (называются **главными осями гиперболы**), а её центр — **центром симметрии**.

Действительно, если точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то и точки $M'(x, -y)$ и $M''(-x, y)$, симметричные точке M относительно координатных осей, также принадлежат той же гиперболе.

Ось симметрии, на которой располагаются фокусы гиперболы, является фокальной осью.

4. Из уравнения гиперболы в полярных координатах $r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \varphi}$ (Рис. 5,б) выясняется **геометрический смысл фокального параметра** — это половина длины хорды гиперболы, проходящей через её фокус перпендикулярно фокальной оси ($r = p$ при $\varphi = \frac{\pi}{2}$).

5. Эксцентриситет e характеризует форму гиперболы. Чем больше e , тем шире ветви гиперболы, а чем ближе e к единице, тем ветви гиперболы уже (Рис. 7,а).

Действительно, величина γ угла между асимптотами гиперболы, содержащего её ветвь, определяется отношением сторон основного прямоугольника: $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{b}{a}$. Учитывая, что $e = \frac{c}{a}$ и $c^2 = a^2 + b^2$, получаем

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Чем больше e , тем больше угол γ . Для равносторонней гиперболы ($a = b$) имеем $e = \sqrt{2}$ и $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Для $e > \sqrt{2}$ угол γ тупой, а для $1 < e < \sqrt{2}$ угол γ острый (Рис. 7,а).

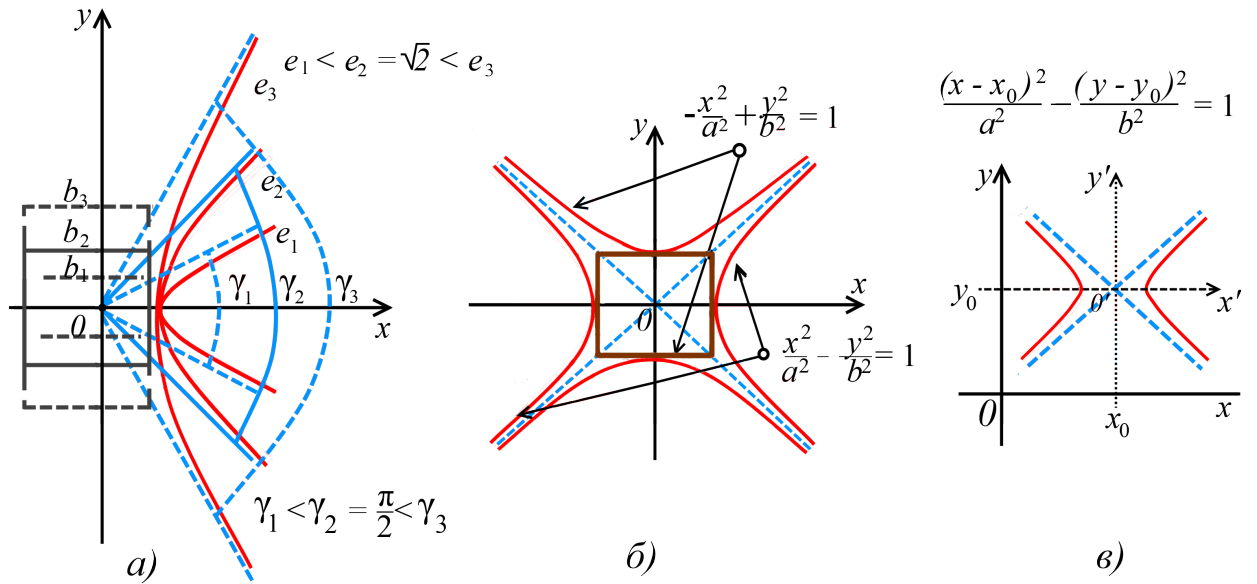


Рис. 7

6. Две гиперболы, определяемые в одной и той же системе координат уравнениями $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ называются сопряжёнными друг с другом. Сопряжённые гиперболы имеют одни и те же асимптоты (Рис. 7,б). Уравнение **сопряжённой гиперболы** $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ приводится к каноническому при помощи переименования координатных осей.

7. Уравнение $\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ определяет гиперболу с центром в точке $O'(x_0, y_0)$, оси которой параллельны координатным осям (Рис. 7,в). Это уравнение сводится к каноническому при помощи параллельного переноса. Уравнение $-\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ определяет сопряжённую гиперболу с центром в точке $O'(x_0, y_0)$.

8. **Параметрическое уравнение гиперболы** в канонической системе координат имеет вид

$$\begin{cases} x = a \cdot \operatorname{ch} t, \\ y = b \cdot \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{I.20})$$

I.4. Парабола

где $\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ — гиперболический косинус, а $\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ гиперболический синус.

Действительно, подставляя выражения координат в уравнение (I.18), приходим к основному гиперболическому тождеству $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$.

I.4 Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от заданной точки F и заданной прямой d , не проходящей через заданную точку. Это геометрическое определение выражает директориальное свойство параболы.

I.4.1 Директориальное свойство параболы

Точка F называется **фокусом параболы**, прямая d — **директрисой параболы**, середина O перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису, — **вершиной параболы**, расстояние p от фокуса до директрисы — **параметром параболы**, а расстояние $\frac{p}{2}$ от вершины параболы до её фокуса — **фокусным расстоянием** (Рис. 8,а). Прямая, перпендикулярная директрисе и проходящая через фокус, называется **осью параболы** (**фокальной осью параболы**). Отрезок FM , соединяющий произвольную точку M параболы с её фокусом, называется **фокальным радиусом** точки M . Отрезок, соединяющий две точки параболы, называется **хордой параболы**.

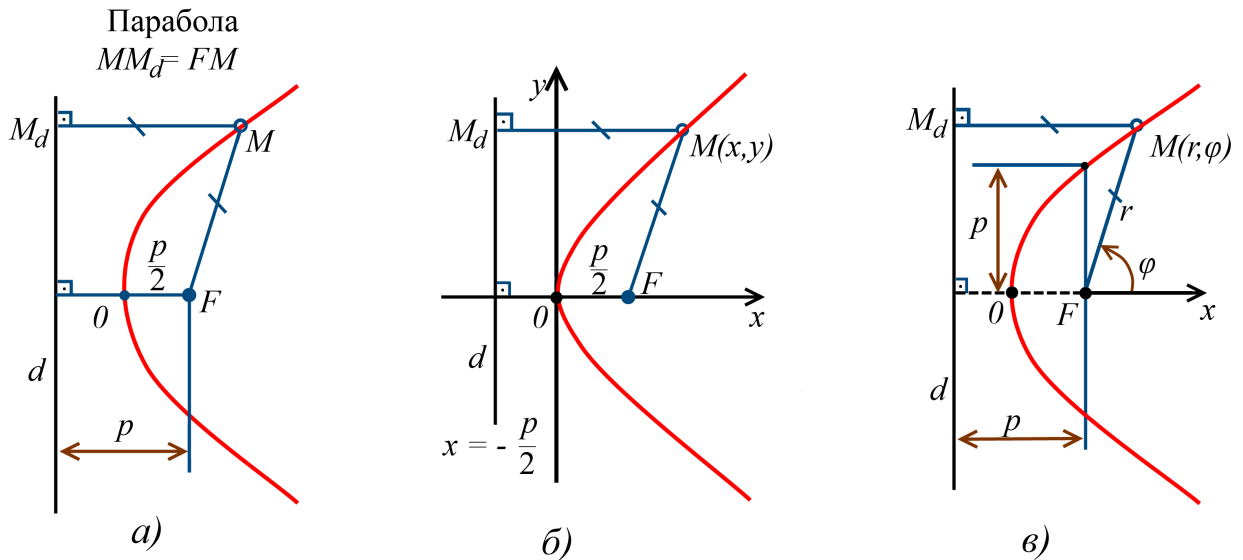


Рис. 8

Для произвольной точки параболы отношение расстояния до фокуса к расстоянию до директрисы равно единице. Сравнивая директориальные свойства эллипса, гиперболы и параболы, заключаем, что **эксцентриситет параболы** по определению равен единице ($e = 1$).

Геометрическое определение параболы, выражающее её директориальное свойство, эквивалентно её аналитическому определению — линии, задаваемой каноническим уравнением параболы:

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x. \quad (\text{I.21})$$

Действительно, введем прямоугольную систему координат (Рис. 8,б). Вершину O параболы примем за начало системы координат; прямую, проходящую через фокус перпендикулярно директрисе, примем за ось абсцисс (положительное направление на ней от точки O к точке F); прямую, перпендикулярную оси абсцисс и проходящую через вершину параболы, примем за ось ординат (направление на оси ординат выбирается так, чтобы прямоугольная система координат Oxy оказалась правой).

Составим уравнение параболы, используя её геометрическое определение, выражающее директориальное свойство параболы. В выбранной системе координат определяем координаты фокуса $F(\frac{p}{2}; 0)$ и уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$. Для произвольной точки $M(x, y)$, принадлежащей параболе, имеем:

$$FM = MM_d,$$

где $M_d(-\frac{p}{2}, y)$ — ортогональная проекция точки $M(x, y)$ на директрису. Записываем это уравнение в координатной форме:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Возводим обе части уравнения в квадрат: $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + p \cdot x + \frac{p^2}{4}$. Приводя подобные члены, получаем каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x,$$

т.е. выбранная система координат является канонической.

Проводя рассуждения в обратном порядке, можно показать, что все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению (I.21), и только они, принадлежат геометрическому месту точек, называемому параболой. Таким образом, аналитическое определение параболы эквивалентно его геометрическому определению, выражающему директориальное свойство параболы.

I.4.2 Уравнение параболы в полярной системе координат

Уравнение параболы в полярной системе координат $F r \varphi$ (Рис. 8,в) имеет вид

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos \varphi},$$

где p — параметр параболы, а $e = 1$ — её эксцентриситет.

В самом деле, в качестве полюса полярной системы координат выберем фокус F параболы, а в качестве полярной оси — луч с началом в точке F , перпендикулярный директрисе и не пересекающий её (Рис. 8,в). Тогда для произвольной точки $M(r, \varphi)$, принадлежащей параболе, согласно геометрическому определению (директориальному свойству) параболы, имеем $MM_d = r$. Поскольку $MM_d = p + r \cdot \cos \varphi$, получаем уравнение параболы в координатной форме:

$$p + r \cdot \cos \varphi \Leftrightarrow r = \frac{p}{1 - \cos \varphi},$$

что и требовалось доказать. Заметим, что в полярных координатах уравнения эллипса, гиперболы и параболы совпадают, но описывают разные линии, поскольку отличаются эксцентриситетами ($0 \leq e < 1$ для эллипса, $e = 1$ для параболы, $e > 1$ для гиперболы).

1.4.3 Геометрический смысл параметра в уравнении параболы

Поясним *геометрический смысл параметра p* в каноническом уравнении параболы. Подставляя в уравнение (1.21) $x = \frac{p}{2}$, получаем $y^2 = p^2$, т.е. $y = \pm p$. Следовательно, параметр p — это половина длины хорды параболы, проходящей через её фокус перпендикулярно оси параболы.

Фокальным параметром параболы, так же как для эллипса и для гиперболы, называется половина длины хорды, проходящей через её фокус перпендикулярно фокальной оси (Рис. 8,в). Из уравнения параболы в полярных координатах при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получаем $r = p$, т.е. параметр параболы совпадает с её фокальным параметром.

Замечание 3.

1. Параметр p параболы характеризует её форму. Чем больше p , тем шире ветви параболы, чем ближе p к нулю, тем ветви параболы уже (Рис. 9).

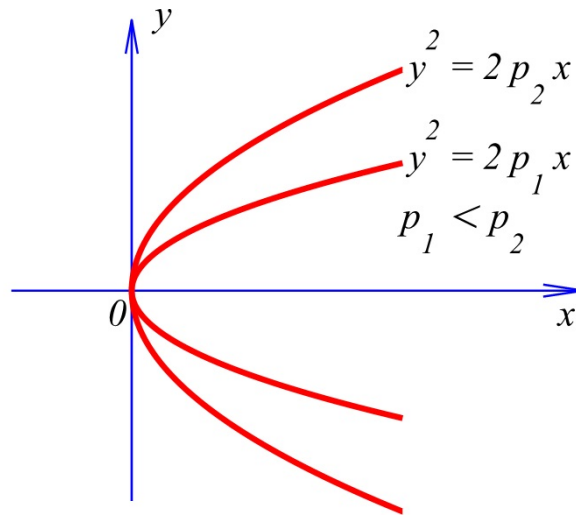


Рис. 9

2. Уравнение $y^2 = -2 \cdot p \cdot x$ (при $p > 0$) определяет параболу, которая расположена слева от оси ординат (Рис. 10,а). Это уравнение сводится к каноническому при помощи изменения направления оси абсцисс. На рис. (Рис. 10,а) изображены заданная система координат Oxy и каноническая $Ox'y'$.

3. Уравнение $(y - y_0)^2 = 2 \cdot p \cdot (x - x_0)$, $p > 0$, определяет параболу с вершиной $O'(x_0, y_0)$, ось которой параллельна оси абсцисс (Рис. 10,б). Это уравнение сводится к каноническому при помощи параллельного переноса.

Уравнение $(x - x_0)^2 = 2 \cdot p \cdot (y - y_0)$, $p > 0$, также определяет параболу с вершиной $O'(x_0, y_0)$, ось которой параллельна оси ординат (Рис. 10,в). Это уравнение сводится к каноническому при помощи параллельного переноса и переименования координатных осей. На рис. (Рис. 10,б,в) изображены заданные системы координат Oxy и канонические системы координат $O'x'y'$.

4. График квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, является параболой с вершиной в точке $O'\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$, ось которой параллельна оси ординат, ветви параболы направлены вверх (при $a > 0$) или вниз (при $a < 0$.) Действи-

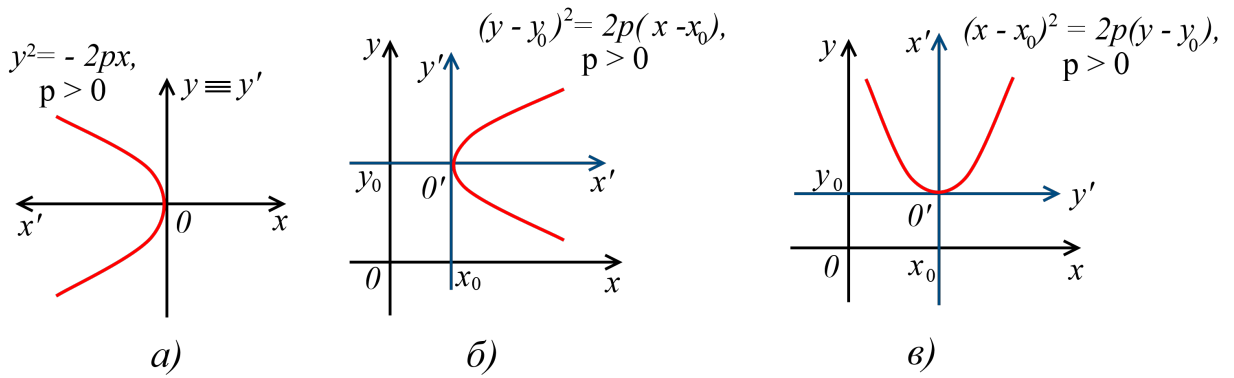


Рис. 10

тельно, выделяя полный квадрат, получаем уравнение

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{1}{a} \left(y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right),$$

которое приводится к каноническому виду $(y')^2 = 2 \cdot p \cdot x'$, где $p = \left| \frac{1}{2a} \right|$, при помощи замены $y' = y + \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ и $x' = \pm \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$. Знак выбирается совпадающим со знаком старшего коэффициента a . Эта замена соответствует композиции: параллельного переноса с $x_0 = -\frac{b}{2a}$ и $y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, переименования координатных осей, а в случае $a < 0$ ещё и изменения направления координатной оси. (Рис. 11, а,в) изображены заданные системы координат Oxy и канонические системы координат $O'x'y'$ для случаев $a > 0$ и $a < 0$ соответственно.

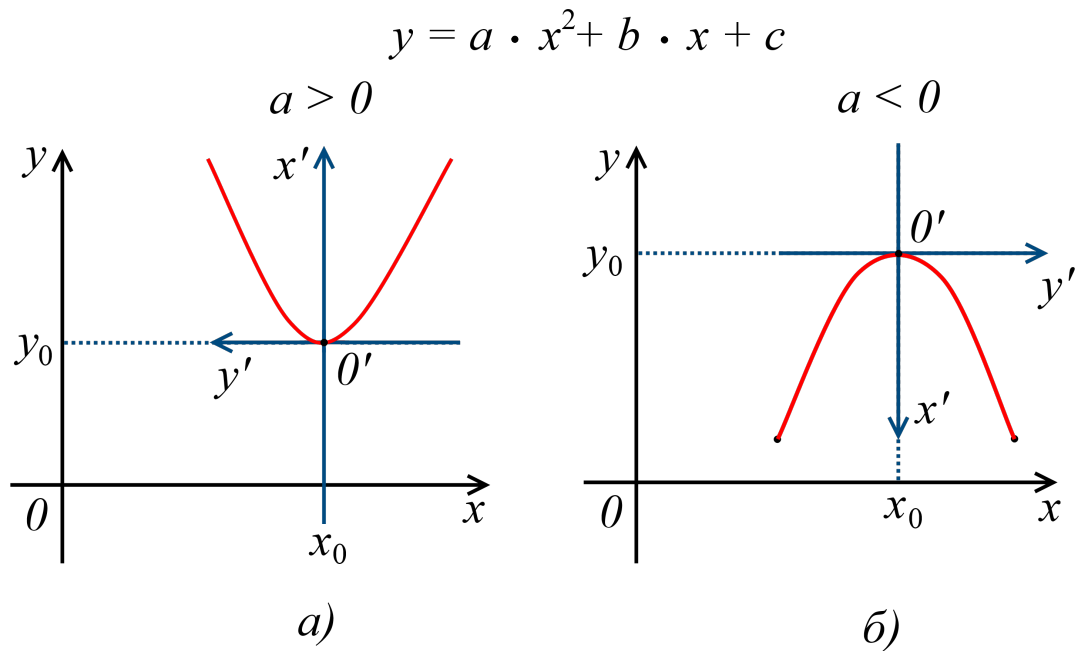


Рис. 11

5. Ось абсцисс канонической системы координат является **осью симметрии параболы**, поскольку замена переменной y на $-y$ не изменяет уравнения (I.21). Другими словами, координаты точки $M(x, y)$, принадлежащей параболе, и координаты точки $M'(x, -y)$, симметричной точке M относительно оси абсцисс, удовлетворяют уравнению (I.21). Оси канонической системы координат называются **главными осями параболы**.

I.5 Некоторые общие свойства эллипса, гиперболы, параболы

1. Директориальное свойство может быть использовано как единое определение эллипса, гиперболы, параболы (Рис. 12): *геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояния до заданной точки F (фокуса) к расстоянию до заданной прямой d (директрисы), не проходящей через заданную точку, постоянно и равно эксцентриситету e , называется:*

- a) **эллипсом**, если $0 \leq e < 1$;
- b) **гиперболой**, если $e > 1$;
- c) **параболой**, если $e = 1$.

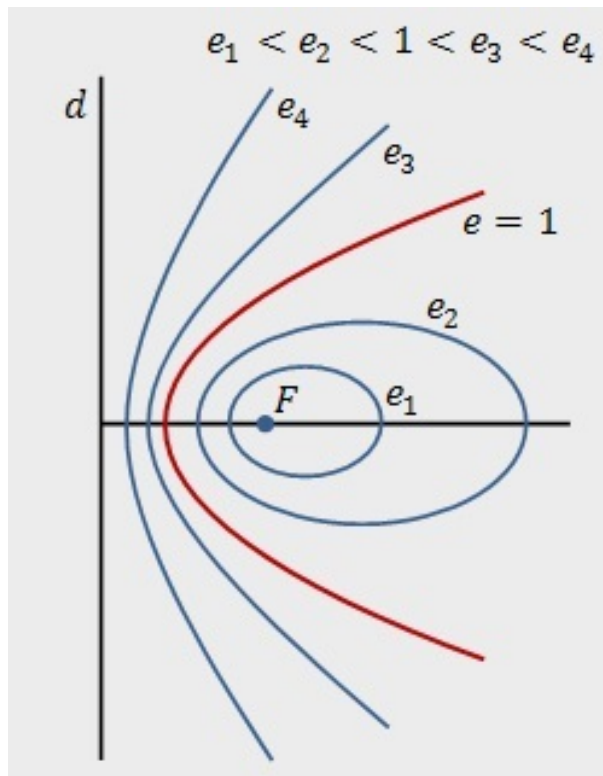


Рис. 12

2. Эллипс, гипербола, парабола получаются в сечениях кругового конуса плоскостями и поэтому называются **коническими сечениями**. Это свойство также может служить геометрическим определением эллипса, гиперболы, параболы.

3. К числу общих свойств эллипса, гиперболы и параболы можно отнести **биссекториальное свойство** их касательных. Под **касательной** к линии в некоторой её точке K понимается предельное положение секущей KM , когда точка M , оставаясь на рассматриваемой линии, стремится к точке K . Прямая, перпендикулярная касательной к линии и проходящая через точку касания, называется **нормалью** к этой линии.

Биссекториальное свойство касательных (и нормалей) к эллипсу, гиперболе и параболе формулируется следующим образом: *касательная (нормаль) к эллипсу или к гиперболе образует равные углы с фокальными радиусами точки касания (Рис. 13, а,б); касательная (нормаль) к параболе образует равные углы с фокальным радиусом точки касания и перпендикуляром, опущенным из неё на директрису (Рис. 13, в).* Другими словами, касательная к эллипсу в точке K является биссектрисой внешнего угла треугольника F_1KF_2 (а нормаль — биссектрисой внутреннего угла F_1KF_2 треугольника); касательная к гиперболе является биссектрисой внутреннего угла треугольника F_1KF_2 (а нормаль — биссектрисой внешнего угла); касательная к параболе является биссектрисой внутреннего угла треугольника FKK_d (а нормаль — биссектрисой внешнего угла). Биссекториальное свойство касательной к параболе можно сформулировать так же, как для эллипса и гиперболы, если считать, что у параболы имеется второй фокус в бесконечно удалённой точке.

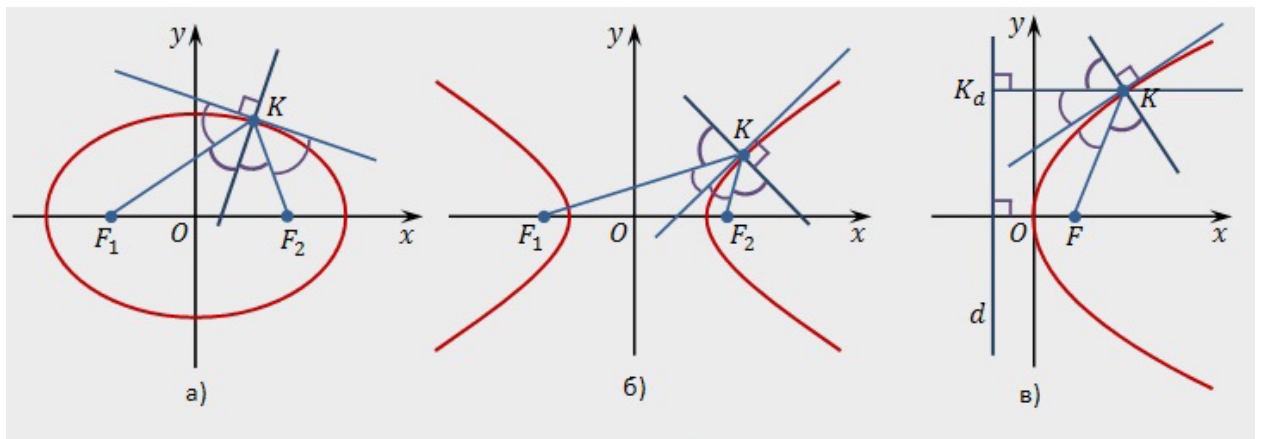


Рис. 13

4. Из биссекториальных свойств следуют **оптические свойства** эллипса, гиперболы и параболы, поясняющие физический смысл термина "фокус". Представим себе поверхности, образованные вращением эллипса, гиперболы или параболы вокруг фокальной оси. Если на эти поверхности нанести отражающее покрытие, то получаются эллиптическое, гиперболическое и параболическое зеркала. Согласно закону оптики, угол падения луча света на зеркало равен углу отражения, т.е. падающий и отраженный лучи образуют равные углы с нормалью к поверхности, причём оба луча и ось вращения находятся в одной плоскости. Отсюда получаем следующие свойства:

- если источник света находится в одном из фокусов эллиптического зеркала, то лучи света, отразившись от зеркала, собираются в другом фокусе (Рис. 14, а);
- если источник света находится в одном из фокусов гиперболического зеркала, то лучи света, отразившись от зеркала, расходятся так, как если бы они исходили из другого фокуса (Рис. 14, б);
- если источник света находится в фокусе параболического зеркала, то лучи света, отразившись от зеркала, идут параллельно фокальной оси (Рис. 14, в).

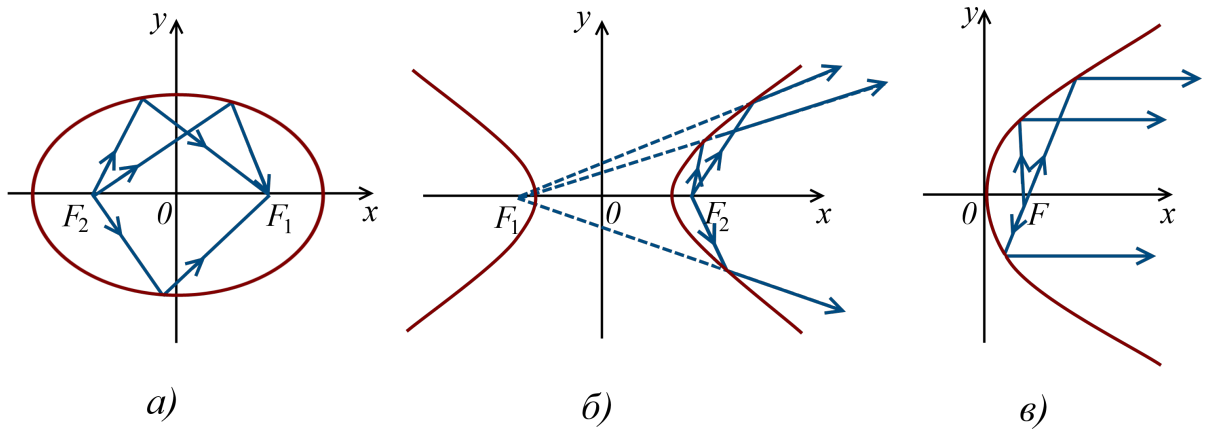


Рис. 14

5. Диаметральное свойство эллипса, гиперболы и параболы можно сформулировать следующим образом:

- *середины параллельных хорд эллипса (гиперболы) лежат на одной прямой, проходящей через центр эллипса (гиперболы);*
- *середины параллельных хорд параболы лежат на прямой, коллинеарной оси симметрии параболы.*

Геометрическое место середин всех параллельных хорд эллипса (гиперболы, параболы) называют **диаметром эллипса (гиперболы, параболы)**, сопряжённым к этим хордам.

Это определение диаметра в узком смысле. Ранее было дано определение диаметра в широком смысле, где диаметром эллипса, гиперболы, параболы, а также других линий второго порядка называется прямая, содержащая середины всех параллельных хорд. В узком смысле диаметром эллипса является любая хорда, проходящая через его центр (Рис. 15, а); диаметром гиперболы является любая прямая, проходящая через центр гиперболы (за исключением асимптот), либо часть такой прямой (Рис. 15, б); диаметром параболы является любой луч, исходящий из некоторой точки параболы и коллинеарный оси симметрии (Рис. 15, в).

Два диаметра, каждый из которых делит пополам все хорды, параллельные другому диаметру, называются **сопряжёнными**. На (Рис. 14) полужирными линиями изображены сопряжённые диаметры эллипса, гиперболы, параболы.

Касательную к эллипсу (гиперболе, параболе) в точке K можно определить как предельное положение параллельных секущих M_1M_2 , когда точки M_1 и M_2 , оставаясь на рассматриваемой линии, стремятся к точке K . Из этого определения следует, что касательная, параллельная хордам, проходит через конец диаметра, сопряжённого к этим хордам.

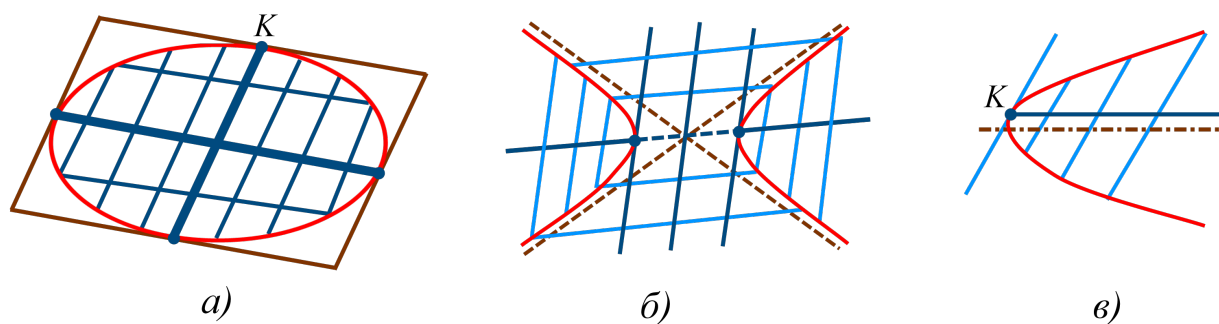


Рис. 15

6. Эллипс, гипербола и парабола имеют, кроме приведённых выше, многочисленные геометрические свойства и физические приложения. Например, (Рис. 12) может служить иллюстрацией траекторий движения космических объектов, находящихся в окрестности центра F притяжения.

Глава II

Математические основы движения в поле тяжести

II.1 Движение материальной точки под действием силы тяготения (задача двух тел)

Кеплер проявил необычайную изобретательность и затратил огромное количество труда, чтобы на основании наблюдений, т. е. эмпирически, получить свои три закона движения планет. Ньютон, завершив начинание Галилея, нашёл более общие принципы, из которых, в частности, следуют законы Кеплера, причем в более общем виде, чем их нашёл Кеплер. Поэтому вывод законов Кеплера из законов Ньютона имеет принципиальное значение, и мы постараемся в этом параграфе дать их строгие доказательства.

Будем решать задачу двух тел, используя свойства векторов. Помимо известных действий сложения и разложения, с векторами можно делать и другие математические операции (умножение, дифференцирование и т.п.).

Произведение векторов может быть двух типов: векторное и скалярное. *Скалярным произведением двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b}* называется скаляр \mathbf{c} , определяемый выражением

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \cos \theta, \quad (\text{II.1})$$

Векторным произведением векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называется вектор \mathbf{c} , перпендикулярный плоскости параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} как на сторонах и с длиной, равной его площади, т. е.

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = a \cdot b \cdot \sin \theta. \quad (\text{II.2})$$

Направление вектора \mathbf{c} выбирается по правилу винта: если смотреть с конца вектора \mathbf{c} , то кратчайший поворот \mathbf{a} к \mathbf{b} должен быть против часовой стрелки (Рис. 16). Векторное произведение будем обозначать квадратными скобками, а сами векторы жирным шрифтом: $[\mathbf{ab}]$.

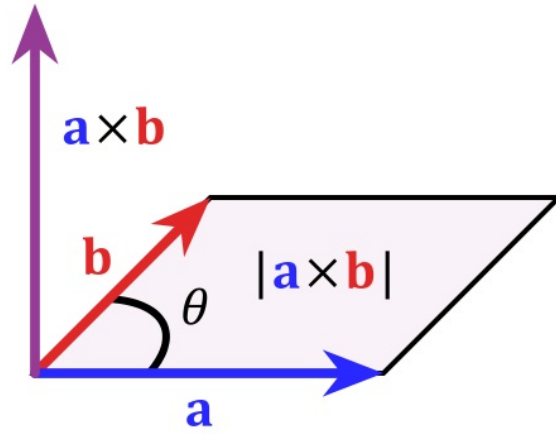


Рис. 16

Заметим, что из определения векторного произведения следует его некоммутативность

$$[\mathbf{a}\mathbf{b}] = -[\mathbf{b}\mathbf{a}].$$

Кроме того, очевидно, что

$$[\mathbf{a}\mathbf{a}] = 0.$$

Теперь переходим к уравнению движения в задаче двух тел. Рассмотрим инерциальную систему отсчёта x', y', z' (Рис. 17). Пусть векторы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 изображают положение двух тел с массами m_1 и m_2 .

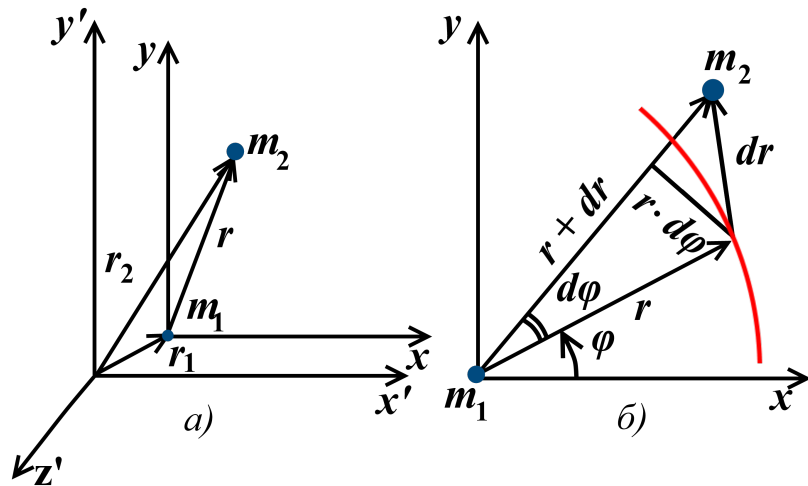


Рис. 17

Для определённости будем их называть Солнце и планета. Движение обоих тел происходит под действием двух сил, \mathbf{F}_{12} и \mathbf{F}_{21} , одинаковых по величине, но противоположно направленных. Величина этих сил определяется массами тел и длиной вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. По направлению сила \mathbf{F}_{21} , действующая со стороны тела m_2 на тело

II.1. Движение материальной точки под действием силы тяготения (задача двух тел)

m_1 , параллельна вектору \mathbf{r} , а сила \mathbf{F}_{12} антипараллельна ему, так как именно она вызывает движение планеты вокруг Солнца. Поэтому

$$|\mathbf{F}_{21}| = |\mathbf{F}_{12}| = \frac{Gm_1m_2}{r^2},$$

или, учитывая, что $\frac{\mathbf{r}}{r}$ — единичный вектор в направлении от m_1 к m_2 ,

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r}, \quad \text{и} \quad \mathbf{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r}. \quad (\text{II.3})$$

Запишем второй закон Ньютона для движения планеты и Солнца:

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r}, \quad m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\mathbf{r}. \quad (\text{II.4})$$

Вычитая почленно уравнения (II.4) одно из другого, получим уравнение движения планеты относительно Солнца

$$m_2 \frac{d(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)}{dt} = -m_2 \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}\mathbf{r}. \quad (\text{II.5})$$

Будем теперь рассматривать вектор \mathbf{r} как радиус-вектор в некоторой полярной системе отсчёта (r, φ) с полюсом в точке m_1 (Рис. 17, б). Эта система в общем случае неинерциальна: в данном случае она является гелиоцентрической. Обозначая

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \quad \text{и} \quad M = m_1 + m_2, \quad (\text{II.6})$$

получим

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{GM}{r^3}\mathbf{r}. \quad (\text{II.7})$$

Таким образом, движение тела m_2 относительно m_1 происходит так же, как и в инерциальной системе, но при условии, что в полюсе сосредоточена сумма масс обоих тел. Покажем, что из уравнения (II.7) следуют законы Кеплера. Начнём со второго из них, так как он потребуется для вывода первого.

Второй закон Кеплера.

Пользуясь определением производной, можно показать, что произведения векторов дифференцируются по тем же правилам, что и произведения скалярных величин. Рассмотрим производную по времени от момента скорости

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}\mathbf{v}] = [\mathbf{r}\frac{d\mathbf{v}}{dt}] + [\frac{d\mathbf{r}}{dt}\mathbf{v}].$$

Очевидно, что оба слагаемых в правой части этого выражения равны нулю, так как в них векторно перемножаются коллинеарные векторы: ускорение $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ направлено вдоль действия центральной силы параллельно вектору \mathbf{r} , а $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ по определению скорости. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}\mathbf{v}] = 0 \quad \text{и} \quad [\mathbf{r}\mathbf{v}] = [\mathbf{r}\frac{d\mathbf{r}}{dt}] = \mathbf{C}, \quad (\text{II.8})$$

т. е. момент вектора скорости есть *постоянный вектор* \mathbf{C} . Очевидно, что он определяет неизменную плоскость орбиты относительного движения планеты, проходящую через центральное тело.

По определению векторного произведения (II.2) длина вектора $[\mathbf{r}d\mathbf{r}]$ равна удвоенной площади треугольника dS , построенного на векторах \mathbf{r} и $d\mathbf{r}$ (Рис. 17, б). Поэтому

$$C = 2 \frac{dS}{dt} = 2 \cdot \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}. \quad (\text{II.9})$$

Константа C называется секторной скоростью и является модулем вектора \mathbf{C} . Она означает постоянство площади, заметаемой радиус-вектором за единицу времени. Таким образом, мы приходим к следующей уточнённой формулировке второго закона Кеплера (или закона площадей):

радиус-вектор, характеризующий положение движущегося тела относительно неподвижного центрального тела в задаче двух тел, всегда лежит в неизменной плоскости орбиты и за равные промежутки времени описывает площади равной величины.

Первый закон Кеплера.

Запишем уравнения (II.4) для движения тела m_1 в полярной системе координат (r, φ) в проекции на оси x и y , как это изображено на (Рис. 17, б):

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dv_x}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \cos \varphi; \\ y &= r \sin \varphi, & \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{dv_y}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Поделим эти уравнения почленно на уравнения (II.9). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{d\varphi} &= -\frac{GM}{C} \cos \varphi, & dv_x &= -\frac{GM}{C} d(\sin \varphi); \\ \frac{dv_y}{d\varphi} &= -\frac{GM}{C} \sin \varphi, & dv_y &= +\frac{GM}{C} d(\cos \varphi). \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

Функции, дифференциалы которых равны, могут различаться лишь на постоянные величины, которые мы обозначим соответственно через A и B ,

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{GM}{C} \sin \varphi + A, \\ v_y &= \frac{GM}{C} \cos \varphi + B. \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Выберем направление оси x так, чтобы при $\varphi = 0$ скорость была направлена только вдоль оси y , т.е. $v_x = 0$. Тогда $A = 0$. Продифференцируем выражения для x и y из формул (II.10) с целью получить выражения для левых частей уравнений (II.12). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos \varphi - r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{GM}{C} \sin \varphi + A, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dr}{dt} \sin \varphi + r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \frac{GM}{C} \cos \varphi + B. \end{aligned}$$

II.1. Движение материальной точки под действием силы тяготения (задача двух тел)

Исключая из этих уравнений $\frac{dr}{dt}$ умножением первого на $-\sin \varphi$, а второго на $-\cos \varphi$ и почленным сложением, получим с учетом, что $A = 0$

$$r \frac{d\varphi}{dt} = \frac{GM}{C} + B \cos \varphi.$$

Исключим $\frac{d\varphi}{dt}$ с помощью закона площадей (II.9)

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{C^2} + \frac{B}{C} \cos \varphi.$$

Введя обозначения

$$\frac{C^2}{GM} = p \quad \text{и} \quad \frac{BC}{GM} = e, \quad (\text{II.13})$$

получим общее уравнение конических сечений в полярных координатах с полюсом в фокусе кривой

$$r = \frac{p}{(1 + e \cdot \cos \varphi)}. \quad (\text{II.14})$$

Величина p называется *параметром*, а e — *эксцентриситетом* кривой второго порядка. Из четности функции косинуса следует, что кривая, изображаемая уравнением (II.14), симметрична относительно прямых $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Поскольку при $e < 1$ замена e на $-e$ и φ на $(\pi - \varphi)$ не меняет вида кривой, то в этом случае имеется еще одна ось симметрии, параллельная оси y , и, следовательно, второй фокус. Линия замкнута и образует эллипс. Его уравнение относительно второго фокуса, очевидно, имеет вид

$$r = \frac{p}{(1 - e \cdot \cos \varphi)}. \quad (\text{II.15})$$

Если $e = 1$, ветви кривой уходят в бесконечность при $\varphi = \pi$ (или $\varphi = 0$ для уравнения вида (II.15)). При $e > 1$ существуют две асимптоты при $\cos \varphi = -\frac{1}{e}$ (гипербола). При $e = 0$ орбита — окружность.

Таким образом, первый закон Кеплера в уточненном виде можно сформулировать так:

под действием силы тяготения одно небесное тело движется относительно другого по одному из конических сечений: гиперболе, параболе или эллипсу (в предельном случае — по прямой или окружности).

В этой формулировке первый закон Кеплера справедлив не только для одной планеты, обращающейся вокруг Солнца, но и для любой кометы, орбита которой может быть как эллиптической, так и параболической или гиперболической.

Третий закон Кеплера.

Константа закона площадей (II.9) равна удвоенной площади эллипса S , деленной на период обращения T :

$$C = \frac{2S}{T} = \frac{2\pi a^2}{T} \sqrt{1 - e^2}.$$

Учитывая соотношения (II.13), и свойства эллипса, получаем

$$\frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{T} = a(1 - e^2)CM,$$

откуда, учитывая, что $M = m_1 + m_2$, находим строгую математическую формулировку третьего закона Кеплера

$$\frac{T^2}{a^3}(m_1 + m_2) = \frac{4\pi^2}{G}. \quad (\text{II.16})$$

или в словесной форме:

отношение квадрата сидерического периода обращения двух тел к кубу среднего расстояния между ними, умноженное на сумму масс обоих тел, есть универсальная постоянная.

Уточнённый третий закон Кеплера играет особенно важную роль в астрономии, так как позволяет определить либо сумму масс обращающихся тел (как, например, в случае двойных звёзд), либо массу центрального тела, как в случае тел Солнечной системы, если массой спутника можно пренебречь или его относительная масса известна из каких-либо дополнительных соображений.

II.2 Движение искусственных спутников Земли

Хотя движение искусственных спутников небесных тел подчиняется тем же законам, что и движение естественных, некоторые особенности их орбит и условия, определяющие характер их движения, заслуживают отдельного рассмотрения.

Искусственные спутники Земли (ИСЗ) выводятся на орбиту с помощью двух или многоступенчатых ракет. Последняя ступень ракеты сообщает спутнику определённую скорость на заданной высоте. Тело, запущенное горизонтально на высоте h от поверхности Земли, станет ИСЗ, если его скорость в этот момент будет удовлетворять некоторым условиям.

Если скорость запуска точно равна круговой скоростью на данной высоте h , то тело будет двигаться по круговой орбите.

Если эта скорость превышает круговую, то тело будет двигаться по эллипсу, причём перигей этого эллипса окажется в точке выхода на орбиту.

Если же сообщённая скорость несколько меньше круговой, а высота h достаточно большая, то тело также будет двигаться по эллиптической орбите, но в этом случае точка выхода на орбиту станет апогеем.

Масса искусственного спутника ничтожно мала по сравнению с массой Земли, и ею можно пренебречь; тогда круговая скорость v_c на расстоянии $r = R + h$ от центра Земли будет

$$v_c = \sqrt{\frac{Gm}{R+h}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}, \quad (\text{II.17})$$

где m - масса Земли, R - её радиус, g - ускорение свободного падения у поверхности Земли, h - высота точки запуска спутника от поверхности Земли.

У воображаемого спутника, движущегося по окружности у самой поверхности Земли, ($h = 0$) $R = 6,378 \cdot 10^6$ м и $g = 9,81$ м/с² скорость должна быть равна

$$v_{1k} = 7,91 \text{ км/с.}$$

Скорость v_{1k} называется *первой космической скоростью* относительно Земли. Однако, из-за наличия вокруг Земли атмосферы спутник, движущийся у самой её поверхности, реально существовать не может. Поэтому запуск ИСЗ производится на некоторой

II.2. Движение искусственных спутников Земли

высоте h ($h > 150$ км). Круговая скорость на высоте h меньше первой космической скоростью v_{1k} и определяется из уравнения (II.17) или по формуле

$$v_c = v_{1k} \sqrt{\frac{R}{R+h}}.$$

Элементы орбиты ИСЗ зависят от места и времени запуска, от величины и направления начальной скорости. Связь между большой полуосью a орбиты спутника и его начальной скоростью v_0 , согласно формуле (2.41), определяется формулой

$$v_0^2 = Gm \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} \right),$$

где r_0 - расстояние точки выхода ИСЗ на орбиту от центра Земли.

Обычно запуск ИСЗ производится горизонтально, точнее, перпендикулярно к радиальному направлению. Эксцентриситет орбиты e при горизонтальном запуске равен

$$e = 1 - \frac{q}{a},$$

где q - расстояние *перигея* (ближайшей точки орбиты от центра Земли).

В случае эллиптической орбиты (Рис. 18) $q = a(1 - e) = R + h_n$ где h_n линейная высота перигея над поверхностью Земли. Расстояние *апогея* (наиболее удалённой точки орбиты от центра Земли) $Q = a(1 + e) = R + h_a$, где h_a - высота апогея над земной поверхностью. Если запуск произведен в перигее, то $r_0 = q = R + h_n$.

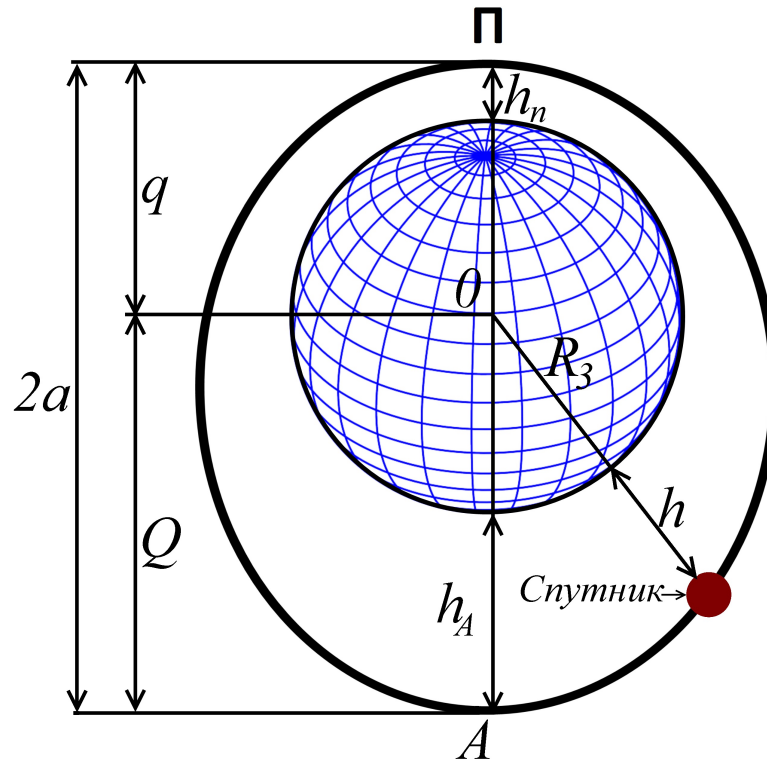


Рис. 18

Зависимость формы орбиты ИСЗ от начальной скорости, с которой он выведен на орбиту, показана на (Рис. 19). Если в точке K спутнику сообщена горизонтальная скорость, равная круговой для этого расстояния от центра Земли, то он будет двигаться

по круговой орбите (I). Если начальная скорость в точке меньше соответствующей круговой, то спутник будет двигаться по эллипсу (II), а при очень малой скорости - по эллипсу (III), сильно вытянутому и пересекающему поверхность Земли; в этом случае запущенный спутник упадет на поверхность Земли, не совершив и одного оборота. Если скорость в точке больше соответствующей круговой, но меньше соответствующей параболической, то спутник будет двигаться по эллипсу (IV). Примерное расположение

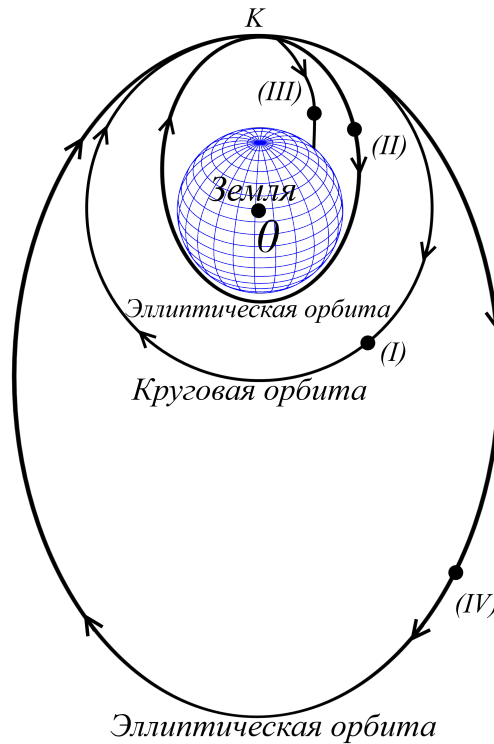


Рис. 19

эллиптической орбиты спутника в пространстве показано на (Рис. 20). Здесь i - наклонение орбиты спутника к экватору Земли, Ω - восходящий узел орбиты, ϑ - нисходящий узел, Π - перигей орбиты, A - апогей орбиты, Υ - точка весеннего равноденствия на земном экваторе, Ω - прямое восхождение восходящего узла, ω - угловое расстояние перигея от восходящего узла.

Период обращения ИСЗ определяется по третьему закону Кеплера (II.16). Он равен

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{Gm}} a^{3/2} \quad \text{или} \quad T = \frac{2\pi}{R\sqrt{g}} a^{3/2}.$$

Если выражать в километрах, то при $R = 6370$ км и $g = 9,81$ м/с² период обращения спутника получится в минутах из следующей формулы:

$$T = 1,659 \cdot 10^{-4} a^{3/2}$$

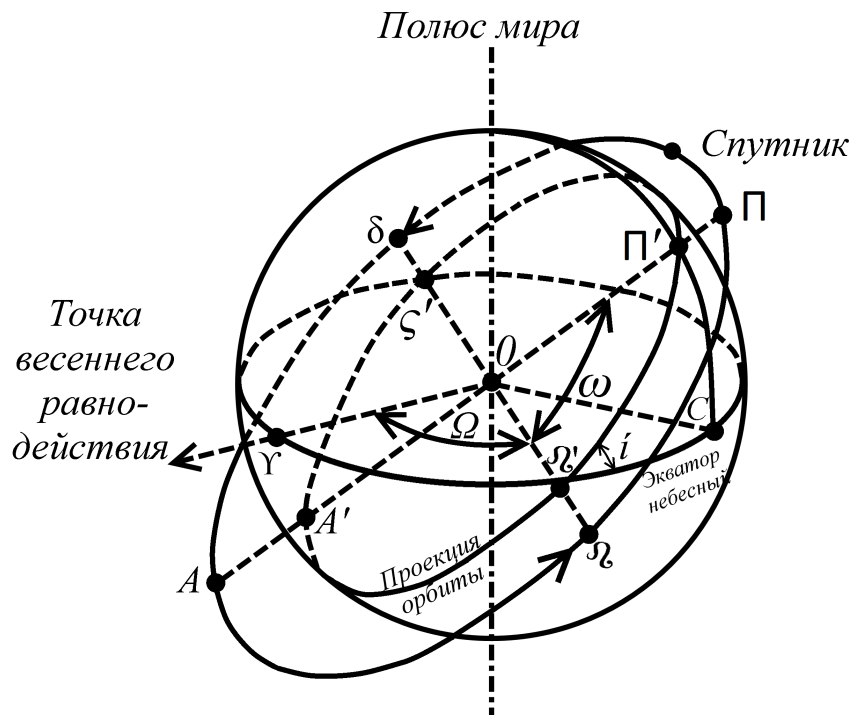


Рис. 20

Основных причин, изменяющих орбиту ИСЗ, две: действие экваториального утолщения Земли и влияние сопротивления атмосферы Земли. Первая причина вызывает вековые возмущения восходящего узла $\Delta\Omega$ и перигея $\Delta\omega$, которые легко учитываются по формулам небесной механики. Вторая причина вызывает уменьшение большой полуоси a , т.е. высоты h , и изменение формы орбиты. Поскольку плотность атмосферы быстро падает с высотой, основное сопротивление и уменьшение скорости спутник испытывает вблизи перигея. Вследствие этого высота апогея орбиты спутника с каждым оборотом заметно уменьшается (высота перигея уменьшается гораздо медленнее). В результате уменьшается большая полуось и эксцентриситет орбиты; орбита спутника постепенно округляется. Когда высота апогея становится сравнимой с высотой перигея, спутник испытывает торможение и теряет свою скорость вдоль почти всей орбиты, уменьшение высоты апогея и перигея происходит ещё быстрее, и спутник, приближаясь по спирали к поверхности Земли, входит в плотные слои атмосферы и сгорает. Так как спутник с каждым оборотом снижается, то его потенциальная энергия уменьшается, часть её переходит в кинетическую энергию. Это приращение кинетической энергии с избытком покрывает энергию движения, которая теряется при торможении. Поэтому скорость спутника не уменьшается, а наоборот, увеличивается, в то время как орбита уменьшается. Следовательно, по мере снижения спутника его период обращения вокруг Земли сокращается.

Описанное возмущённое движение спутника дано в первом приближении. В действительности элементы орбиты спутника испытывают более сложные и разнообразные возмущения. Сжатие Земли, отличие гравитационного поля от поля сферически-симметричной притягивающей массы, вызывают не только вековые возмущения долготы восходящего узла Ω , и расстояния перигея от узла ω . Они являются также причиной их периодических возмущений, а также эксцентриситета e (правда, весьма умеренных) и малых колебаний наклона орбиты к экватору i .

Наличие атмосферы вызывает не только вековое уменьшение большой полуоси a и эксцентриситета e . Боковое давление на спутник, создаваемое вращающейся атмосферой, приводит к монотонному изменению i , знак которого определяется направлением движения спутника на орбите. Атмосфера обуславливает также малые периодические изменения ϑ и ω . Наконец, возмущающие действия Луны и Солнца вызывают малые периодические возмущения всех элементов орбиты спутника.

Глава III

Математическое моделирование в MAPLE

III.1 Кривые второго порядка

Кривые второго порядка в программе MAPLE можно изучать с помощью пакета **geometry**, **plottools** и **plots**. Пакет **geometry** содержит команды для решения задач двумерной евклидовой геометрии. Перед началом работы пакет нужно подгрузить. Латинские буквы x и y используются как глобальные переменные для координат точек, а также в качестве переменных в уравнениях прямых и окружностей. Теперь подробнее рассмотрим эллипс, параболу и гиперболу в этих пакетах.

III.1.1 Кривые второго порядка в пакете *plottools*

В пакете *plottools* из кривых второго порядка существуют команды `[ellipse]` и `[hyperbola]`. Эллипс задается следующим образом:

```
ellipse(c, a, b, filled=boolean, numpoints=n, options)
здесь;
```

c - центр эллипса,

a - горизонтальная полуось эллипса,

b - вертикальная полуось эллипса,

`filled=boolean` - закраска области внутри эллипса. По умолчанию не закрашивает (`false`).

`options` - необязательные опции (`plot/options`). Рассмотрим пример:

```
with(plottools):
with(plots):
a:=10: b:=5: x[0]:=2: y[0]:=0:
Ell:=ellipse([x[0],y[0]],a,b,filled=true, color="WhiteSmoke",thickness=3):
display(Ell,scaling=constrained);
```

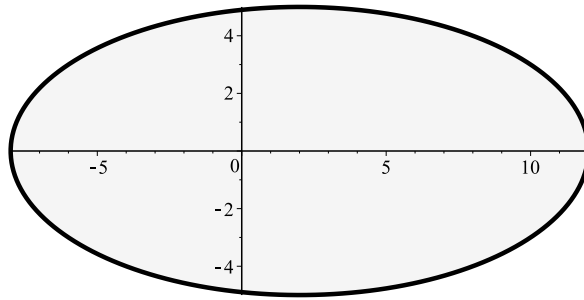


Рис. 21

Если необходимо, полученную фигуру можно повернуть на любой угол:

```
display(rotate(Ell, (1/12)*Pi), scaling=constrained);
```

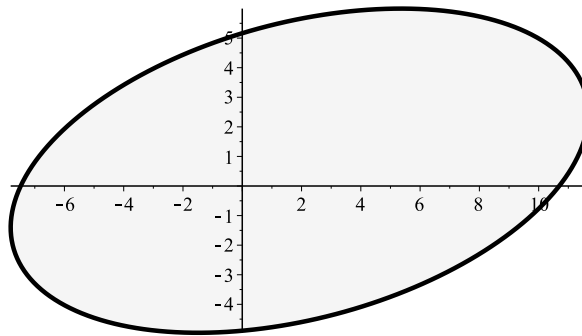


Рис. 22

Гипербола задаётся аналогично:

```
hyperbola (c, a, b, r1..r2, options)
```

где,

c - центр симметрии гиперболы,

a - действительная полуось гиперболы,

b - мнимая полуось гиперболы, вспомним, что $a^2 \cdot e^2 = a^2 + b^2$, где e- эксцентриситет гиперболы

$r_1..r_2$ - область определения графика. График будет нарисован;

от точки $[x_0 + a \cosh r_1, y_0 + b \sinh r_1]$ до точки $[x_0 + a \cosh r_2, y_0 + b \sinh r_2]$

и от точки $[x_0 - a \cosh r_1, y_0 - b \sinh r_1]$ до точки $[x_0 - a \cosh r_2, y_0 - b \sinh r_2]$.

Рассмотрим простой пример:

```
with(plottools):
```

```
with(plots):
```

III.1. Кривые второго порядка

```
a:=4: b:=3: x[0]:=0: y[0]:=0:
Hyp_1:=hyperbola([x[0],y[0]],a,b,-2..2,color=black,thickness=3):
display(Hyp_1,scaling=constrained);
```

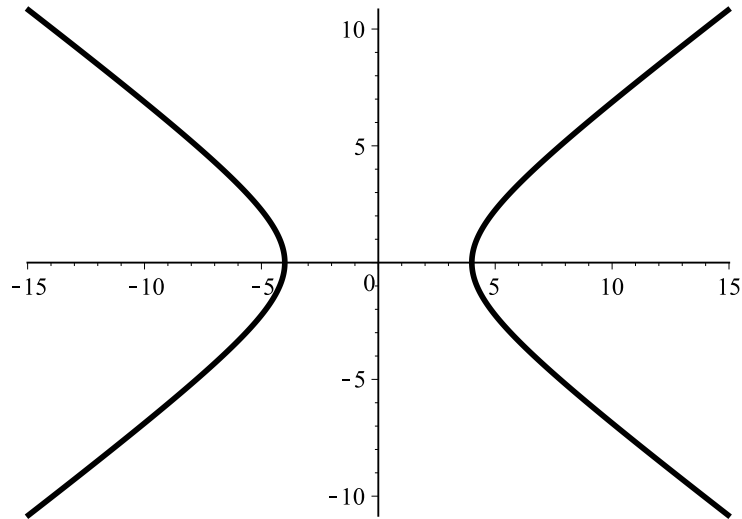


Рис. 23

Мы получили гиперболу с центром в начале координат, фокусы на расстоянии $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$ от центра, с эксцентриситетом $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$.

III.1.2 Кривые второго порядка в пакете *plots*

В пакете *plots* с помощью команды `[implicitplot]` можно получить все виды кривых второго порядка, задав уравнения в неявном виде. Структура команды *implicitplot* выглядит следующим образом:

```
implicitplot(expr, x = a..b, y = c(x)..d(x), options)
implicitplot(ineq, x = a..b, y = c(x)..d(x), options)
implicitplot(f, a..b, c..d, options)
implicitplot([expr1,expr2,t], x = a..b, y = c(x)..d(x), options)
```

где:

expr - выражение или уравнение, зависящее от *x* и *y*,

ineq - неравенство, зависящее от *x* и *y*,

f - уравнение, содержащее процедуры или операторы, представляющие функции двух переменных,

expr1,expr2 - уравнения или выражения через *x*, *y* или *t*, или полином в *t*

x,y,t - переменные,

a,b,c,d - действительные постоянные,

c(x),d(x) - выражения, определяющие действительные постоянные для данного значения *x*, Начнём с эллипса:

```
with(plots):
```

```

a:=10: b:=5: x[0]:=0: y[0]:=0:
Ell_3:=(x-x[0])^2/a^2 +(y-y[0])^2/b^2 =1:
implicitplot(Ell_3,x=-12..12, y=-6..6, scaling=constrained,
filledregions=true,
coloring=["WhiteSmoke",white],thickness=3);

```

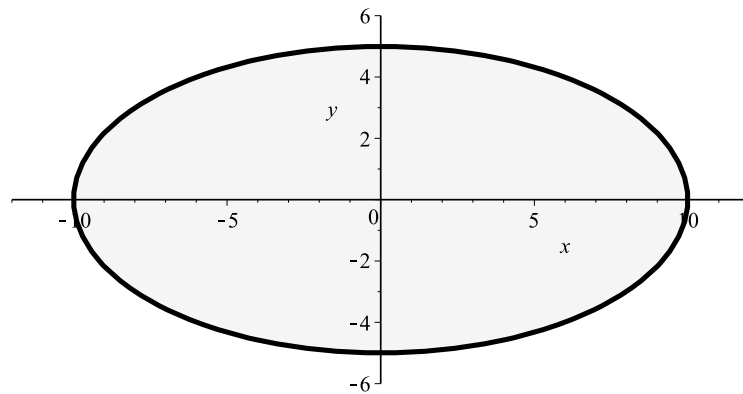


Рис. 24

Обратим внимание, что в команде *implicitplot* опции немного отличается от обычных опций (plot/options). Например, опция *filledregions* работает только с командами *contourplot*, *listcontplot* и *implicitplot*.

Если первый аргумент является выражением или процедурой f , то она закрашивает область $f = 0$. Опция *coloring* = [c_1 , c_2] закрашивает область $f < 0$ со цветом c_1 и область $f > 0$ со цветом c_2 . Если первый аргумент является уравнением, как $f = g$, то опция *filledregions* = *true* закрашивает область $f - g$.

Продолжаем с параболой:

```

with(plots):
p:=3:
Par:=implicitplot(y^2=2*p*x, x=-3..10, y=-8..8,filledregions=true,
coloring=["WhiteSmoke",white],thickness=3):
display(Par);

```

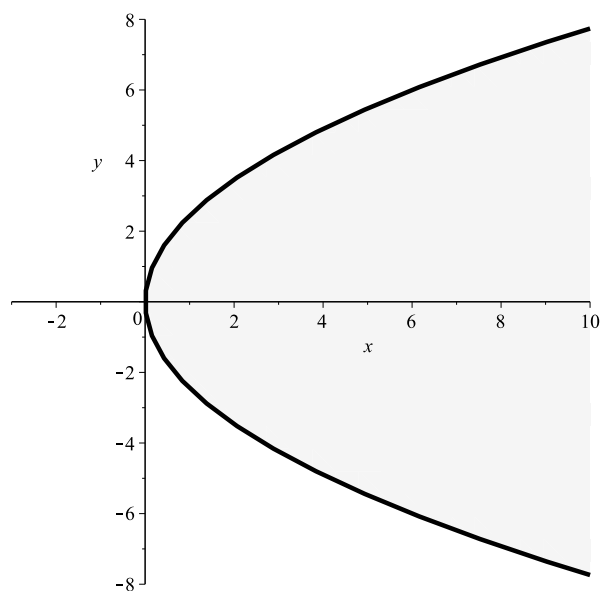


Рис. 25

Также можно задать и гиперболу:

```
with(plots):
a:=4: b:=3:
Hyp_2 := implicitplot(x^2/a^2-y^2/b^2 = 1, x = -10 .. 10, y = -10 .. 10,
color=black,thickness=3):
display(Hyp_2, scaling=constrained);
```

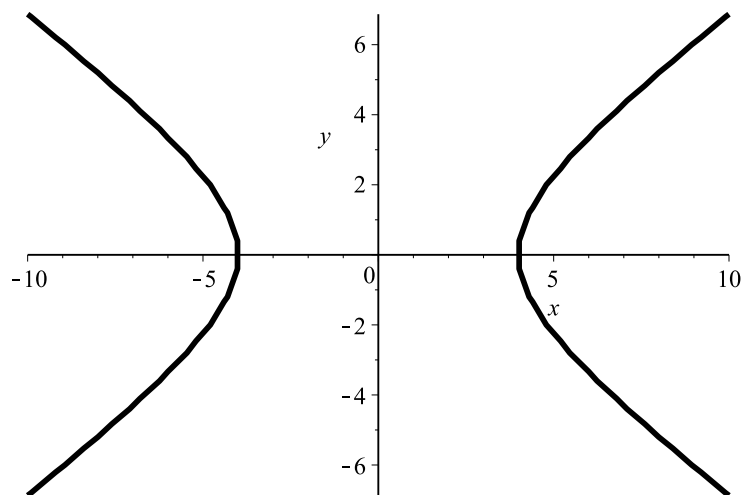


Рис. 26

III.1.3 Кривые второго порядка в пакете *geometry*

В пакете *geometry* с помощью команды [ellipse], [parabola] и [hyperbola] можно задавать соответствующие кривые по разным их параметрам. Эллипс можно зада-

вать семью разными способами:

```
ellipse(p, [A,B,C,E,F], n)
ellipse(p, ['directrix'=dir, 'focus'=fou, 'eccentricity'=ecc], n)
ellipse(p, ['foci'=foi, 'MajorAxis'=lma], n)
ellipse(p, ['foci'=foi, 'MinorAxis'=lmi], n)
ellipse(p, ['foci'=foi, 'distance'=dis], n)
ellipse(p, ['MajorAxis'=ep1, 'MinorAxis'=ep2], n)
ellipse(p, eqn, n )
```

где;

p - Название эллипса,

A, B, C, E, F - пять различных точек эллипса,

'directrix'=dir - директриса эллипса,

'focus'=fou - фокус эллипса,

'eccentricity'=ecc - эксцентриситет эллипса,

'foci'=foi - оба фокуса эллипса,

'MajorAxis'=lma - длина большой полуоси эллипса,

'MinorAxis'=lmi - длина малой полуоси эллипса,

'distance'=dis - сумма расстояний точки на эллипсе до фокусов,

'MajorAxis'=ep1 - параметры (точки)концов большой полуоси,

'MinorAxis'=ep2 - параметры (точки)концов малой полуоси,

eqn - уравнение эллипса,

n - названия горизонтальной и вертикальной осей.

После определения эллипса с помощью команды **detail** можно получить все параметры эллипса. Рассмотрим пример:

```
with(geometry):
_EnvHorizontalName:='x'; _EnvVerticalName:='y';
```

$$\begin{aligned} _EnvHorizontalName &:= x \\ _EnvVerticalName &:= y \end{aligned}$$

```
ellipse(Ell_5, x^2/64+y^2/36 = 1):
detail(Ell_5);
```

name of the object:	<i>Ell_5</i>
form of the object:	<i>ellipse2d</i>
center:	[0, 0]
foci:	$[-2\sqrt{7}, 0], [2\sqrt{7}, 0]$
length of the major axis:	16
length of the minor axis:	12
equation of the ellipse:	$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} - 1 = 0$

```
FF:=map(coordinates, foci(Ell_5));
point(F1,FF[1]); point(F2,FF[2]);
```

III.1. Кривые второго порядка

```

FF:=[[-2*sqrt(7), 0], [2*sqrt(7), 0]]

F1
F2

CC:=center(Ell_5);
CC:=center_Ell_5
draw([Ell_5, F1(printtext=true), F2(printtext=true), CC], scaling=constrained,
axes=normal, thickness=3, color=black, labels=[x, y]);

```

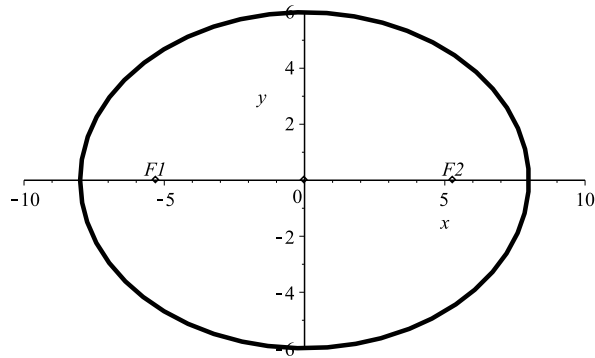


Рис. 27

Теперь определим эллипс по его фокусам и длине большой полуоси:

```

restart;
with(geometry):
point(F_1, 8, 0); point(F_2, 24, 0);
F_1
F_2
ellipse(Ell_6, ['foci'=[F_1, F_2], 'MajorAxis'=17]);
Ell_6
detail(Ell_6);

```

assume that the names of the horizontal and vertical axes are $_x$ and $_y$, respectively
Поскольку мы не определили названия осей, MAPLE сам их определил как $_x$ и $_y$.

name of the object:	Ell_6
form of the object:	$ellipse2d$
center:	$[16, 0]$
foci:	$[[8, 0], [24, 0]]$
length of the major axis:	17
length of the minor axis:	$\sqrt{33}$
equation of the ellipse:	$132_x^2 + 1156_y^2 - 4224_x + 24255 = 0$


```
FF:=map(coordinates, foci(Ell_6));
point(F_1,FF[1]); point(F_2,FF[2]);
      [[8, 0], [24, 0]]
      F_1
      F_2
CC:=center(Ell_6);
      center_Ell_6

draw([Ell_6,F_1,F_2,CC],scaling=constrained,axes=normal,
thickness=3,color=black);
```

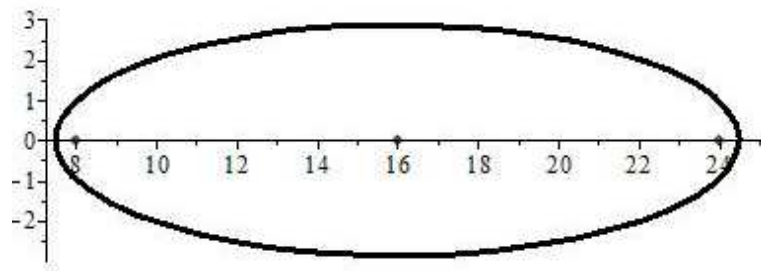


Рис. 28

Параболу в пакете **geometry** можно задавать четырьмя разными способами:

```
parabola(p, [A, B, C, E, F], n )
parabola(p, ['focus'=fou, 'vertex'=ver], n )
parabola(p, ['directrix'=dir, 'focus'=fou], n )
parabola(p, eqn, n )
```

где:

p - Название параболы,

A, B, C, E, F - пять различных точек параболы,

'focus'=fou - фокус параболы,

'vertex'=ver - вершина параболы,

'directrix'=dir - директриса параболы,

eqn - уравнение параболы,

n - названия горизонтальной и вертикальной осей.

Попробуем определить (задать) параболу через её фокус и директрису:

```
restart:
with(geometry):
point(F,4,0): line(Dir,x-2=0,[x,y]):
parabola(par_1, ['focus' = F, 'directrix' = Dir], [x, y]):
detail(par_1);
```

III.1. Кривые второго порядка

name of the object:	<i>par_1</i>
form of the object:	<i>parabola2d</i>
vertex:	[3, 0]
focus:	[4, 0]
directrix:	$-2 + x = 0$
equation of the parabola:	$y^2 - 4x + 12 = 0$

```
point(Vertex, 3,0):  
draw([Dir,par_1,F,Vertex],axes=normal,thickness=3,scaling=constrained);
```

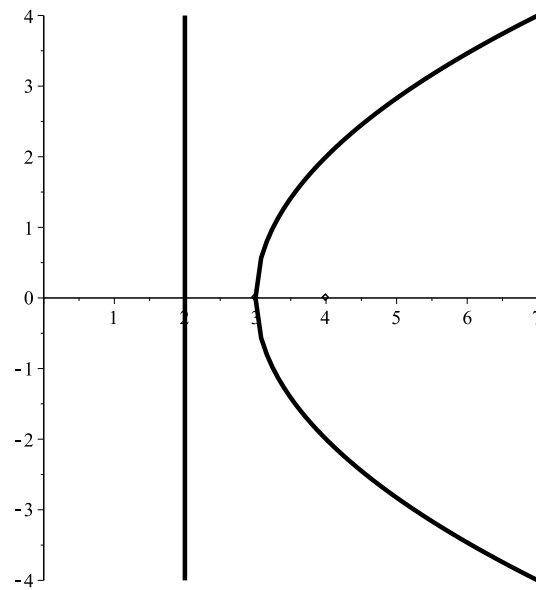


Рис. 29

Гиперболу также можно определить различными её параметрами:

```
hyperbola(p, [A, B, C, E, F], n)  
hyperbola(p, ['directrix'=dir, 'focus'=fou, 'eccentricity'=ecc], n)  
hyperbola(p, ['foci'=foi, 'vertices'=ver], n)  
hyperbola(p, ['foci'=foi, 'distancev'=disv], n)  
hyperbola(p, ['vertices'=ver, 'distancef'=disf], n)  
hyperbola(p, eqn, n), где:  
p - Название гиперболы,  
A, B, C, E, F - пять различных точек гиперболы,  
'directrix'=dir - директриса гиперболы,  
'focus'=fou - фокус гиперболы,  
'eccentricity'=ecc - эксцентриситет гиперболы (естественно больше единицы),  
'vertices'=ver - вершины гиперболы,  
'foci'=foi - фокусы гиперболы,  
'distancev'=disv - расстояние между вершинами гиперболы,  
'distancef'=disf - расстояние между фокусами гиперболы,  
eqn - уравнение гиперболы,
```

n - названия горизонтальной и вертикальной осей.

Определим гиперболу по его уравнению, получим её параметры и нарисуем её:

```
restart;
with(geometry):
hyperbola(Hyp_3, x^2/64 - y^2/36 = 1, [x, y]);
```

Hyp_3

```
detail(Hyp_3);
```

name of the object:	<i>Hyp_3</i>
form of the object:	<i>hyperbola2d</i>
center:	$[0, 0]$
foci:	$[[-10, 0], [10, 0]]$
vertices:	$[[-8, 0], [8, 0]]$
the asymptotes:	$\left[y + \frac{3x}{4} = 0, y - \frac{3x}{4} = 0 \right]$
equation of the hyperbola:	$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} - 1 = 0$

```
CC:=center(Hyp_3);
                                center_Hyp_3
FF:=map(coordinates, foci(Hyp_3));
point(F_1,FF[1]); point(F_2,FF[2]);
                                [[-10, 0], [10, 0]]
                                F_1
                                F_2
VER:=map(coordinates, vertices(Hyp_3));
point(VER_1,VER[1]); point(VER_2,VER[2]);
                                [[-8, 0], [8, 0]]
                                VER_1
                                VER_2
AS:=map(Equation, asymptotes(Hyp_3));
line(AS1,AS[1],[x,y]): line(AS2,AS[2],[x,y]):
```

$$\left[y + \frac{3}{4}x = 0, y - \frac{3}{4}x = 0 \right]$$

```
draw([Hyp_3(color=black,thickness=2),AS1(color=red,linestyle=dash),
AS2(color=red,linestyle=dash),CC,F_1(color=blue),F_2(color=blue),
VER_1,VER_2],axes=normal,labels = ["x", "y"],labelfont=[times,14]);
```

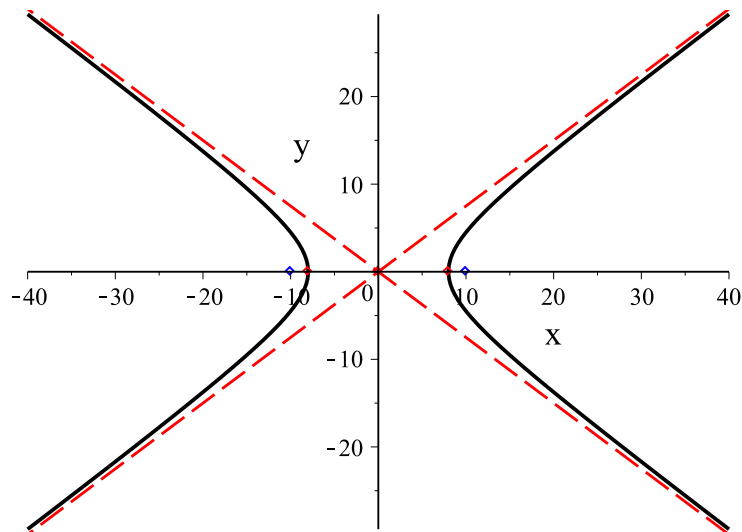


Рис. 30

III.2 Движение небесных тел

III.2.1 Движение планет солнечной системы

Орбиты планет солнечной системы имеют форму эллипса. Они отличаются своими эксцентриситетами и радиусами (вернее длинами большой или маленькой полуосей). Создадим процедуру, которая будет рисовать эллипс по заданному эксцентриситету и длине большой полуоси. Чтобы лучше видеть, как влияет эксцентриситет на форму эллипса, возьмём эллипсы, у которых длины больших полуосей равные, но значения эксцентриситета разные.

```
restart:
```

```
with(plots):
```

```
Ellipse:=proc(epsilon,a,c1)local c:
```

```
c:=a*epsilon:
```

По определению $c = a \cdot e$, где c -положение фокусов относительно центра эллипса. А центр наших эллипсов совпадает с началом координат.

```
plot([a*(1-epsilon^2)*cos(theta)/(1-epsilon*cos(theta))-c,
```

```
a*(1-epsilon^2)*sin(theta)/(1-epsilon*cos(theta)),theta=0..2*Pi],
```

```
color=c1,frames=20, scaling=constrained,
```

```
legend = [typeset("e= ", epsilon," " "a=",a)]);
```

```
end proc:
```

```
E1:=Ellipse(0,10,red):
```

```
E2:=Ellipse(0.4,10,orange):
```

```

E3:=Ellipse(0.7,10,green):
E4:=Ellipse(0.9,10,blue):
E5:=Ellipse(0.99,10,black):
display([E1,E2,E3,E4,E5],frames=10,scaling=constrained,
title='Изменение формы эллипса с эксцентриситетом',titlefont=["ROMAN", 15]);

```

Изменение формы эллипса с эксцентриситетом

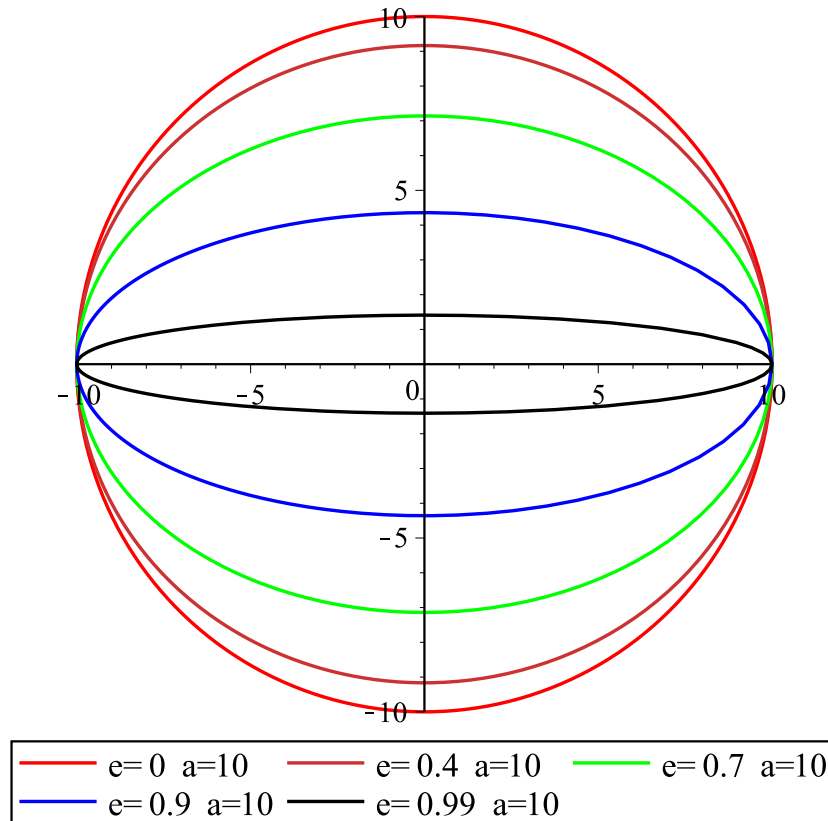


Рис. 31: Изменение формы эллипса с эксцентриситетом

Здесь мы использовали уравнение эллипса в полярных координатах: $r = \frac{p}{(1 - e \cos \theta)}$

где, $p = \frac{b^2}{a}$, $b = a\sqrt{(1 - e^2)}$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Как мы видим из рисунка, при $e=0$, эллипс превращается в окружность. И чем больше эксцентриситет эллипса, тем сильнее он отличается от окружности. Теперь повторим такую же процедуру, но поставим начало координат на один из фокусов эллипса:

```

Ellipse1:=proc(epsilon,a,c1)local c:
c:=a*epsilon:
plot([a*(1-epsilon^2)*cos(theta)/(1-epsilon*cos(theta)),
a*(1-epsilon^2)*sin(theta)/(1-epsilon*cos(theta)),theta=0..2*Pi],color=c1,
frames=20,scaling=constrained,legend = [typeset("e= ", epsilon," " "a=",a)]);
end proc:
E6:=Ellipse1(0,10,red):
E7:=Ellipse1(0.4,10,orange):
E8:=Ellipse1(0.7,10,green):

```

```
E9:=Ellipse1(0.9,10,blue):
E10:=Ellipse1(0.99,10,black):
display([E6,E7,E8,E9,E10],frames=10,
title='Левый фокус всех эллипсов совпадает с началом координат',
titlefont=["ROMAN", 14]);
```

*Изменение формы эллипса с эксцентриситетом,
левый фокус всех эллипсов совпадает с
началом координат*

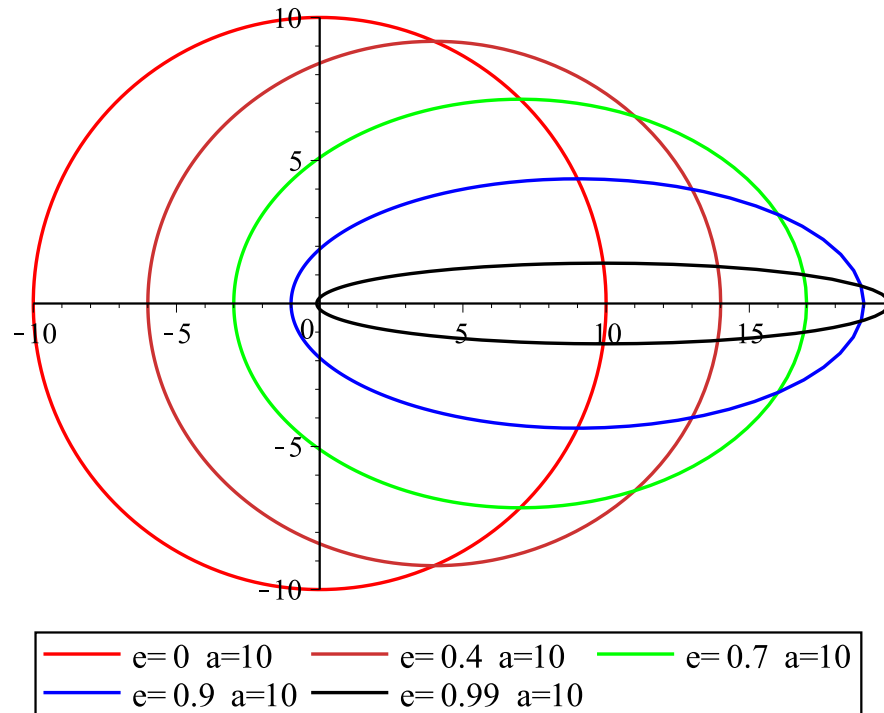


Рис. 32: Изменение формы эллипса с эксцентриситетом

Теперь приступим к изучению движения планет вокруг Солнца. Нарисуем Солнце и планету, поставив центр Солнца, согласно первому закону Кеплера, на один из фокусов эллипса, по которому движется планета.

```
Sun:=proc(a,epsilon,r,c2) local F, SolarDisc:
F:=[a*epsilon,0]:
```

F — Координаты (x,y) одного из фокусов, в данном случае правого фокуса.

```
SolarDisc:=plottools[disk](F, r, color=c2):
display(SolarDisc,scaling = constrained)
end proc:
Ell:=(a,epsilon,r,c1,c2)->plots[display](Ellipse(epsilon,a,c1),
Sun(a,epsilon,r,c2)):
Ell(10,0.8,0.5,green,yellow):
PT:=(a,epsilon,r3,c3,theta)->plots[display](plottools[disk]
([a*(1-epsilon^2)*cos(theta)/(1-epsilon*cos(theta))-a*epsilon,
```

```

a*(1-epsilon^2)*sin(theta)/(1-epsilon*cos(theta))],r3,color=c3),
scaling=CONSTRAINED,title='Траектория движения планеты вокруг Солнца',
titlefont=["ROMAN", 14]):
PT(10,0.8,0.05,red,0):
Orbit:=(a,epsilon,r,c1,c2,r3,c3,theta)->plots[display]
(PT(a,epsilon,r3,c3,theta),
Ell(a,epsilon,r,c1,c2)):
Orbit(10,0.8,0.5,black,yellow,0.3,red,Pi/2);

Стираем значения эксцентриситета

epsilon := 'epsilon';

```

Траектория движения планеты вокруг Солнца

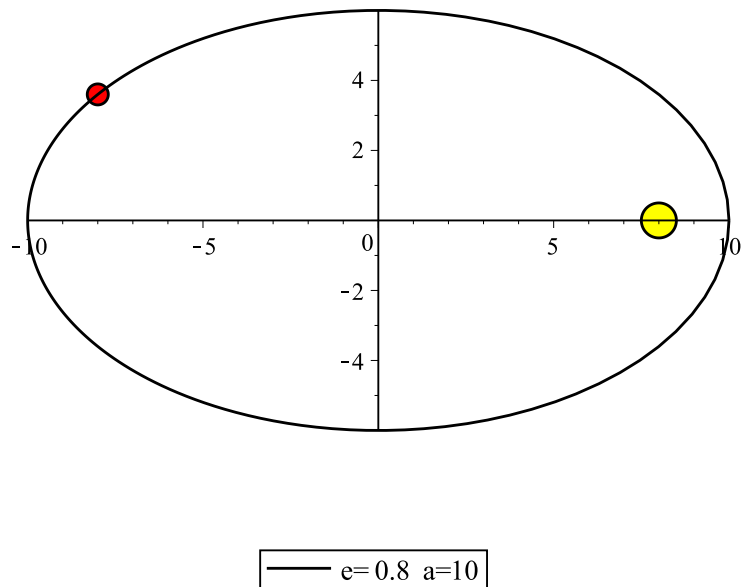


Рис. 33

Мы получили траекторию планеты с длиной большой полуоси 10 единиц и эксцентриситетом 0.8. В действительности в солнечной системе нет планет с таким большим эксцентриситетом орбиты. Мы специально выбрали такую величину, чтобы лучше продемонстрировать эллиптичность орбит.

Теперь, чтобы более наглядно показать движение планеты, создаём анимацию:

```

Anim_Orbit:=proc(a,epsilon,r,c1,c2,r3,c3,T,N) local i,ti,Ori:
ti:=(i)->T/N*i:
Ori:=(i)->Orbit(a,epsilon,r,c1,c2,r3,c3,ti(i)):
plots[display](seq(Ori(i),i=0..N),insequence=true,scaling=CONSTRAINED):
end proc:

```

Зададим параметры анимации:

```

AAnim_Orbit(10,0.8,0.5,black,yellow,0.2,red,6*Pi,100);

```

и получим:

Траектория движения планеты вокруг Солнца

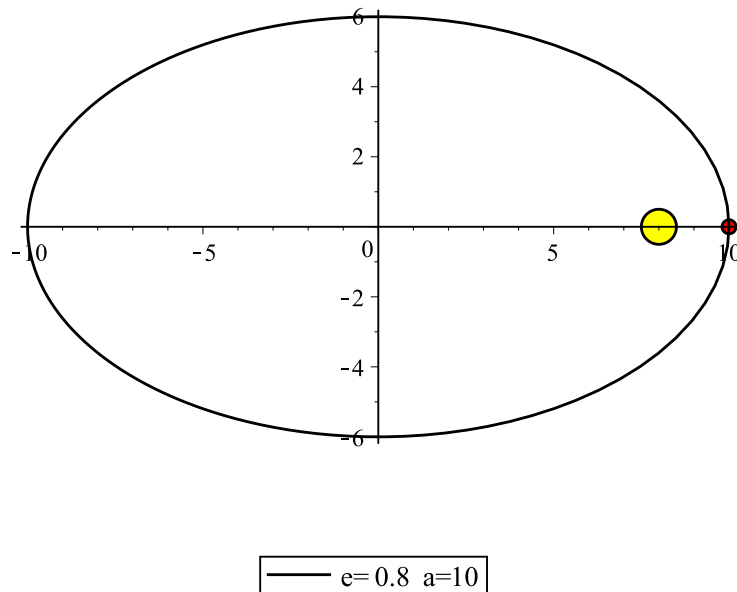


Рис. 34

Теперь более детально изучим траектории планет солнечной системы. Для этого создадим процедуру, которая будет рисовать траекторию планеты по заданным значениям эксцентриситета и афелийного расстояния.

```
Orbits:=proc(ra,epsilon,n,col) local a,b,p,c,r,fn,orb:
a:=ra/(1+epsilon):
c:=a*epsilon:
b:=a*sqrt(1-epsilon^2):
p:=b^2/a:
r:=p/(1-epsilon*cos(theta)):

fn:=plots[textplot]([-c,b,'n'],align={below,right}):
orb:=plot([r*cos(theta)+c, r*sin(theta),theta=0..2*Pi],color=col,frames=20,
scaling=constrained,
legend = [typeset("e= ", epsilon," " "ra=",ra," " ,n)]);
plots[display](orb,fn):
end proc:
```

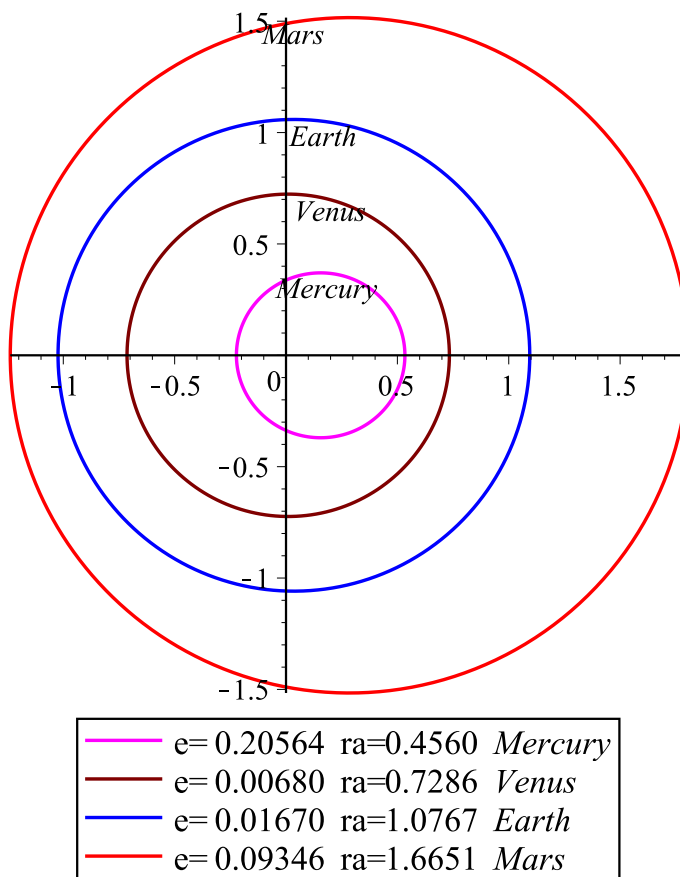
где ra - афелийное расстояние планеты от Солнца, а $epsilon$ - эксцентриситет орбиты планеты. Поскольку средние радиусы орбит планет солнечной системы сильно отличаются, мы будем рассматривать их в двух группах: Планеты земной группы и так называемые -планеты-гиганты

Таблица.2: Планеты земной группы [4]

	Меркурий	Венера	Земля	Марс
Афелийное расстояние (а.е)	0.456	0.7286	1.0767	1.6651
Эксцентриситет	0.20564	0.0068	0.01670	0.09346

Вводим данные Табл.2 об эксцентриситетах и афелийных расстояниях планет земной группы солнечной системы и получим их орбит:

```
plots[display](Orbits(0.4560,0.20564,Mercury,"Fuchsia"),
Orbits(0.7286,0.00680,Venus,"Maroon"),
Orbits(1.0767,0.01670,Earth,blue),
Orbits(1.6651,0.09346,Mars,red),scaling=CONSTRAINED)
```

**Рис. 35:** Орбиты планет земной группы

Также вводим данные Табл.3 планет-гигантов и Плутона:

```
plots[display](Orbits(5.4525, 0.04890,Jupiter,red),
Orbits(10.0735,0.05538,Saturn,"DeepSkyBlue"),
Orbits(20.0802,0.04756,Uranus,green),
Orbits(30.3275,0.00859,Neptune,blue),
Orbits(49.2981, 0.24880,Pluto,brown),scaling=CONSTRAINED);
```

Таблица.3: Планеты-гиганты и Плутон[4]

	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон
Аффелийное расстояние (а.е)	5.4525	10.0735	20.0802	30.3275	49.2981
Эксцентриситет	0.04845	0.05538	0.04756	0.00859	0.248

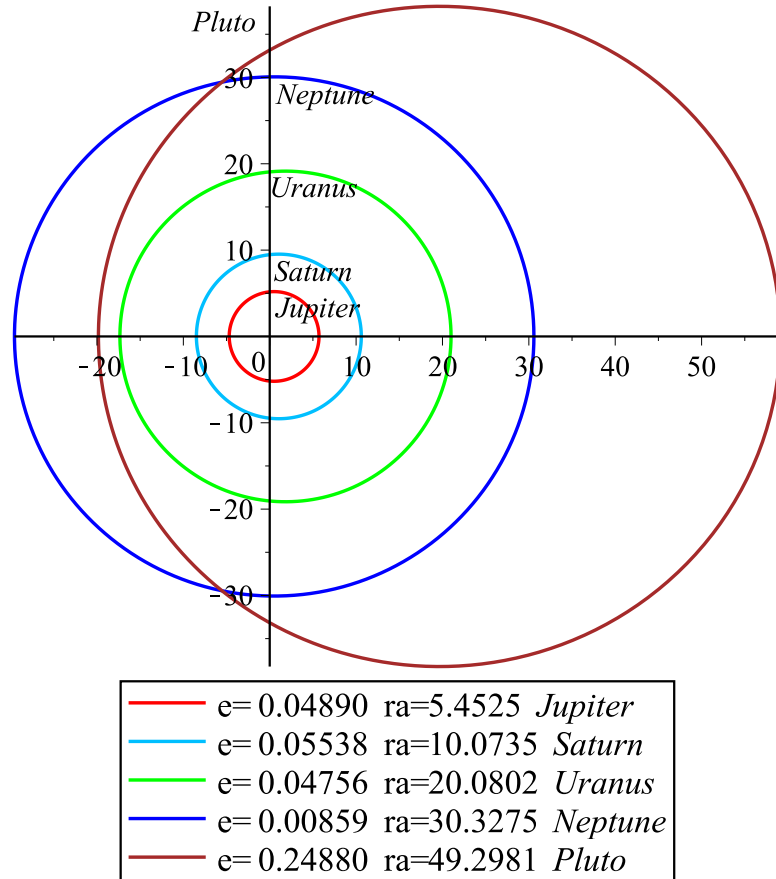


Рис. 36: Орбиты планет-гигантов и Нептуна

Задача Кеплера

Задачей Кеплера принято называть задачу о движении двух тел, взаимодействующих согласно закону всемирного тяготения Ньютона, с произвольно заданными начальными координатами и скоростями. Демонстрируем численное решение уравнения Ньютона для задачи Кеплера в декартовой системе.

Для начала запишем основные величины, которые будем использовать. Возьмём массу Солнца очень большую по сравнению с массой Земли, поэтому будем движение Земли рассматривать, как движение тела вокруг неподвижной точки притяжения.

```
restart;
G:=6.67*10(-11); гравитационная постоянная,
Ms:=1.99*10(30); масса Солнца,
Me:=5.97*10(24); масса Земли,
au:=1.5*10(11); астрономическая единица,
Fe:=G*Ms*Me/au2; сила притяжения между Солнцем и Землей.
```

```

-11
G:=6.670000000 10
30
Ms:=1.990000000 10
24
Me:=5.970000000 10
11
au:= 1.500000000 10
22
Fe:= 3.521848933 10

```

Также найдем центростремительное ускорение, период обращения вокруг Солнца и линейную скорость Земли:

```

Acc:=G*Ms/au^2;
Te:=evalf(365.26*24*60*60);
ve:=evalf(2*Pi*au)/Te;

```

```

Acc:=0.005899244444
7
Te:=3.155846400 10
ve:=29864.50152

```

Как мы видим, сила притяжения между Землей и Солнцем велика, но несмотря на это ускорение Земли в результате небольшое. Скорость движения Земли вокруг Солнца чуть меньше 30 км/ч!

До этого мы работали в системе СИ. Теперь переходим в новую систему отсчёта для того, чтобы работать дальнейшем было удобнее. Введем систему единиц, чтобы обезразмерить все величины с которыми будем работать. Для этого выбираем три основные единицы:

Как единицу длины выбираем астрономическую единицу или среднее расстояние от Земли до Солнца (*au*);

Как единицу массы выберем массу Солнца (*Ms*);

Как единицу времени период движения Земли вокруг Солнца (*год*).

```

unitLength:=au;
unitTime:=Te;
unitMass:=Ms;

```

```

11
unitLength:= 1.500000000 10
7
unitTime:=3.155846400 10
30
unitMass:=1.990000000 10

```

Соответственно, остальные производные единицы будем выражать через выбранные нами основные единицы:

```

unitVel:=unitLength/unitTime;

```

III.2. Движение небесных тел

```
unitAcc:=unitVel/unitTime;  
unitForce:=unitMass*unitAcc;
```

```
unitVel:=4753.083040  
unitAcc:=0.0001506119892  
unitForce:=2.997178585 1026
```

Поскольку длина окружности равна $2\pi R$, скорость движения вокруг Солнца будет как множители 2π . Посмотрим как выглядит ускорение Земли и сила притяжения со стороны Солнца в этих единицах:

```
(G*Ms/au^2)/unitAcc;  
(G*Ms*Me/au^2)/unitForce;
```

```
39.16849167  
0.0001175054750
```

Можем также определить постоянную всемирного тяготения:

```
unitG:=unitForce*(unitLength)^2/unitMass^2;  
G/unitG;
```

```
unitG:=1.702899375 10-12  
39.16849168
```

Возьмём точку, где скорость планеты перпендикулярна к радиус вектору (так будет когда планета находится в перигелии или афелии). Тогда модуль момента импульса можно записать в виде;

```
L0:=(Me*au*ve);
```

переводим в нашу систему;

```
L0/(unitMass*unitVel*unitLength);
```

центробежная потенциальная энергия Земли записывается как:

```
L0^2/(2*m*r^2);
```

Дифференцируя потенциальную энергию по r , можем найти центробежную силу:

```
subs(r=au,-diff(L0^2/(2*Me*r^2),r));
```

а сила притяжения равна:

```

-G*Ms*Me/au^2;
                                40
2.674366111 10
0.00001884955591
                                22
3.549716036 10
                                22
-3.521848933 10

```

Как мы видим, центробежная сила и сила притяжения Солнца над Землей не точно одинаковы по модулю; это из-за того, что орбита Земли не окружность а эллипс. Теперь все это приводим в нашу систему:

```

subs(r=au,diff(L0^2/(2*Me*r^2),r))*
(unitMass*unitLength^3/(unitMass*unitLength*unitVel)^2);
(-G*Ms*Me/au^2)*(unitLength^2/(unitMass^2*unitG));
                                -0.0001184352528
                                -0.0001175054750

```

С системой единиц измерений разобрались. Можем изучить движение Земли или другой планеты солнечной системы. Сначала записываем данные в новой системе:

```

restart;
G:=39.17:
M:=1:
m:=6*10^(24)/(1.99*10^(30)):

```

Введем потенциальную энергию и переводим её в декартову систему

```

U:=-G*M*m/r;

U:=subs(r=sqrt(x^2+y^2),U);

```

$$U := \frac{0.0001181005025}{r}$$

$$U := \frac{0.0001181005025}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

продифференцировав потенциалы, найдем проекции силы по осям x и y:

```

Fx:=-diff(U,x);
Fy:=-diff(U,y);

```

$$Fx := -\frac{0.0001181005025}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$Fy := -\frac{0.0001181005025}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Записываем проекции силы в виде функции от x и y:

III.2. Движение небесных тел

```
FX:=unapply(Fx,x,y);
FY:=unapply(Fy,x,y);
```

$$FX := (x, y) \rightarrow -\frac{0.0001181005025}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$FY := (x, y) \rightarrow -\frac{0.0001181005025}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Используя второй закон Ньютона, можем записать:

```
Eq1:=m*diff(x(t),t$2)=FX(x(t),y(t));
Eq2:=m*diff(y(t),t$2)=FY(x(t),y(t));
```

$$Eq1 := 0.000003015075377 \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t) \right) = -\frac{0.0001181005025 x(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2)^{3/2}}$$

$$Eq2 := 0.000003015075377 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) = -\frac{0.0001181005025 y(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2)^{3/2}}$$

Зададим начальные условия для Земли и решаем уравнения Ньютона с учётом начальных условий:

```
x0:=147.09/150: y0:=0:
vx0:=0: vy0:=6.28*30.29/29.86:
IC:=x(0)=x0,D(x)(0)=vx0,y(0)=y0,D(y)(0)=vy0;
sol:=dsolve({Eq1,Eq2,IC},{x(t),y(t)},numeric,output=listprocedure):
```

Мы ввели здесь данные Земли в перигелии по данным [5]. Найдём координаты Земли и проекции её скорости по осям x и y :

```
X:=subs(sol,x(t)):
Y:=subs(sol,y(t)):
VX:=subs(sol,diff(x(t),t)):
VY:=subs(sol,diff(y(t),t)):
```

Проверим работу программы:

```
[X(5),Y(5)];
[VX(5),VY(5)];
```

$$IC := x(0) = 0.9806000000, (D(x))(0) = 0, y(0) = 0, (D(y))(0) = 6.370435365 \\ [0.979688608663986, 0.0424888904957123] \\ [-0.271690713626179, 6.36456322236963]$$

Теперь можем получить графики координат, скорости от времени и даже траекторию движения:

```
plot(['X(t)', 'Y(t)'], t=0..3, title="Координаты объекта", legend=[x(t), y(t)],
style=point, color=[blue, red], thickness=3);
plot(['VX(t)', 'VY(t)'], t=0..3, title="Проекция скорости", legend=[Vx(t), Vy(t)],
color=[blue, red], thickness=3);
plot(['X(t)', 'Y(t)'], t=0..3, title="Траектория движения объекта", color=red,
thickness=3, scaling=constrained);
```

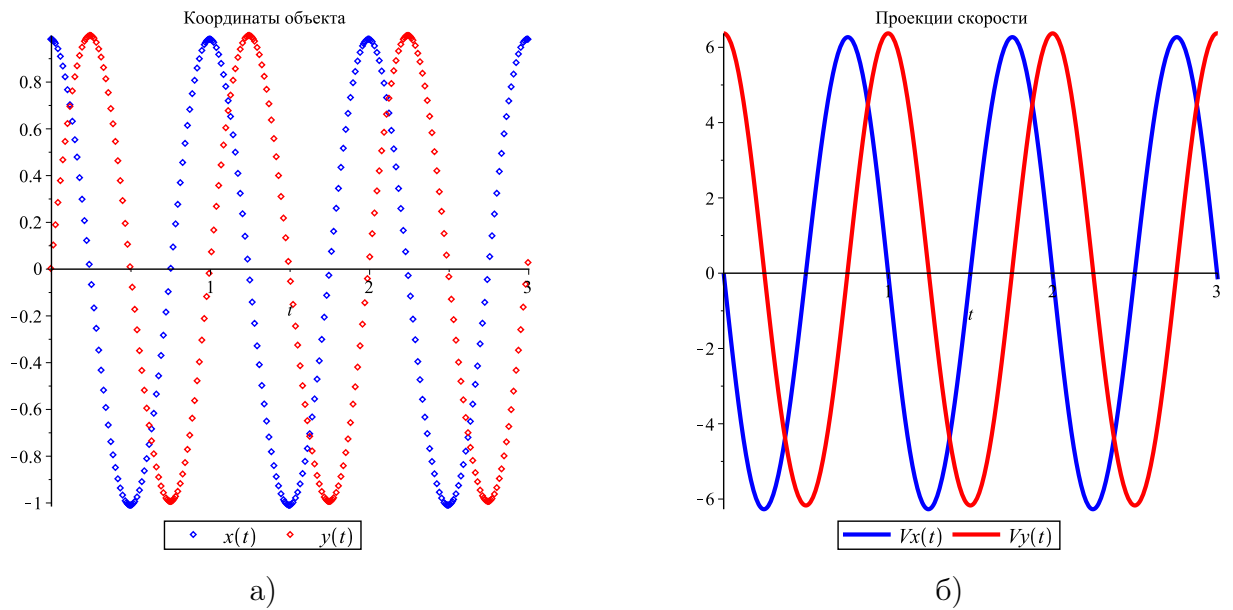


Рис. 37: Координаты центра Земли и проекции её скорости

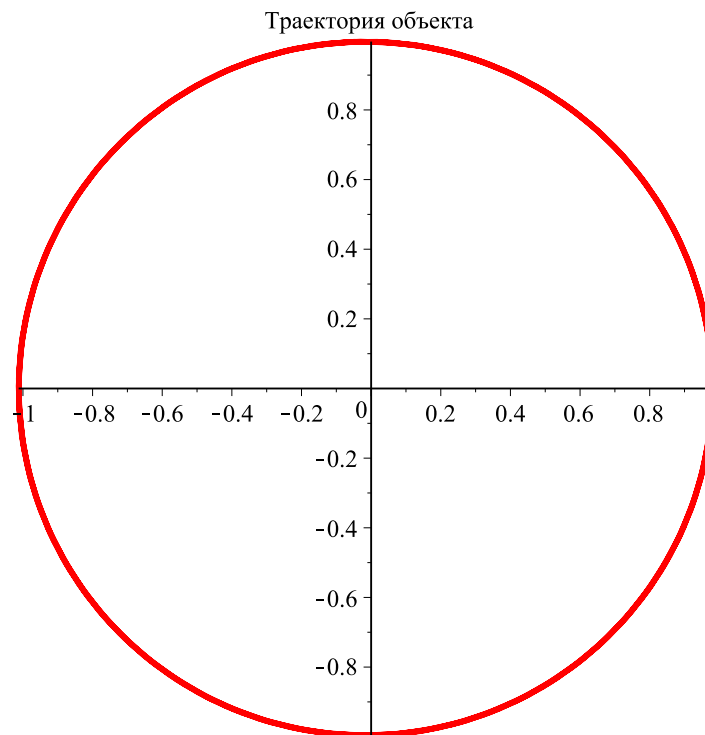


Рис. 38: Траектория движения Земли вокруг Солнца

Теперь создадим процедуру, чтобы продемонстрировать второй закон Кеплера: Радиус-вектор планеты за одинаковые промежутки времени описывает равные площади,

```
N:=288; T:=1;
Lr:= [seq([X(T/N*i),Y(T/N*i)],i=0..N)]:
with(plots):
TRAJ:=plot(Lr,style=point):
```

```

for i from 0 to N do:
with(geometry):
tr[i]:=plots[polygonplot]([[0,0],[X(T/N*i), Y(T/N*i)],
[X(T/N*(i+1)), Y(T/N*(i+1))]],scaling=CONSTRAINED):
TT[i]:=evalf(T/N*i,4):
VV[i]:=evalf(sqrt(VX(T/N*i)^2 +VY(T/N*i)^2),4):
RR[i]:=evalf(sqrt(X(T/N*i)^2 +Y(T/N*i)^2),4):
ARR[i]:=evalf(area(tr[i])+area(tr[i+1])+area(tr[i+2]))):
od:

for k from 0 to N do:
CCC[k]:=triangle(ABC, [point(A, 0, 0), point(B, X(T/N*k), Y(T/N*k)),
point(C, X(T/N*(k+1)), Y(T/N*(k+1)))]):
DDD[k]:=area(CCC[k]):
od:

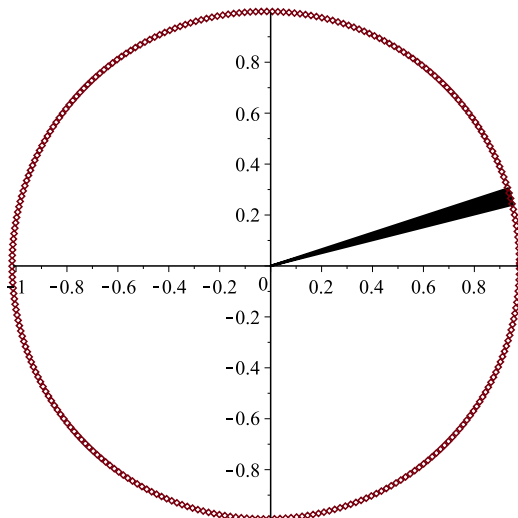
for mm from 0 to N do:
Arr[mm]:=evalf((DDD[mm]+DDD[mm+1]+DDD[mm+2]),6);
od:

display(seq(display(TRAJ,tr[i],tr[i+1],tr[i+2],
title=[typeset("t= ", TT[i],
" " "V=",VV[i]," " "r= ", RR[i]," " "S=",Arr[i]),
font = [TIMES, BOLD, 16]]),
i=0..N-2),insequence=true,scaling=constrained,
view=[-1.2..1.2,-1.2..1.2]);

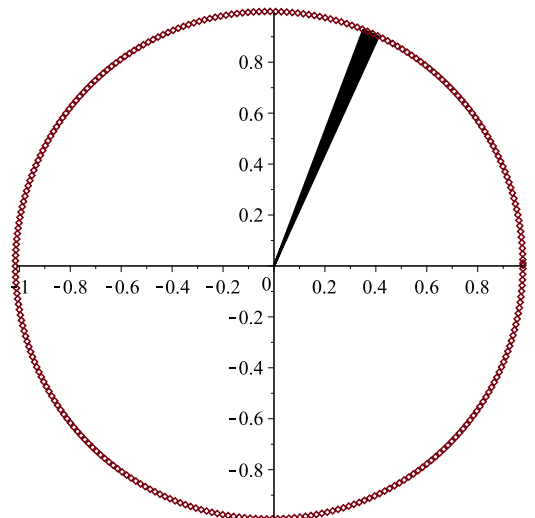
```

t= 0.03819 V=6.368 r= 0.9810 S=0.0325329

t= 0.1771 V=6.312 r= 0.9897 S=0.0325329



a)



б)

Рис. 39: Площадь которую описывает радиус-вектор Земли за одинаковые промежутки времени (3/288 года)

Получили анимацию движения Земли вокруг Солнца. Здесь t - время движения, V - скорость центра Земли, r - расстояние Земли до центра Солнца и наконец S - площадь в квадратных а.е, которую описывает радиус-вектор планеты за каждые $\frac{3}{288}$ года. Как видно из анимации, площадь остаётся почти неизменной. Небольшая разница между площадями возникает когда планета находится в перигелии и в апогее. Мы рассчитываем площадь треугольника вершинами которого являются начало координат положения планеты при $t(i)$ и $t(i+1)$.

С помощью нашей программы можем изучить движение любой планеты солнечной системы. Рассмотрим движение Меркурий. Поменяем начальные условия, область просмотра графиков (для наглядности) и время анимации;

```
x0:=46.00/150: y0:=0:
vx0:=0: vy0:=6.28*58.98/29.86

plot(['X(t)', 'Y(t)'], t=0..0.4, title="Координаты Планеты",
  legend=[x(t), y(t)],
  style=point, color=[blue, red], thickness=3);
plot(['VX(t)', 'VY(t)'], t=0..0.4, title="Проекция скорости планеты",
  legend=[Vx(t), Vy(t)],
  color=[blue, red], thickness=3);
plot(['X(t)', 'Y(t)', t=0..0.4], title="Траектория движения планеты",
  color=red, thickness=3, scaling=constrained);

N:=576; T:=0.241;
```

В начальных условиях мы использовали данные Меркурий в перигелии [6]. Получили следующие результаты:

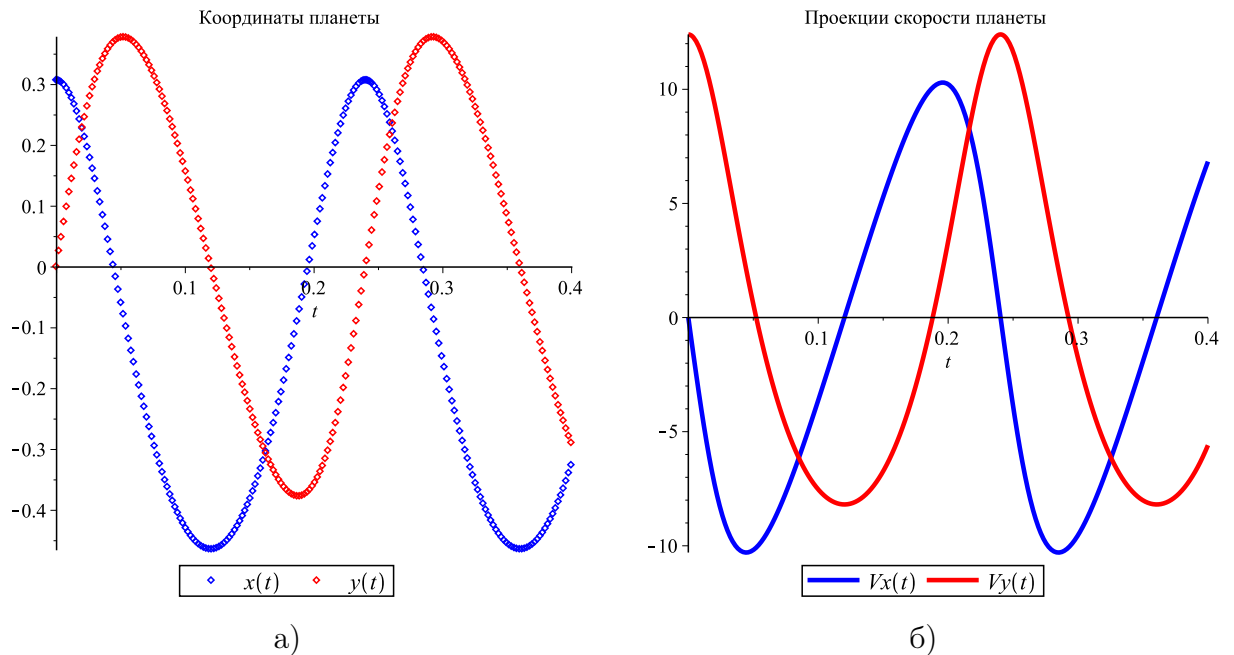


Рис. 40: Координаты центра Меркурия и проекции его скорости

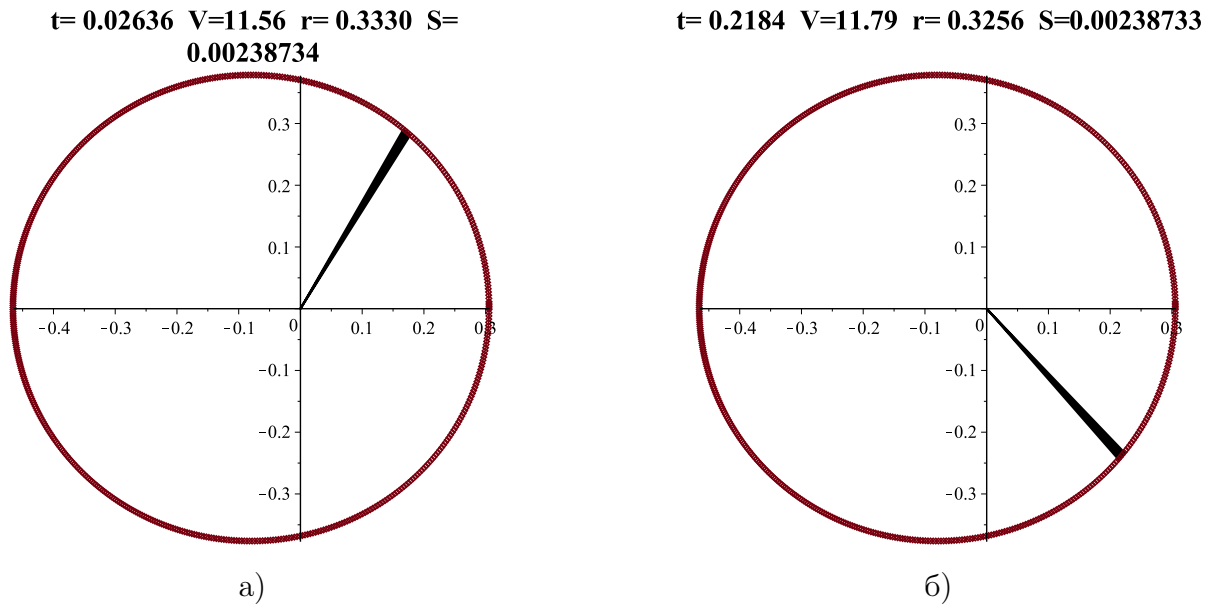


Рис. 41: Площадь которую описывает радиус-вектор Меркурия за одинаковые промежутки времени (3/576 года)

III.3 Движение искусственных спутников Земли

В главе II.2 рассматривали зависимость траектории движения искусственных спутников Земли от начальной скорости и от начальной высоты. В этом параграфе изучим эти зависимости. Создадим процедуру, которая будет определять траекторию спутника по заданным параметрам запуска.

```
restart; with(plots):
G:=6.67*10^(-11):
Me:=6*10^24:
R:=6.378*10^6:
h0:=600*10^3:
v1:=sqrt(G*Me/(R+h0));
v2:=sqrt(2*G*Me/(R+h0));
```

```
h0:= 600000 v1:=7573.088980 v2:=10709.96514
```

Здесь $v1$ и $v2$ первая и вторая космические скорости относительно поверхности Земли, $vh0$ круговая скорость на высоте $h0$. Мы будем запускать спутник с высоты

$$h0 = 600 \text{ км}$$

параллельно поверхности Земли. Переходим к процедуре:

```
Satellite:= proc(yy,vxx,vyy) local ax,ay,Inic, N,eq,i,T,eqT,X,Y,p1,p2;
ax := diff(x(t), t, t) = -G*Me*x(t)/(x(t)^2 + y(t)^2)^(3/2):
ay := diff(y(t), t, t) = -G*Me*y(t)/(x(t)^2 + y(t)^2)^(3/2):
Inic := x(0) = R+h0, D(x)(0)=vxx, y(0)=yy, D(y)(0)=vyy:
Digits := 30:
eq := dsolve({ax, ay, Inic}, {x(t),y(t)}, numeric):
N:=700:
```

```

for i from 0 to N do;
  T := i*40;
  eqT := eq(T):
  X[i] := subs(eqT,x(t));
  Y[i] := subs(eqT,y(t));
od:
p1 := polarplot(6.378*10^6, phi = 0..2*Pi,color="LightSkyBlue",transparency=0.75,
p2 := plot([seq([X[i], Y[i]], i = 0..N)], thickness=2,color=red);
display({p1, p2}, labels = ['x', 'y']);
end proc:

```

Сначала дадим круговую скорость, а потом несколько меньшую и посмотрим, как меняется траектория спутника:

```

Satellite(0,0,v1);
Satellite(0,0,7000);

```

Получили: Как видно из рисунков, в случае (а) траектория является окружности. В слу-

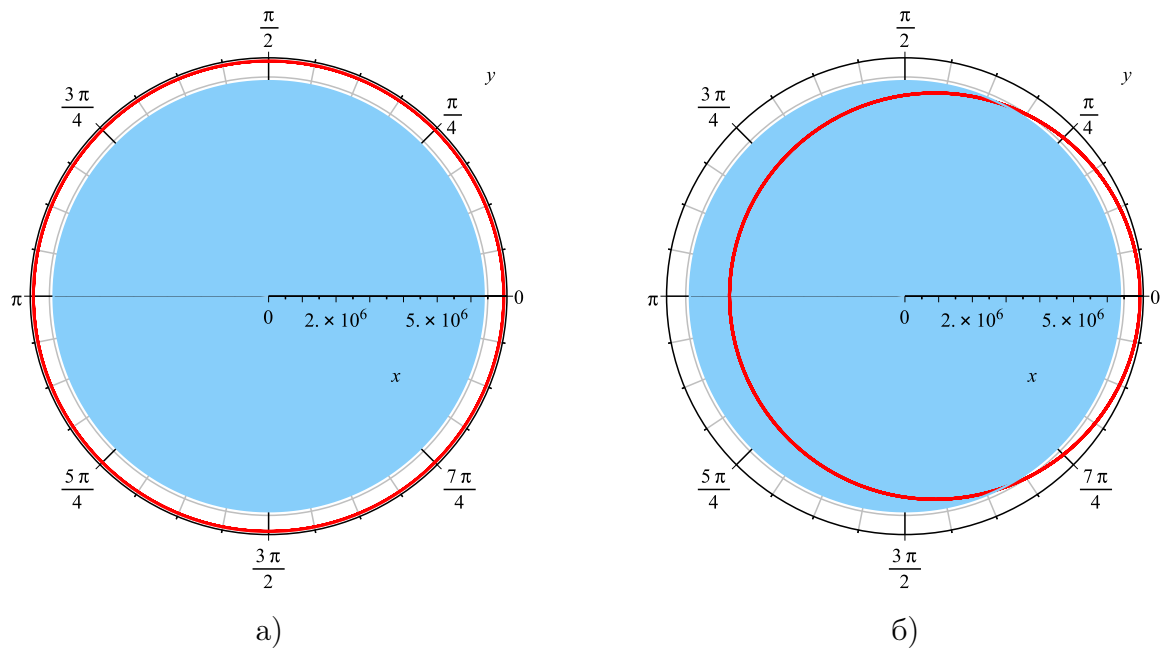


Рис. 42: Траектории спутника при начальной высоте 600 км и с начальной скорости равной круговой (а) и с начальной скорости меньшей круговой (б)

чае (б) траектория спутника пересекается с Землей, т.е. спутник упадёт на поверхность Земли. Наконец, зададим скорость большую чем круговая, но меньшую чем параболическая, а также - скорость, равную параболической.

```

Satellite(0,0,9000);
Satellite(0,0,v2);

```

Результаты полностью совпадают с теорией, описанной в главе [II.2](#).

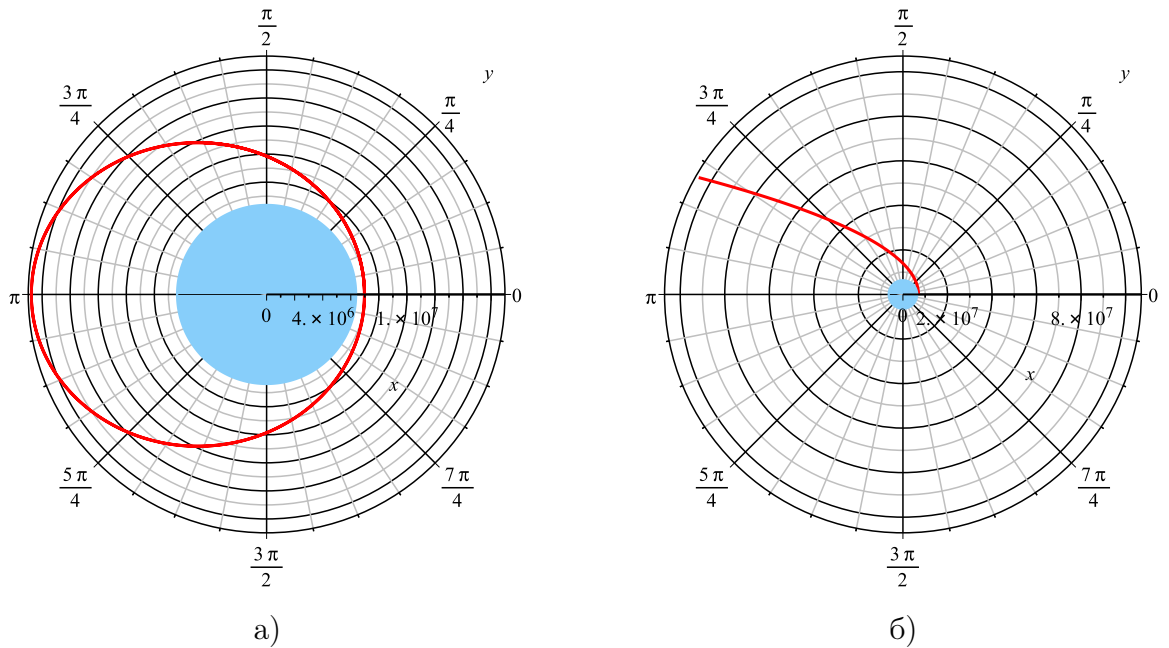


Рис. 43: Траектории спутника с начальной высотой 600 км и с начальной скоростью большей чем круговой, но меньше чем параболической (а) и с начальной скорости равной параболической (б)

III.3.1 Переход объекта с одной орбиты в другую

В начале XX века, когда принципиальная выполнимость космических полетов была научно обоснована, появились первые соображения об их возможных траекториях. В 1925 году немецкий инженер Вальтер Гоман (Walter Hohmann) показал, что минимальные затраты энергии на перелет между двумя круговыми орбитами обеспечиваются, когда траектория представляет собой «половинку» эллипса, касающегося исходной и конечной орбит. При этом двигатель космического аппарата должен выдать всего два импульса: в перигее и апогее (если речь идет об околоземном пространстве) переходного эллипса. Данная схема широко используется, например, при выведении на геостационарную орбиту. В межпланетных полетах задача несколько осложняется необходимостью учитывать притяжение Земли и планеты назначения соответственно на начальном и конечном участках траектории. Тем не менее, полеты к Венере и Марсу выполняются по орбитам, близким к гомановским. Отправляем планетарный зонд с орбиты Земли с радиусом *150 миллион км* на орбиту Марса с радиусом *232 миллион км*. Для начала посмотрим, как выглядят эти орбиты. (Для простоты мы берем орбиты как окружности)

```
restart: with(plots):
Earth:=plot([150*(10^9)*cos(theta), 150*(10^9)*sin(theta),
theta=0..2*Pi],scaling=constrained,color=[blue],
legend = [typeset("Орбита Земли ")]):
Mars:=plot([232*(10^9)*cos(theta), 232*(10^9)*sin(theta),
theta=0..2*Pi],scaling=constrained,color=[red],
legend = [typeset("Орбита Марса")]):
display(Earth,Mars);
```

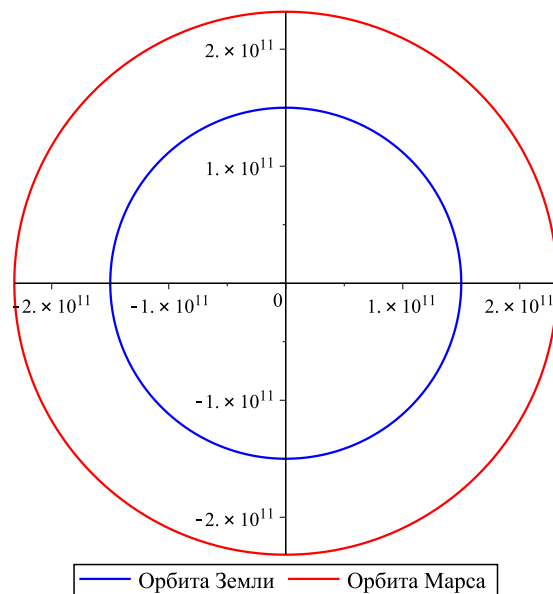


Рис. 44: Орбиты движения Земли и Марса вокруг Солнца

Для начала посмотрим, как будет двигаться наш зонд, если мы дадим ему достаточную начальную скорость, чтобы он мог выйти на орбиту Марса. В таком случае зонд будет двигаться по эллипсу; перигейном расстоянием будет радиус орбиты Земли, а афелийном расстоянием - радиус орбиты Марса.

```
rp := 150*(10^9):
ra := 232*(10^9):
r := A/(1+epsilon*cos(theta*t/50)):
epsilon := (1-rp/ra)/(1+rp/ra):
A := rp*(1+epsilon):
PPP:=animate([r*cos(theta*t/50), r*sin(theta*t/50), theta=0..2*Pi],
t=0..100, frames=200, scaling=constrained,color=black):
display(Earth,Mars,PPP);
```

Чтобы получить такое движение зонда мы должны увеличить его скорость импульсивно, т.е. за короткое расстояние. Найдем насколько: Начальную скорость зонда (на орбите Земли) легко можем найти из уравнении $G \frac{M \cdot m}{R^2} = m \frac{v_i^2}{R}$, где M -масса солнца, R -радиус орбиты Земли. Она будет:

```
vi := sqrt(G*M/R);
```

полная механическая энергия E зонда на орбите Земли равна

```
E := m*v^2/2 + (-GMm/R);
```

В зависимости от формы орбиты E может иметь значения

```
Ec := -G*M*m/(2*R); #для круговых орбит радиусом R,
```

```
Ee := -G*M*m/(2*a); #для эллиптических орбит большей полуоси a
```

Если увеличение скорости происходит очень быстро (пока его положение не сильно изменилось), то потенциальная энергия остаётся неизменной. Тогда изменение полной энергии и будет равняться изменению кинетической энергии зонда:

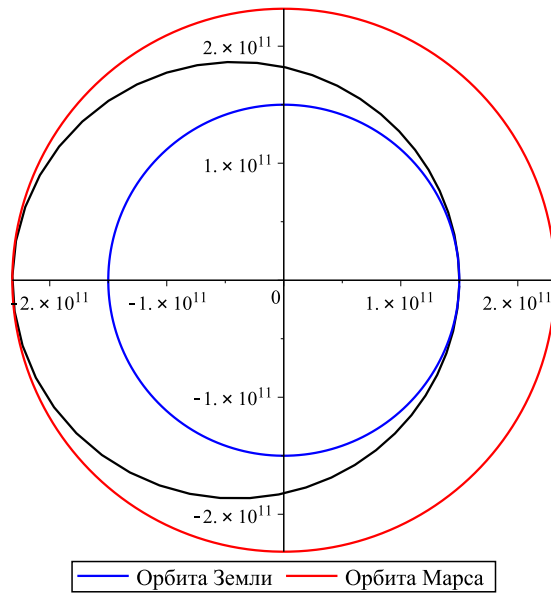


Рис. 45: Выход с орбиты Земли на орбиту Марса

$KE_{change} := E_e - E_c;$

И, наконец, найдем конечную кинетическую энергию зонда (сразу после запуска)

$KE_{final} := m \cdot (v_i^2)/2 + KE_{change};$

$$v_i := \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

$$E := \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{R}$$

$$E_c := -\frac{1}{2} \frac{GMm}{R}$$

$$E_e := -\frac{1}{2} \frac{GMm}{a}$$

$$KE_{change} := -\frac{1}{2} \frac{GMm}{a} + \frac{1}{2} \frac{GMm}{R}$$

Теперь введем нужные постоянные, найдем конечную скорость и увеличение скорости после первого импульса.

```
G := 6.673*10^(-11); M := 1.99*10^(30);
m := 6000; R := 150*10^9;
a := (150*(10^9) + 232*(10^9))/2;
vfinal := sqrt(2*KEfinal/m);
Delta[v1] := vfinal - vi;
```

$$G := 6.673000000 \cdot 10^{-11}$$

$$M := 1.990000000 \cdot 10^{30}$$

$$m := 6000$$

$$R := 150000000000$$

$$a := 191000000000$$

$$v_{final} := 32792.06604$$

$$\Delta_{v1} := 3038.33238$$

Если мы дальше не будем вмешиваться, то зонд будет двигаться по эллипсу, перигелий которого находится на орбите Земли, а афелий - на орбите Марса. Если мы хотим чтобы он остался на орбите Марса, мы должны ещё раз увеличить его скорость. Найдем этого увеличение:

```
KE[f] := KEfinal + (-G*M*m/R) - (-G*M*m/(ra)); #кинетическа энергия зонда
при достижении орбиту Марса,
v[f] := sqrt(2*KE[f]/m); #скорость зонда при достижении орбиту Марса,
vf := sqrt(G*M/ra); #круговая скорость в данной орбите,
Delta[v2] := vf - v[f];
```

Получили следующие результаты:

$$KE_{final} := 3.225958786 \cdot 10^{12}$$

$$v_f := 21201.76685$$

$$vf := 23924.51311$$

$$\Delta_{v2} := 2722.74626$$

Полученные результаты хорошо совпадают с цифрами в работе [10].

Заключение

В настоящей диссертационной работе были решены следующие задачи:

Изучены основные возможности пакета Maple для компьютерного моделирования

Изучены законы движения небесных тел

Создана программа построения кривых второго порядка в пакете Maple

Построена геометрическая модель Солнечной системы с использованием известных астрономических данных

Разработаны компьютерные модели движения небесных тел, иллюстрирующие различные законы Кеплера

Составлена программа для моделирования движения искусственных спутников Земли

Подводя итог, следует сказать, что все задачи, поставленные в диссертационной работе, были выполнены полностью.

Литература

- [1] А.С.Бортаковский, А.В.Пантелеев. Аналитическая геометрия в примерах и задачах. — Москва: «Высшая школа». — 2005. — 496 с.
- [2] Д.В.Сивухин. Общий курс физики, Том.І. Механика. — Москва: «МФТИ». — 2005. — 496 с.
- [3] Э.В.Кононович, В.И.Мороз. Общий курс астрономии. — Москва: «Едиториал УРСС», 2004. — 544 с.
- [4] <http://www.astronom2000.info/астрономия/солнечная-система>
- [5] <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html>
- [6] <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/mercuryfact.html>
- [7] <http://www.yorku.ca/marko/ComPhys/>
- [8] <http://mathhelpplanet.com/static.php?p=parabola>
- [9] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — Издание 4-е, исправленное. — М.: «Наука», 1988. — 215 с. — («Теоретическая физика», том I).
- [10] Dr Ronald Ramp. Human Missions to Mars. — Chichester, UK.: «Praxis Publishing Ltd». 2008. -554 с.
- [11] А.П. Клищенко, В.И. Шупляк. Астрономия —М.: «Новое Знание». 2004. -224 с.
- [12] Игнатъев Ю.Г. ХДифференциальная геометрия кривых и поверхностей в евклидовом пространстве. Курс лекций. IV семестр. Компьютерная версия.Ъ Казань: 2002.
- [13] Игнатъев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Казань. «Казанский Университет», 2014. -298 с.
- [14] Frank Y. Wang. Physics with Maple. «WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA». — 2005. — 605 с.
- [15] Матросов А. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. — Санкт-Петербург: «ВНУ-Санкт-Петербург», 2001. -528 с.



¹© Оформление: *LaTeX* - стиль $\mathcal{B}\mathcal{L}\mathcal{I}\mathcal{O}$ профессора Ю.Г. Игнатьева

Заключительный лист

Подпись автора работы _____

Дата _____

Квалификационная работа допущена к защите

Назначен рецензент

Заведующий кафедрой _____

Дата _____

Защищена в ГАК с оценкой
" _____ "

Дата _____

Секретарь ГАК _____