ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 11 (522)

УДК 512.543:512.643:512.817

В.А. КОЛМЫКОВ

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОКСТЕРА И УСЛОВИЕ АЦИКЛИЧНОСТИ

Введение. Преобразование Кокстера — это суперпозиция псевдоотражений относительно набора гиперплоскостей. Данные о системе псевдоотражений составляют матрицу, которой соответствует (ассоциированное с ней) преобразование Кокстера. Матрице данных можно сопоставить геометрический объект — носитель, состоящий из "точек" и "маркированных связей" (последние символизируют ненулевые элементы матрицы); графы Кокстера и схемы Дынкина ([1], гл. V; [2]; [3], гл. I) являются частными случаями такой конструкции.

В [4] матрице данных сопоставлен квазиколчан, что дало возможность усилить одно утверждение из ([1], с. 175), где носителем является граф-лес. Можно ли этот результат еще усилить, ослабив условие "носитель — квазиколчан"? В статье показывается (теорема 2), что нельзя. Более того, класс квазиколчанов является "каноническим": квазиколчаны характеризуются при помощи преобразований Кокстера.

1. Преобразование Кокстера и колчаны. Пусть A — комплексная $n \times n$-матрица. Если $U = U(i,j)$ — некоторое условие, наложенное на i и j, то через $A_{(U)}$ обозначим матрицу, получающуюся из A, если в ней оставить все элементы, индексы которых удовлетворяют условию U, а остальные заменить нулями. Например, если k — фиксированное число, то $A_{(j=k)}$ получается из A занулением всех элементов, кроме тех, которые стоят в k-м столбце. Положим $R_k(A) = I - A_{(j=k)}$. Обозначим

$$C(A) = R_1(A)R_2(A)\dots R_n(A).$$

Преобразованием Кокстера, связанным с матрицей A, называется преобразование пространства строк $x \mapsto xC(A)$.

Ориентированным графом называется пара (I, E), где I — конечное множество (вершин), $E \subseteq I^2$. В данной работе носителем O_A матрицы A назовем ориентированный граф, определенный следующим образом. Рассмотрим произвольное n-элементное множество I и произвольную биекцию $\mu : \{1, \dots, n\} \to I$, множество E составим из тех и только тех пар $(\mu(i), \mu(j))$, для которых $a_{ij} \neq 0$.

Элемент $(u, v) \in E$ называется стрелкой с началом u и концом v. Контуром длины $k \in \mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$ в ориентированном графе называется последовательность $\{e_1, \dots, e_k\}$ различных стрелок таких, что конец e_i — это начало e_{i+1}, и ни одна вершина не является концом двух стрелок из этой последовательности. Колчан — это ориентированный граф, в котором нет контуров. *Квазиколчаном* назовем ориентированный граф, в котором нет контуров длины ≥ 3.

Условия, касающиеся наличия контуров, ограниченности их длин и т. п., называются условиями ацикличности[1]. В настоящее время прогресс в исследованиях преобразований Кокстера существенно обусловлен наложением некоторых условий ацикличности.

Теорема 1 ([4]). *Если O_A является квазиколчаном, то*

$$|\lambda^2 I - C(A)| = \lambda^n |\lambda I + \lambda^{-1}(A_{(i=j)} - I) + A_{(i\neq j)}|. \quad (1)$$

[1]В случае неориентированных графов понятие контура заменяется понятием цикла.

Данная теорема является усилением утверждения ([1], гл. V, § 6, упр. 3). Покажем, что теорема 1 не может быть далее усилена с помощью ослабления условия "O_A — квазиколчан".

2. Условия универсальности и ацикличности. Матрицу A назовем *универсальной*, если характеристический многочлен произведения матриц $R_1(A), R_2(A), \dots, R_n(A)$ не зависит от порядка сомножителей.

В [1] матрице A поставлен в соответствие некоторый граф Γ_A, а формула (1) доказана при условиях, что Γ_A является лесом и $a_{ii} = 2$. Из этих условий, в частности, вытекает[1] универсальность матрицы A. В [5] и [6] исследовался вопрос об универсальности симметрических комплексных матриц. Была также обнаружена связь условия универсальности с некоторым условием ацикличности. Следующая теорема устанавливает связь условия "носитель — квазиколчан" с условием универсальности матриц, имеющих фиксированный носитель. Важным является и то, что эти условия связаны также с равенством (1).

Теорема 2. *Для ориентированного n-вершинного графа G следующие условия равносильны:*

(i) *ориентированный граф G является квазиколчаном;*

(ii) *любая матрица A, имеющая носителем G, универсальна;*

(iii) *любая матрица A, имеющая носителем G, удовлетворяет равенству* (1).

Доказательство. Утверждение (i) $\Rightarrow$ (iii) — это теорема 1. Докажем (iii) $\Rightarrow$ (ii). Если подстановка $\sigma \in S_n$, то через $A * \sigma$ обозначим матрицу, получающуюся из A перестановкой строк, соответствующей подстановке σ, и такой же перестановкой столбцов. Из равенства (1) видно, что $|\lambda I - C(A * \sigma)|$ не зависит от σ.

Для комплексной $n \times n$-матрицы B и подстановки $\sigma \in S_n$ положим

$$C_\sigma(B) = R_{\sigma(1)}(B) R_{\sigma(2)}(B) \dots R_{\sigma(n)}(B).$$

Универсальность матрицы B — это независимость $|\lambda I - C_\sigma(B)|$ от σ. Поскольку $B_{(j=k)} * \sigma = (B * \sigma)_{(j=\sigma(k))}$, то $R_{\sigma(k)} = (R_k(B * \sigma^{-1})) * \sigma$. Поэтому

$$C_\sigma(B) = (C(B * \sigma^{-1})) * \sigma.$$

Значит, универсальность матрицы B равносильна независимости $|\lambda I - C(B * \sigma)|$ от σ.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Для комплексного λ и матрицы A через $\lambda * A$ обозначим матрицу, получающуюся из A прибавлением $\lambda - 1$ к каждому диагональному элементу и умножением на λ каждого элемента, стоящего выше главной диагонали. В ([1], гл. V, § 6, упр. 3) доказано, что

$$|\lambda I - C(A)| = |\lambda * A|.$$

Лемма. *Пусть $G = (I, E)$ — ориентированный граф и всякая матрица, имеющая носитель G, универсальна. Если ориентированный граф $G' = (I', E')$ — подграф в G (т. е. $I' \subseteq I$, $E' \subseteq E$), то всякая матрица, имеющая носитель G', универсальна.*

Доказательство. Пусть матрица B' имеет носитель G', $|I'| = n'$, а $\mu' : \{1, \dots, n'\} \to I'$ — соответствующая биекция. Рассмотрим некоторую биекцию $\mu : \{1, \dots, n\} \to I$, продолжающую μ'.

Для $z \neq 0$ определим матрицу B следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} b'_{ij}, & \text{если } (\mu(i), \mu(j)) \in E'; \\ z, & \text{если } (\mu(i), \mu(j)) \in E \setminus E'; \\ 0, & \text{если } (\mu(i), \mu(j)) \notin E. \end{cases}$$

Носителем матрицы B будет G.

[1] Из этих же условий в [2] выведено большее: всевозможные произведения матриц $R_1(A), R_2(A), \dots, R_n(A)$ (взятых каждая по одному разу) сопряжены в группе, порожденной матрицами $R_1(A), R_2(A), \dots, R_n(A)$.

Пусть σ' — произвольная подстановка множества $\{1,\dots,n'\}$, а σ — некоторая подстановка множества $\{1,\dots,n\}$, продолжающая σ'. В равенстве многочленов $|\lambda*(B*\sigma)| = |\lambda*B|$ перейдем к пределу при $z\to 0$. Получим равенство многочленов $|\lambda*(B'*\sigma')|(\lambda-1)^{n-n'} = |\lambda*B'|(\lambda-1)^{n-n'}$, где множитель $(\lambda-1)^{n-n'}$ отсутствует, если $I'=I$. $\square$

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что если $k\geq 3$, то существует неуниверсальная матрица, имеющая носителем контур длины k. Рассмотрим $k\times k$-матрицу

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поменяем в ней местами первую и вторую строки, затем — первый и второй столбцы. Получим матрицу $\widetilde{F}$. Легко видеть, что $|\lambda*F| = \lambda^k-\lambda^{k-1} \neq \lambda^k-\lambda^{k-2} = |\lambda*\widetilde{F}|$. Поэтому F не универсальна. $\square$

Литература

1. Бурбаки Н. *Элементы математики. Группы и алгебры Ли.* – М.: Мир, 1972. – 334 с.
2. Бернштейн И.Н., Гельфанд И.М., Пономарев В.А. *Функторы Кокстера и теорема Габриеля* // УМН. – 1973. – Т. 28. – № 2. – С. 19–33.
3. Кац В. *Бесконечномерные алгебры Ли.* – М.: Мир, 1993. – 425 с.
4. Колмыков В.А. *Преобразование Кокстера и квазиколчаны* // Матем. заметки. – 2002. – Т. 72. – № 3. – С. 472–473.
5. Колмыков В.А. *Отражения и трехмерность* // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73. – № 6. – С. 848–852.
6. Колмыков В.А. *Преобразования Кокстера и геометрия матрицы данных* // Матем. сб. – 2003. – Т. 194. – № 7. – С. 119–126.

Воронежский государственный университет

Поступила
28.10.2003