ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 7 (506)

УДК 517.544

Ю.В. ОБНОСОВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ $\mathbb{R}$-ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ЛИНИИ РАЗДЕЛЕНИЯ РАЗНОРОДНЫХ ФАЗ

1. Постановка задачи

В работе рассматривается одна из общепринятых в теории гетерогенных сред моделей. Эта классическая модель может быть описана следующим образом. Требуется построить плоскопараллельное стационарное силовое поле $\mathbf{v}(x,y) = (v_x, v_y) = \mathbf{v}_p(x,y)$, $(x,y) \in S_p$, $p = 1,2$, являющееся потенциальным и соленоидальным в каждой изотропной фазе S_p рассматриваемой двухфазной среды:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_p(x,y) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v}_p(x,y) = 0. \tag{1}$$

Всюду на кусочно-гладкой границе контакта ($\mathcal{L} = \partial S_1 \cap \partial S_2 \setminus T$) разнородных фаз S_1 и S_2, за исключением угловых точек T, предполагаются равными нормальные (касательные) составляющие предельных значений векторов $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ($\widehat{\rho}_1\mathbf{v}_1$, $\widehat{\rho}_2\mathbf{v}_2$):

$$[\mathbf{v}_1(x,y)]_n = [\mathbf{v}_2 q(x,y)]_n, \quad [\widehat{\rho}_1\mathbf{v}_1(x,y)]_\tau = [\widehat{\rho}_2\mathbf{v}_2(x,y)]_\tau, \quad (x,y) \in \mathcal{L}. \tag{2}$$

В точках множества T у компонентов вектора $\mathbf{v}$ допускаются интегрируемые особенности. Во втором условии рефракции (2) $\widehat{\rho}_p$ — постоянный в фазе S_p коэффициент, характеризующий физические свойства среды. При реализации конкретных физических моделей этот коэффициент, как правило, принимает скалярные вещественные неотрицательные значения. Однако в ряде случаев, например, в задачах электродинамики при расчете электрических полей с учетом влияния однородного электромагнитного поля (ортогонального плоскости течения тока) приходится рассматривать случаи, когда коэффициент $\widehat{\rho}_p$ является тензором:

$$\widehat{\rho}_p = \rho_p \begin{pmatrix} 1 & \beta_p \\ -\beta_p & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $\rho_p \geq 0$ — коэффициент сопротивления, а $\beta_p \in \mathbb{R}$ — параметр Холла материала фазы S_p, $p = 1,2$.

В дальнейшем физическая плоскость (x,y) будет интерпретироваться как плоскость комплексного переменного $z = x + \mathrm{i}\,y$, а вектор $\mathbf{v}$ как комплекснозначная функция $\mathbf{v}(z) = v_x + \mathrm{i}\,v_y$ комплексного аргумента $z = x + \mathrm{i}\,y$. Тензор (3) в этом случае можно отождествить с комплексным числом

$$\widehat{\rho}_p = \rho_p(1 - \mathrm{i}\,\beta_p). \tag{4}$$

В силу условий (1) комплексно-сопряженная с $\mathbf{v}(z)$ функция $v(z) = v_p(z) = v_{px}(x,y) - iv_{py}(x,y)$ голоморфна в каждом из компонентов S_p. В замыкании $\overline{S}_p$ функция $v(z)$ непрерывна всюду, за исключением разве лишь угловых точек T, где у нее допускается наличие интегрируемых

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и фонда НИОКР АНТ (проекты 03-01-96193 и 05-5.1-265/2004 Ф(5)).

особенностей. Наконец, граничные условия (2) могут быть записаны в следующей эквивалентной форме:

$$v_1(t) = Av_2(t) - B[t'(s)]^{-2}\overline{v_2(t)}, \quad t \in \mathcal{L}, \tag{5}$$

где $A = A_{12}$, $B = B_{12}$ и $t(s)$ — функция точки контура $\mathcal{L}$ от натурального параметра s, производная $t'(s) = \exp(\mathrm{i}\,\alpha(s))$ совпадает с единичным вектором касательной к $\mathcal{L}$ в точке $t = t(s)$ ($\alpha(s)$ — угол, который образует касательная к дуге $\mathcal{L}$ в точке t с вещественной осью),

$$A_{pq} = \frac{\rho_p + \rho_q}{2\rho_p} - \mathrm{i}\,\frac{\rho_p\beta_p - \rho_q\beta_q}{2\rho_p}, \quad B_{pq} = \frac{\rho_p - \rho_q}{2\rho_p} - \mathrm{i}\,\frac{\rho_p\beta_p - \rho_q\beta_q}{2\rho_p}, \tag{6}$$

в частности,

$$A_{pq} = \frac{\rho_p + \rho_q}{2\rho_p}, \quad B_{pq} = \frac{\rho_p - \rho_q}{2\rho_p}, \tag{7}$$

если сопротивление (4) вещественно ($\widehat{\rho}_p = \rho_p \geq 0$).

В данной работе рассмотрим задачу (5) как с вещественными (7), так и с комплексными коэффициентами (6) для двухфазной среды в предположении, что линия раздела фаз состоит из одной компоненты $\mathcal{L}$ — правой ветви гиперболы, определенной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{8}$$

где $a > 0$, $b > 0$ — заданные параметры. Предположим, что S_2 — внутренность, а S_1 — внешность выбранной ветви гиперболы (рис. 1).

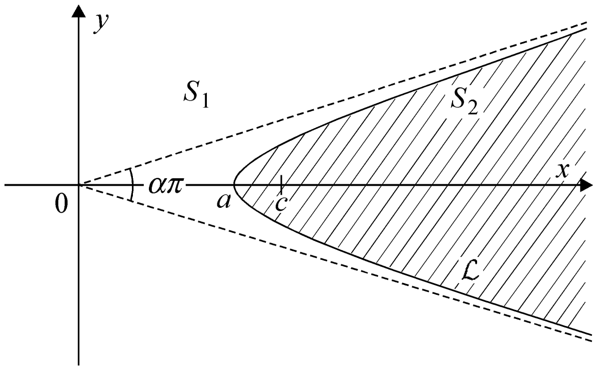

Рис. 1. Гиперболическое включение

Будем отыскивать решение задачи (5) в классе функций, для которых в окрестности бесконечности (угловая точка контура!) справедлива оценка

$$|v(z)| = \mathrm{o}(|z|) \quad \text{при} \quad |z| \gg 1. \tag{9}$$

Таким образом, рассматриваемая плоская двухфазная среда, представляет из себя частный случай бесконечной однородной матрицы S_1 с инородным включением S_2, ограниченным одной из кривых второго порядка. Решение соответствующей краевой задачи в случае одного эллиптического (в частности, кругового) включения хорошо известно [1]–[3]. Особо отметим работу [4], в которой наряду с эллиптическим рассматривались случаи параболического и гиперболического включений, причем в довольно общей ситуации — при произвольно заданной главной части искомого комплексного потенциала. Во всех трех случаях в [4] применялась единая схема исследования — переходом к дублю исходная задача переносилась на соответствующую двухлистную риманову поверхность. Последующее конформное отображение полученной римановой поверхности на плоскость z_1 позволило авторам свести исходную задачу к задачам для полосы (парабола), для концентрического кольца (эллипс), для системы периодических полос (гипербола). Затем с использованием известных решений последних задач ([5]) решения исходных проблем выписывались в виде бесконечных рядов.

Отметим также работы [6], [7], где предложенный в ([8], с. 360) для единичной окружности метод симметрии распространен на случай произвольной алгебраической кривой $\mathcal{L}$. Следует сказать, что непосредственное применение метода симметрии позволяет свести задачу (5) к некоторой эквивалентной многомерной задаче Римана. Естественно возникает вопрос о факторизации ее матричного коэффициента. Последняя проблема, как известно, очень сложна и в общем случае в квадратурах не решается.

Ниже решение задачи о гиперболическом включении, а также тесно примыкающей к ней задачи о *клине* (случай, когда кривая второго порядка распадается на пару пересекающихся прямых), будет получено в замкнутой форме и выражено через элементарные функции. В идейном плане эта работа тесно примыкает к работе [9], где получено решение задачи о параболическом включении, а задача о клине обобщает соответствующий результат работы [10].

Приведем сначала простое, но чрезвычайно полезное при исследовании произвольных двухфазных структур общее утверждение.

Теорема 1 (теорема о двухфазных структурах). *Если*

$$v(z) = \begin{cases} v_1(z; A, B), & z \in S_1; \\ v_2(z; A, B), & z \in S_2, \end{cases}$$

— решение двухфазной задачи (5) *с произвольными вещественными коэффициентами* A, B *вместо* A_{12}, B_{12}, *удовлетворяющими лишь условию эллиптичности* $|A| > |B|$, *то решением задачи* (5) *с произвольными комплексными коэффициентами* A, B *при сохранении условия* $|A| > |B|$ *будет*

$$v(z) = v\left(z; |A|, |B|\right) \times \begin{cases} \sqrt{AB}, & z \in S_1; \\ \sqrt{\overline{A}B}, & z \in S_2. \end{cases} \tag{10}$$

Утверждение теоремы вытекает из того факта, что замена

$$v(z) = \begin{cases} \sqrt{AB}V_1(z), & z \in S_1; \\ \sqrt{\overline{A}B}V_2(z), & z \in S_2, \end{cases} \tag{11}$$

приводит к задаче (5) с вещественными коэффициентами $|A|$, $|B|$ относительно новой неизвестной кусочно-голоморфной функции $V(z) = \{V_1(z),\ z \in S_1;\ V_2(z),\ z \in S_2\}$.

Подчеркнем, что в конкретных прикладных вопросах решение задачи (5) представляет интерес лишь в случае, когда ее коэффициенты имеют вид (6), в частности, (7). Однако для того чтобы иметь возможность применять доказанное утверждение, необходимо знать ее решение с произвольными вещественными коэффициентами в эллиптическом случае. Именно поэтому в дальнейшем решение задачи (5) будет сначала получено в предположении, что ее вещественные коэффициенты удовлетворяют лишь одному ограничению $|A| \geq |B|$.

2. Общее решение задачи о гиперболическом включении в вещественном случае

Прежде всего отметим, что ввиду симметричности гиперболы $\mathcal{L}$ относительно вещественной оси решением задачи (5) с вещественными коэффициентами A, B вместе с функцией $v(z)$ будет и функция $\overline{v(\overline{z})}$, а значит, справедливо представление

$$v(z) = v_R(z) + v_I(z), \tag{12}$$

где $v_R(z) = (v(z) + \overline{v(\overline{z})})/2$ и $v_I(z) = (v(z) - \overline{v(\overline{z})})/2$ — частные решения той же задачи, удовлетворяющие условиям

$$\overline{v_R(\overline{z})} \equiv v_R(z) \quad \text{и} \quad \overline{v_I(\overline{z})} \equiv -v_I(z) \tag{13}$$

соответственно.

В силу (13) при построении частных решений $v_R(z)$, $v_I(z)$ достаточно рассмотреть лишь верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}^+$. Найдем для части $\mathcal{L}^+ \in \mathbb{C}^+$ выбранной ветви гиперболы зависимость функции $t'(s)$ от t. Запишем параметрическое уравнение $\mathcal{L}^+$ в виде $t = a\,\mathrm{ch}\,\varphi + \mathrm{i}\,b\,\mathrm{sh}\,\varphi$, $0 < \varphi < \infty$. Отсюда $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{a\,\mathrm{sh}\,\varphi + \mathrm{i}\,b\,\mathrm{ch}\,\varphi}{\sqrt{a^2\,\mathrm{sh}^2\,\varphi + b^2\,\mathrm{ch}^2\,\varphi}}$. Положим $a + \mathrm{i}\,b = c\exp(\mathrm{i}\,\pi\alpha/2)$. Предыдущее равенство тогда перепишется в виде

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{e}^{\varphi+\mathrm{i}\,\pi\alpha/2} - \mathrm{e}^{-\varphi-\mathrm{i}\,\pi\alpha/2}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2\varphi} + \mathrm{e}^{-2\varphi} - 2\cos\pi\alpha}},$$

а из уравнения гиперболы найдем

$$\mathrm{e}^{\varphi+\mathrm{i}\,\pi\alpha/2} = \frac{1}{c}(t + \sqrt{t^2 - c^2}), \quad \mathrm{e}^{-(\varphi+\mathrm{i}\,\pi\alpha/2)} = \frac{1}{c}(t - \sqrt{t^2 - c^2}).$$

В первом из этих двух соотношений под функцией аргумента t понимается предельное значение на $\mathcal{L}^+$ фиксированной в верхней полуплоскости условием $\zeta(\infty) = \infty$ ветви функции

$$\zeta(z) = \frac{1}{c}(z + \sqrt{z^2 - c^2}), \tag{14}$$

обратной к

$$z(\zeta) = \frac{c}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right). \tag{15}$$

С помощью последних выкладок получим

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \sqrt{t^2 - c^2}\big((t^2 - c^2)\cos\pi\alpha - \mathrm{i}\,t\sin\pi\alpha\sqrt{t^2 - c^2}\big)^{-1/2} = (t^2 - c^2)^{1/4}\big(\cos\pi\alpha\sqrt{t^2 - c^2} - \mathrm{i}\,t\sin\pi\alpha\big)^{-1/2}.$$

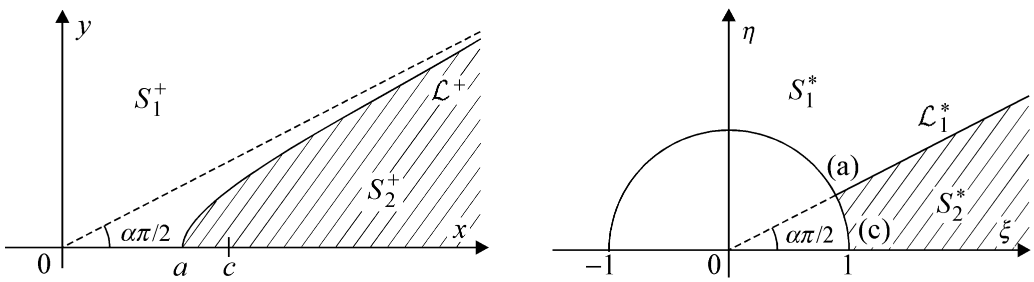

Рис. 2. Верхняя полуплоскость z и ее образ в плоскости ζ
при отображении с помощью функции (14)

Функция (14) конформно отображает (рис. 2) полуплоскость $\mathbb{C}^+$ на область S^* — верхнюю полуплоскость с выброшенным единичным полукругом. Луч $\mathcal{L}_1^* = \{\zeta : \arg\zeta = \pi\alpha/2,\ |\zeta| > 1\}$ — образ $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cap \mathbb{C}^+$ — разделяет S^* на области S_1^* и S_2^*, прообразами которых являются S_1^+ и S_2^+ — верхние половины областей S_1 и S_2 соответственно. Для функции $[t'(s)]^{-2}$ в плоскости ζ с учетом равенств

$$\sqrt{t^2 - c^2} = \frac{c}{2}(\tau - 1/\tau), \quad t = \frac{c}{2}(\tau + 1/\tau)$$

справедливо представление

$$\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^{-2} = \frac{(\tau - 1/\tau)\cos\pi\alpha - \mathrm{i}\,(\tau + 1/\tau)\sin\pi\alpha}{\tau - 1/\tau} = \frac{\overline{\tau - 1/\tau}}{\tau - 1/\tau}, \quad \tau \in \mathcal{L}_1^*.$$

На основании полученного соотношения и того, что выражение $\zeta - 1/\zeta$ вещественно на действительной оси и чисто мнимо на единичной окружности, относительно функции

$$V(\zeta) = (\zeta - 1/\zeta)\, v_R\Big(\frac{c}{2}(\zeta + 1/\zeta)\Big) \tag{16}$$

придем к краевой задаче

$$\begin{gathered} V_1(\tau) = AV_2(\tau) - B\overline{V_2(\tau)}, \quad \tau \in \mathcal{L}_1^*; \\ \operatorname{Im} V(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]; \\ \operatorname{Re} V(\tau) = 0, \quad |\tau| = 1, \ \ \operatorname{Im} \tau > 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Из (9) и определения (16) следует, что решение задачи (17) необходимо искать в классе функций, удовлетворяющих условиям

$$|V(\zeta)| = o(|\zeta|^2), \quad |\zeta| \gg 1; \quad V(\pm 1) = 0. \tag{18}$$

Продолжим функцию $V(\zeta)$ по симметрии из S^* в полуплоскость $\mathbb{C}^+$ на основании последнего условия (17). Для продолженной кусочно-голоморфной функции, претерпевающей разрыв первого рода на луче $\mathcal{L}^* = \{\zeta : \arg\zeta = \pi\alpha/2,\, |\zeta| > 0\}$, сохраним старое обозначение $V(\zeta) = \{V_2(\zeta),\ 0 < \arg\zeta < \pi\alpha/2;\ V_1(\zeta),\ \pi\alpha/2 < \arg\zeta < \pi\}$. Ввиду вещественности коэффициентов первого граничного условия (17) придем к краевой задаче

$$\begin{gathered} V_1(\tau) = AV_2(\tau) - B\overline{V_2(\tau)}, \quad \tau \in \mathcal{L}^*, \\ \operatorname{Im} V(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \end{gathered} \tag{19}$$

с дополнительными условиями (18), кроме которых должны еще выполняться следующие два:

$$|V(\zeta)| = \mathrm{o}(|\zeta|^{-2}), \quad |\zeta| \ll 1; \quad \overline{V(1/\overline{\zeta})} \equiv -V(\zeta). \tag{20}$$

Рассмотрим фиксированную в плоскости ζ с разрезом по лучу $\mathcal{L}^*$ ту ветвь функции $\omega(\zeta) = \zeta^\gamma$ с действительным показателем γ, которая вещественна (положительна) на положительной полуоси. Для выбранной ветви справедливо тождество $\overline{\omega(1/\overline{\zeta})} \equiv 1/\omega(\zeta)$ и поэтому, как легко видеть, функция

$$V(\zeta) = \begin{cases} V_1(\zeta) = c_{11}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\gamma}\zeta^\gamma - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi\gamma}\zeta^{-\gamma}), & \pi(\alpha/2 - 2) \le \arg\zeta \le -\pi; \\ V_2(\zeta) = c_{12}(\zeta^\gamma - \zeta^{-\gamma}), & 0 \le \arg\zeta \le \pi\alpha/2, \end{cases} \tag{21}$$

удовлетворяет при произвольных вещественных c_{11}, c_{12} и $0 < \gamma < 2$ всем условиям (18)–(20), за исключением первого граничного условия (19). Подставляя в последнее функцию (21), с учетом предельных на $\mathcal{L}^*$ равенств

$$\begin{aligned} \omega^+(\tau) &= r^\gamma \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\gamma(\alpha/2-2)} && \text{при } \ \zeta \to \tau \ \text{ из } \ S_1^*, \\ \omega^-(\tau) &= r^\gamma \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\gamma\alpha/2} && \text{при } \ \zeta \to \tau \ \text{ из } \ S_2^*, \end{aligned}$$

получим, приравнивая коэффициенты при $r^{\pm\gamma}$, относительно неопределенных констант γ, c_{11}, c_{12} систему вида

$$\begin{gathered} c_{11}\cos[\pi\gamma(1 - \alpha/2)] - c_{12}(A - B)\cos(\pi\gamma\alpha/2) = 0, \\ c_{11}\sin[\pi\gamma(1 - \alpha/2)] + c_{12}(A + B)\sin(\pi\gamma\alpha/2) = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Линейная однородная относительно c_{11}, c_{12} система (22) имеет нетривиальное решение, если только ее определитель равен нулю. Таким образом, приходим к следующему относительно γ уравнению:

$$(A - B)\sin[\pi\gamma(1 - \alpha/2)]\cos\frac{\pi\gamma\alpha}{2} + (A + B)\cos[\pi\gamma(1 - \alpha/2)]\sin\frac{\pi\gamma\alpha}{2} = 0.$$

Полученное уравнение легко преобразуется к эквивалентной форме

$$\sin(\pi\gamma) - \Delta \sin[\pi\gamma(1-\alpha)] = 0, \tag{23}$$

где $\Delta = B/A$. Нас интересуют решения уравнения (23) на интервале $(0, 2)$, при этом надо учитывать, что параметр α принимает значения из интервала $(0, 1)$, а $|\Delta| < 1$, поскольку $A > |B|$.

Прежде чем исследовать уравнение (23), следует сказать, что построение функции $v_I(z)$, удовлетворяющей второму условию (13), приводит к представлению

$$V(\zeta) = \begin{cases} V_1(\zeta) = \mathrm{i}\, c_{21}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\gamma}\zeta^{\gamma} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi\gamma}\zeta^{-\gamma}), & \pi(\alpha/2 - 2) < \arg\zeta < -\pi; \\ V_2(\zeta) = \mathrm{i}\, c_{22}(\zeta^{\gamma} - \zeta^{-\gamma}), & 0 < \arg\zeta < \pi\alpha/2, \end{cases} \tag{24}$$

вместо (21); к системе

$$\begin{gathered} c_{21}\cos[\pi\gamma(1-\alpha/2)] - c_{22}(A+B)\cos(\pi\gamma\alpha/2) = 0, \\ c_{21}\sin[\pi\gamma(1-\alpha/2)] + c_{22}(A-B)\sin(\pi\gamma\alpha/2) = 0 \end{gathered} \tag{25}$$

вместо (22); и соответственно к уравнению

$$\sin(\pi\gamma) + \Delta \sin[\pi\gamma(1-\alpha)] = 0, \tag{26}$$

которое отличается от уравнения (23) лишь знаком перед вторым слагаемым.

Несложно показать (достаточно лишь построить соответствующие графики), что пара трансцендентных уравнений (23), (26) во всех непредельных ($\Delta \neq \pm 1$) и невырожденном ($\Delta \neq 0$) случаях всегда имеет ровно три решения на интервале $\gamma \in (0, 2)$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $\alpha \neq 1/2$. Именно, если $0 < \alpha < 1/2$, то при $\Delta > 0$ уравнение (23) имеет два корня γ_1, γ_2 ($1/2 < \gamma_1 < 1$, $3/2 < \gamma_2 < 2$), а уравнение (26) — один корень γ_3 ($1 < \gamma_3 < 3/2$), при $\Delta < 0$ имеет место обратная ситуация; если $1/2 < \alpha < 1$, то при $\Delta > 0$ уравнение (23) имеет один корень ($1/2 < \gamma_1 < 1$), а уравнение (2) — два корня ($1 < \gamma_2 < 3/2$, $3/2 < \gamma_3 < 2$), и наоборот при $\Delta < 0$.

В случае $\alpha = 1/2$ уравнения (23), (26) разрешимы в явном виде и имеют на интересующем нас интервале по одному корню соответственно

$$\gamma_1 = \frac{2}{\pi}\arccos\frac{\Delta}{2}, \quad \gamma_2 = 2 - \gamma_1. \tag{27}$$

В предельных случаях ($\Delta = \pm 1$) ситуация с разрешимостью уравнений (23), (26) сохраняется, за исключением случая $\alpha = 2/3$, когда у уравнения (23) при $\Delta = -1$, а значит, у уравнения (26) при $\Delta = 1$ имеется лишь один корень $\gamma = 1{,}5$. Легко убедиться, что в этом смысле значение $\alpha = 2/3$ является единственным исключением. В самом деле, если $\Delta = 1$, то исследуемые уравнения сводятся соответственно к следующим:

$$\cos[\pi\gamma(1-\alpha/2)]\sin(\pi\gamma\alpha/2) = 0, \quad \sin[\pi\gamma(1-\alpha/2)]\cos(\pi\gamma\alpha/2) = 0,$$

(наоборот при $\Delta = -1$). Первое из выписанных уравнений имеет на интервале $(0, 2)$ корень $1/(2-\alpha) < 1$ при любом допустимом значении α, если же $\alpha < 1/2$, то его вторым корнем будет $3/(2-\alpha) < 2$. Величины $2/(2-\alpha) < 2$ при любом $0 < \alpha < 1$ и $1/\alpha$ при $\alpha > 1/2$ являются различными решениями второго уравнения, если $\alpha \neq 2/3$.

Отметим, что в общем случае, когда число $1 - \alpha = p/q$ рациональное и p/q — правильная дробь, интересующие нас уравнения приводятся относительно $x = \cos(\pi\gamma/q)$ к алгебраическим уравнениям вида

$$\sum_{k=0}^{[(q-1)/2]} (-1)^k \binom{q-2k-1}{k} (2x)^{q-2k-1} = \pm\Delta \sum_{k=0}^{[(p-1)/2]} (-1)^k \binom{p-2k-1}{k} (2x)^{p-2k-1};$$

здесь квадратные скобки означают целую часть числа. Отсюда корни уравнений (23), (26) определяются точно по формулам, аналогичным (27). В следующих четырех наиболее простых случаях они имеют вид

$$\begin{aligned}
\gamma_{1,2} &= \frac{5}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{5-\Delta\mp\sqrt{5+2\Delta+\Delta^2}}{8}}, &\quad \gamma_3 &= \gamma_1(-\Delta) \quad (\alpha = 2/5);\\
\gamma_{1,3} &= \frac{5}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{5\mp\sqrt{5+4\Delta}}{8}}, & \gamma_2 &= \gamma_1(-\Delta) \quad (\alpha = 4/5);\\
\gamma_{1,2} &= \frac{3}{\pi}\arccos\frac{\Delta\pm\sqrt{4+\Delta^2}}{4}, & \gamma_3 &= 3-\gamma_2 \quad (\alpha = 1/3);\\
\gamma_{1,2} &= \frac{3}{\pi}\arccos\frac{\sqrt{1\pm\Delta}}{2}, & \gamma_3 &= 3-\gamma_2 \quad (\alpha = 2/3).
\end{aligned}$$

Для $\alpha = 1/4$ и $\alpha = 3/4$ искомые значения γ определяются по формулам $\gamma_p = 4\pi^{-1}\arccos x_p$, где x_p — соответствующие корни бикубических уравнений

$$16x^2(2x^2-1)^2 = \Delta^2(4x^2-1)^2, \quad 16x^2(2x^2-1)^2 = \Delta^2.$$

К решению бикубических же уравнений сводятся случаи $\alpha = 2/7,\ 4/7,\ 6/7$. Для других значений α получаются уравнения более высоких порядков.

Решая систему (22) с учетом соотношения (23) и предшествующего ему, найдем

$$c_{11} = c_1, \quad c_{12} = c_1\frac{\operatorname{sign}\cos\pi\gamma}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos(\pi\gamma\alpha)}} = c_1\Lambda_1(\gamma). \tag{28}$$

Решение системы (25) может быть записано в виде

$$c_{21} = c_2, \quad c_{22} = c_2\frac{\operatorname{sign}\cos\pi\gamma}{\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos(\pi\gamma\alpha)}} = c_2\Lambda_2(\gamma); \tag{29}$$

здесь c_2 и выше c_1 — произвольные действительные константы.

Итог проведенным исследованиям подводит

Теорема 2. *В невырожденном и во всех непредельных случаях* $\Delta = B/A \neq 0, \pm 1$ *задача* (5) *для одного гиперболического включения* (8) *при* $\alpha = 2\pi^{-1}\arg(a+\mathrm{i}\,b) \in (0,1/2)$, $\Delta > 0$ *и* $\alpha \in (1/2,1)$, $\Delta < 0$ *имеет решение вида*

$$\begin{aligned}
v_1(z) &= c_1\chi_1(z;\gamma_1) + c_2\chi_1(z;\gamma_2) + \mathrm{i}\,c_3\chi_1(z;\gamma_3),\\
v_2(z) &= c_1\Lambda_1(\gamma_1)\chi_2(z;\gamma_1) + c_2\Lambda_1(\gamma_2)\chi_2(z;\gamma_2) + \mathrm{i}\,c_3\Lambda_2(\gamma_3)\chi_2(z;\gamma_3),
\end{aligned}\tag{30}$$

где γ_1, γ_2 — *корни уравнения* (23), *а* γ_3 — *корень уравнения* (26); *однозначные ветви функций*

$$\begin{aligned}
\chi_1(z;\gamma) &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi\gamma}(z+\sqrt{z^2-c^2})^\gamma - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\gamma}(z-\sqrt{z^2-c^2})^\gamma}{\sqrt{z^2-c^2}},\\
\chi_2(z;\gamma) &= \frac{(z+\sqrt{z^2-c^2})^\gamma - (z-\sqrt{z^2-c^2})^\gamma}{\sqrt{z^2-c^2}}
\end{aligned}\tag{31}$$

фиксированы в соответствующих областях S_1, S_2 *и принимают вещественные значения на действительной оси; константы* Λ_1, Λ_2 *определяются соотношениями* (28), (29); *наконец,* c_1, c_2, c_3 — *произвольные вещественные параметры.*

При $\alpha \in (0,1/2)$, $\Delta < 0$ *и* $\alpha \in (1/2,1)$, $\Delta > 0$ *решением задачи* (5) *будет*

$$\begin{aligned}
v_1(z) &= c_1\chi_1(z;\gamma_1) + \mathrm{i}\,c_2\chi_1(z;\gamma_2) + \mathrm{i}\,c_3\chi_1(z;\gamma_3),\\
v_2(z) &= c_1\Lambda_1(\gamma_1)\chi_2(z;\gamma_1) + \mathrm{i}\,c_2\Lambda_2(\gamma_2)\chi_2(z;\gamma_2) + \mathrm{i}\,c_3\Lambda_2(\gamma_3)\chi_2(z;\gamma_3),
\end{aligned}\tag{32}$$

где γ_1 — *корень уравнения* (23), *а* γ_2, γ_3 — *корни уравнения* (26).

Если $\alpha = 1/2$, *то общее решение задачи* (5) *определяется по формулам*

$$\begin{aligned} v_1(z) &= c_1\chi_1(z;\gamma) + \mathrm{i}\, c_2\chi_1(z;2-\gamma), \\ v_2(z) &= -A^{-1}\left(c_1\chi_2(z;\gamma) + \mathrm{i}\, c_2\chi_2(z;2-\gamma)\right), \end{aligned} \tag{33}$$

где $\gamma = \gamma_1$ *дается соотношением* (27).

Утверждения теоремы вытекают из представлений (24), (21), (16), (15) и (14). При $\alpha = 1/2$ на основании (27)–(29) легко получить $\Lambda_1(\gamma) = \Lambda_2(2-\gamma) = -A^{-1}$ и тем самым убедиться в справедливости представления (33). Наконец, повторяя почти дословно выкладки работы [10], нетрудно доказать, учитывая второе условие (20), общность решения (33).

Замечание 1. В частном случае вещественных коэффициентов $A = A_{12}$, $B = B_{12}$, определяемых формулами (7), и соответственно $\Delta = \Delta_{12} = B_{12}/A_{12}$, значения коэффициентов $\Lambda_{1,2}(\gamma)$ в представлениях (30), (32) можно несколько уточнить и вместо (28), (29) взять их в следующей форме:

$$\Lambda_1 = \frac{\operatorname{sign}\cos\pi\gamma}{\sqrt{\sin^2(\pi\gamma\alpha/2) + \theta^2\cos^2(\pi\gamma\alpha/2)}},$$
$$\Lambda_2 = \frac{\operatorname{sign}\cos\pi\gamma}{\sqrt{\theta^2\sin^2(\pi\gamma\alpha/2) + \cos^2(\pi\gamma\alpha/2)}},$$

где $\theta = \rho_2/\rho_1$.

Замечание 2. Для произвольных комплексных коэффициентов A, B, удовлетворяющих лишь условию $|A| > |B|$, в частности, для коэффициентов $A = A_{12}$, $B = B_{12}$ вида (6), соответствующее решение задачи (5) на основании теоремы 1 может быть выписано по формулам теоремы 2.

Замечание 3. В теореме 2 не утверждается, что построенные решения (30), (32) являются общими решениями рассматриваемой задачи в соответствующих случаях. Следовательно, нельзя утверждать, что общими будут решения задачи (5) в случаях, о которых идет речь в замечаниях 1, 2. Вместе с тем возникает естественный вопрос о наложении на искомое решение некоторых дополнительных ограничений, которые позволяли бы выделить из найденного семейства решений, в общем случае трехпараметрического, одно единственное. Однако, поскольку вопрос о степени общности найденного решения остается открытым, мы не будем здесь заниматься и выяснением характера таких ограничений.

Очень близко к рассмотренной примыкает

Задача о клине. Пусть $0 < \alpha < 1$. Под *клином* будем понимать бесконечный угол $S_2 = \{z : 0 \le |\arg z| < \pi\alpha/2\}$, через S_1 обозначим дополнение замыкания клина до полной плоскости (рис. 3).

Таким образом, в данном случае граница сопряжения разнородных фаз ($\mathcal{L}$=$\mathcal{L}^+ \cup \mathcal{L}^-$) представляет из себя правую половину пары прямых, задаваемых уравнением $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$. Ниже для клина так же, как и для гиперболического включения, будет построено (не претендующее на общность) некоторое семейство решений задачи (5) в классе функций $v(z)$, удовлетворяющих на бесконечности условию (14) вместе с функцией $v(1/z)$, т. е. с интегрируемой особенностью в нуле.

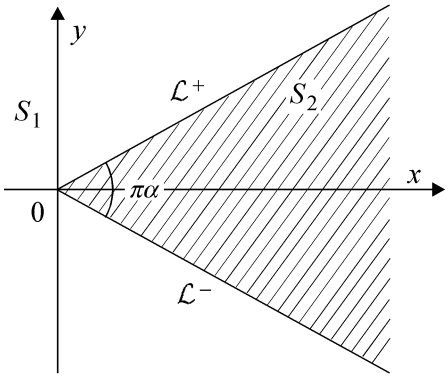

Рис. 3. Клин — бесконечный угол раствора $\pi\alpha < \pi$

Граничное условие (5) выглядит в данном случае особенно просто

$$v_1(t) = Av_2(t) - Be^{\mp\pi\alpha}\overline{v_2(t)}, \quad t \in \mathcal{L}^{\pm}, \tag{34}$$

или в эквивалентной форме

$$tv_1(t) = Atv_2(t) - B\overline{tv_2(t)}, \quad t \in \mathcal{L}.$$

Ясно, что для клина, как и для любой другой структуры, симметричной относительно вещественной оси, имеет место представление (12), и, следовательно, достаточно построить решение в полуплоскости $\mathbb{C}^+$.

Введем новую неизвестную функцию

$$V(z) = zv_R(z). \tag{35}$$

В силу (34), первого условия (13) и ограничений, наложенных на поведение искомой функции в начале координат и на бесконечности, относительно функции (35) придем к задаче (19) с дополнительными условиями

$$|V(\zeta)| = \mathrm{o}(|\zeta|^2), \quad \text{при} \quad |\zeta| \gg 1; \quad V(0) = 0.$$

Если решение полученной задачи искать в виде (ср. с (21))

$$V(\zeta) = \begin{cases} V_1(\zeta) = c_{11}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi\gamma}\zeta^\gamma, & \pi\alpha/2 < \arg\zeta < \pi; \\ V_2(\zeta) = c_{12}\zeta^\gamma, & 0 < \arg\zeta < \pi\alpha/2, \end{cases}$$

с вещественным показателем $\gamma \in (0, 2)$, то все дальнейшие построения полностью повторят проведенные в предыдущем пункте. Это позволяет сразу сформулировать окончательный результат.

Теорема 3. *В невырожденном и во всех непредельных случаях задача* (34) *для клина, граница которого определена условиями* $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$, $x > 0$, *имеет при* $\alpha = 2\pi^{-1}\arg(a + \mathrm{i}\,b) \in (0, 1/2)$, $\Delta > 0$ *и* $\alpha \in (1/2, 1)$, $\Delta < 0$ *решение вида*

$$v_1(z) = c_1(-z)^{\gamma_1 - 1} + c_2(-z)^{\gamma_2 - 1} + \mathrm{i}\,c_3(-z)^{\gamma_3 - 1},$$
$$v_2(z) = c_1\Lambda_1(\gamma_1)z^{\gamma_1 - 1} + c_2\Lambda_1(\gamma_2)z^{\gamma_2 - 1} + \mathrm{i}\,c_3\Lambda_2(\gamma_3)z^{\gamma_3 - 1},$$

где γ_1, γ_2 *— корни уравнения* (23), *а* γ_3 *— корень уравнения* (26); *однозначные ветви функций* $(-z)^\gamma$ *и* z^γ *фиксированы в областях* S_1, S_2 *соответственно условием вещественности на отрицательной и положительной частях действительной оси; константы* Λ_1, Λ_2 *определяются соотношениями* (28), (29); *наконец,* c_1, c_2, c_3 *— произвольные вещественные параметры.*

При $\alpha \in (0, 1/2)$, $\Delta < 0$ *и* $\alpha \in (1/2, 1)$, $\Delta > 0$ *решением задачи* (34) *будет*

$$v_1(z) = c_1(-z)^{\gamma_1 - 1} + \mathrm{i}\,c_2(-z)^{\gamma_2 - 1} + \mathrm{i}\,c_3(-z)^{\gamma_3 - 1},$$
$$v_2(z) = c_1\Lambda_1(\gamma_1)z^{\gamma_1 - 1} + \mathrm{i}\,c_2\Lambda_1(\gamma_2)z^{\gamma_2 - 1} + \mathrm{i}\,c_3\Lambda_2(\gamma_3)z^{\gamma_3 - 1},$$

где γ_1 — *корень уравнения* (23), *а* γ_2, γ_3 — *корни уравнения* (26).

Если $\alpha = 1/2$, *то общее решение задачи о прямоугольном клине определяется соотношениями*

$$v_1(z) = c_1(-z)^{\gamma-1} + \mathrm{i}\, c_2(-z)^{1-\gamma},$$
$$v_2(z) = -A_{12}^{-1}(c_1 z^{\gamma-1} + \mathrm{i}\, c_2 z^{1-\gamma}),$$

где $\gamma = \gamma_1$ *дается формулой* (27).

Как и для гиперболического включения, здесь можно было бы выписать решение задачи о клине в случаях вещественных и комплексных коэффициентов вида (7) и (6) соответственно. Однако мы на этом не останавливаемся точно так же, как и на вопросе о выделении единственного решения поставленной задачи.

Литература

1. Obdam A.N.V., Veiling E.J.M. *Elliptical inhomogeneities in groundwater flow — an analytical description* // J. Hydrology. – 1987. – V. 95. – P. 87–96.
2. Ungureanu E. *Sur le mouvement des fluides dans les milieux poreux non homogènes* // C. R. Acad. Sci. – 1969. – V. A268. – № 3. – P. 181–183.
3. Емец Ю.П. *Электрические характеристики композиционных материалов с регулярной структурой*. – Киев: Наук. думка, 1986. – 190 с.
4. Голубева О.В., Шпилевой А.Я. *О плоской фильтрации в средах с прерывно изменяющейся проницаемостью вдоль кривых второго порядка* // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1967. – № 2. – С. 174–179.
5. Костицына Л.И. *К вопросу о движении фильтрационного потока в кусочно-однородной среде* // Учен. зап. Московск. обл. пед. ин-та. – 1966. – Т. 164. – Вып. 6. – С. 67–82.
6. Чибрикова Л.И., Салехов Л.Г. *Применение метода симметрии при решении одной задачи линейного сопряжения* // Изв. вузов. Математика. – 1968. – № 9. – С. 94–105.
7. Ламбин Н.В. *Решение некоторых краевых задач по методу симметрии* // ПММ. – 1950. – Т. 14. – Вып. 6. – С. 611–618.
8. Полубаринова-Кочина П.Я. *Теория движения грунтовых вод*. – 2-е изд. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
9. Kacimov A.R., Obnosov Yu.V. *Steady water flow around parabolic cavities and parabolic inclusions in unsaturated and saturated soils* // J. Hydrology. – 2000. – V. 238. – P. 64-76.
10. Обносов Ю.В. *Решение задачи* **R***-линейного сопряжения теории композитов для одной трехкомпонентной среды* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 5. – С. 63-72.

Казанский государственный университет

Поступила 06.08.2002