ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 3 (466)

УДК 515.17

Р.Н. ГУЗЕЕВ, А.В. ЛОБОДА

О НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ АФФИННО-ОДНОРОДНЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{R}^3$

В статье рассматриваются аналитические поверхности пространства $\mathbb{R}^3$, имеющие эллиптический тип вблизи выделенной точки.

Под аффинной однородностью поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$ вблизи точки $p \in M$ подразумевается следующее ее свойство: для любой близкой к p точки $q \in M$ найдутся окрестности $U(p)$, $V(q)$ точек p и q соответственно и аффинное преобразование пространства $\mathbb{R}^3$, переводящее p в q, а $M \cap U(p)$ — в $M \cap V(q)$.

Цель работы — охарактеризовать однородные поверхности названного класса в терминах коэффициентов их специальных уравнений. Аналитический подход к изучению однородности дополняет традиционные дифференциально-геометрические (напр., [1]) и алгебраические [2] методы и является достаточно эффективным. Результаты типа теорем 1 и 2 оказываются полезными при классификации голоморфно однородных вещественных подмногообразий комплексных пространств (напр., [3]).

Отметим, что однородные поверхности эллиптического типа (строго выпуклые) могут оказаться более интересными в приложениях, чем седловидные. В то же время более простые формулы, описывающие нормальные уравнения, получаются именно в гиперболическом случае (см. [4]).

1. Основные утверждения

Уравнение строго выпуклой (имеющей эллиптический тип) аналитической поверхности M вблизи любой ее точки можно привести аффинными преобразованиями к виду (напр., [5], § 30)

$$z = (x^2 + y^2) + (f_{30}x^3 + f_{21}x^2y + f_{12}xy^2 + f_{03}y^3) + \sum_{k+l\geq 4} f_{kl}x^ky^l. \tag{1}$$

Имеет место и более точное

Предложение 1. *Уравнение* (1) *строго выпуклой поверхности* M *можно привести аффинными преобразованиями к одному из двух видов*:

$$z = (x^2 + y^2) + \sum_{k+l\geq 4} f_{kl}x^ky^l \tag{2}$$

или

$$z = (x^2 + y^2) + x^3 + \sum_{k+l\geq 4} f_{kl}x^ky^l. \tag{3}$$

Работа над статьей второго автора частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 96-01-01002).

Для описания перехода от уравнения (1) к (2) или (3) удобно ввести вместо вещественных координат x, y комплексные переменные $w = x + iy$ и $\overline{w} = x - iy$.

Линейная замена, сохраняющая вид (1) уравнения поверхности M, имеет вид

$$w = Cw^* + Dz^*, \quad z = |C|^2 z^*, \tag{4}$$

где C и D — некоторые комплексные числа, причем $C \neq 0$.

Однородная компонента $\Phi_3^*(w, \overline{w}) = \sum\limits_{k+l=3} \Phi_{kl}^* w^k \overline{w}^l$ третьей степени нового уравнения поверхности M имеет при этом вид $\Phi_3^*(w, \overline{w}) = \frac{1}{|C|^2}(\Phi_3(Cw, \overline{Cw}) + (C\overline{D}w + \overline{C}D\overline{w})|w|^2)$. Заметим, что $\Phi_3^*(w, \overline{w}) = (w + \overline{w})^3/8 = x^3$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} (\frac{1}{|C|})^2 \Phi_{30} C^3 = 1/8, \\ (\frac{1}{|C|})^2 (\Phi_{21} C^2 \overline{C} + C\overline{D}) = 3/8. \end{cases} \tag{5}$$

При $\Phi_{30} = (1/8)((f_{30} - f_{12}) + i(f_{03} - f_{21})) \neq 0$ из (5) следует, что $C = |C|e^{i\theta}$, где

$$|C| = \frac{1}{8|\Phi_{30}|}, \quad \Phi_{30}|C|e^{3i\theta} = \frac{1}{8}, \tag{6}$$

а $D = \frac{3}{8}C - \Phi_{12}|C|^2$.

Отображение (4) с такими C, D приводит уравнение (1) к виду (3).

Если же $\Phi_{30} = 0$, то, полагая

$$C = 1, \quad D = -\Phi_{12} = -(1/8)((3f_{30} + f_{12}) + i(3f_{03} + f_{21})),$$

приходим к вырожденному в третьем порядке уравнению (2).

Вторая из формул (6) объясняет происхождение циклической группы третьего порядка, действующей на множестве нормальных уравнений вида (3). Из приведенного рассуждения следует также, что существуют только три линейных отображения, сохраняющих этот вид.

Назовем строго выпуклую аналитическую поверхность невырожденной в третьем порядке, если ее уравнение можно привести к виду (3), и вырожденной в третьем порядке, если ее уравнение приводится к виду (2). При этом (3) будем называть нормальной формой уравнения невырожденной поверхности. По предложению 1 все рассматриваемые поверхности делятся на вырожденные и невырожденные.

Заметим, что инвариант Пика J и тензор Дарбу T_{ijk} вырожденной в третьем порядке выпуклой поверхности равны нулю [5]. Если эта поверхность аффинно-однородна, то ясно, что эти инварианты равны нулю во всех точках. А тождество $T_{ijk} \equiv 0$ характеризует, как известно [5], поверхности второго порядка. В силу этого справедлива

Теорема 1. *Аффинно-однородная строго выпуклая поверхность M, вырожденная в третьем порядке, аффинно-эквивалентна*

либо 1) *параболоиду* $z = x^2 + y^2$,

либо 2) *эллипсоиду* $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,

либо 3) *гиперболоиду* $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

Основным результатом данной статьи является приводимое ниже описание однородных поверхностей в невырожденном случае.

Теорема 2. *Уравнение вида* (3) *аффинно-однородной поверхности однозначно определяется набором ее коэффициентов* $(f_{40}, f_{31}, f_{22}, f_{13}, f_{04})$ *четвертого порядка. Этот набор удовлетворя-*

ет следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} f_{31}(27-24f_{40}+20f_{22}+32f_{04})+f_{13}(174-136f_{40}-4f_{22})=0,\\ f_{31}(8f_{04}+4f_{22})+f_{13}(63-48f_{40}-4f_{22}+8f_{04})=0,\\ (2f_{04}+f_{22})(3-f_{40}+2f_{22})-f_{13}(5f_{31}+f_{13})=0,\\ f_{04}(-54+48f_{40}-16f_{22}-8f_{04})-2f_{22}^2+f_{13}(3f_{31}+7f_{13})=0. \end{aligned} \tag{7}$$

Специальная структура системы (7) позволяет найти ее решение в явном виде.

Предложение 2. *Всякий набор* $(f_{40}, f_{31}, f_{22}, f_{13}, f_{04})$*, являющийся решением системы* (7)*, имеет один из следущих видов*:

$$(t,0,0,0,0), \quad t\in\mathbb{R}, \tag{8}$$

$$\left(s,t,2s-\frac{3}{2},0,t\right), \quad (s,t)\in\left\{(s-t)^2+\frac{15}{4}t-\frac{3}{2}s+\frac{9}{16}=0\right\}, \tag{9}$$

$$\left(t,s,\left(6s-\frac{27}{4}\right),0,\left(\frac{27}{8}-3s\right)\right), \quad (s,t)\in\mathbb{R}^2, \tag{10}$$

$$\left(\frac{21}{16}-\frac{1}{6}t,-\varepsilon s,t,\varepsilon s,-\frac{1}{6}t\right), \quad (s,t)\in\{144s^2=2t(27-32t)\}, \quad \varepsilon=\pm1, \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{(2t+36)}{32},\ \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{32}(8t-15),\ \frac{(36t-27)}{32},\ \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{32}(24t-27),\ \frac{(18t-27)}{32}\right),\\ t\in\mathbb{R}, \quad \varepsilon=\pm1,\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{3}{128}P_1(t),\ -\varepsilon\frac{9\sqrt{3}(1-3t)}{16},\ -\frac{9}{64}P_2(t),\ \varepsilon\frac{9\sqrt{3}t}{16},\ \frac{9}{128}P_3(t)\right),\\ P_1(t)=47+54t-96t^2,\quad P_2(t)=1-18t+32t^2,\quad P_3(t)=1+2t-32t^2,\\ t\in\mathbb{R}, \quad \varepsilon=\pm1.\end{gathered} \tag{13}$$

Следствие. Набор коэффициентов $(f_{40}, f_{31}, f_{22}, f_{13}, f_{04})$ уравнения аффинно-однородной поверхности (3) также имеет указанный в предложении вид.

Отметим, однако, что на множестве нормальных уравнений вида (3) действует циклическая группа 3-го порядка. В силу этого, например, нормальное уравнение с набором коэффициентов $(f_{40}, f_{31}, f_{22},\ f_{13}, f_{04})$ (12) можно преобразовать линейной заменой в уравнение с набором коэффициентов (8).

Выделение из множества решений (8)–(13) минимального подмножества, содержащего все нормальные формы, представляет собой отдельную задачу, которую мы здесь не рассматриваем. Ее решение можно получить после приведения к нормальному виду (3) всех строго выпуклых поверхностей из списка [2]. В то же время, как показывают приводимые ниже примеры, процедура такой нормализации является весьма громоздкой для семейств поверхностей, зависящих от параметров.

2. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим строго выпуклую аналитическую поверхность M, заданную нормальным уравнением $z=F(x,y)=(x^2+y^2)+x^3+\sum\limits_{k+l\geq 4} f_{kl}x^k y^l$.

В каждой близкой к началу координат точке $q(a,b,F(a,b))$ этой поверхности ее уравнение можно записать в виде

$$z=\sum_{k,l}F_{kl}(x-a)^k(y-b)^l, \tag{14}$$

где $F_{kl} = \frac{1}{k!l!}\frac{\partial^{k+l}F}{\partial x^k y^l}(q)$. Приведем это уравнение к нормальной форме. Преобразование

$$x^* = x - a, \quad y^* = y - b, \quad z^* = z - F_{10}(x-a) - F_{01}(y-b)$$

превращает (14) в

$$z = (F_{20}x^2 + F_{11}xy + F_{02}y^2) + \sum_{k+l\geq 3} F_{kl}x^k y^l. \tag{15}$$

Положительно определенную квадратичную форму

$$F_2(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Dy^2$$

с матрицей, близкой к единичной, можно привести к сумме квадратов преобразованием

$$x = \frac{1}{\sqrt{A}}x^* - \frac{B}{\omega}y^*, \quad y = \frac{\sqrt{A}}{\omega}y^*, \tag{16}$$

где $\omega = \sqrt{AD - B^2}$. Матрица этого преобразования также близка к единичной, поэтому коэффициенты нового уравнения поверхности

$$z = (x^2 + y^2) + \sum_{k+l\geq 3} g_{kl}x^k y^l \tag{17}$$

близки к соответствующим коэффициентам уравнения (15). Завершающее нормализацию преобразование (4) определяется коэффициентами третьего порядка уравнения (17). Следовательно, оно зависит от производных не более чем третьего порядка исходной функции $F(x,y)$ и также близко к тождественному. В силу этого каждый из коэффициентов h_{kl} четвертого порядка нового нормального уравнения можно записать в виде

$$h_{kl} = b_{kl}(D^3F)F_{kl} + \sum_{(st)\neq(kl)} a_{klst}(D^2F, D^3F)F_{st} + \varphi(F_{st} \mid (s+t) < 4).$$

Здесь коэффициенты b_{kl} близки к единице, а a_{klst} — к нулю, если рассматриваемая точка (a,b,c) поверхности M находится вблизи начала координат. Через D^2F и D^3F обозначены наборы производных функции $F(x,y)$ соответственно второго и третьего порядков.

Из однородности поверхности вытекает совпадение таких коэффициентов с коэффициентами исходного уравнения

$$h_{kl}(q) \equiv f_{kl} = \text{const} \quad (k+l=4).$$

Отсюда получается система уравнений в частных производных

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^k y^{4-k}}(q) = \varphi_k\left(f_{40}, f_{31}, f_{22}, f_{13}, f_{04}\ ;\frac{\partial^s F}{\partial x^t y^{s-t}}(q)\right),$$

где $0 \leq s \leq 3$, $0 \leq k \leq 4$.

Аналитическое решение $F(x,y)$ вида (3) такой системы однозначно восстанавливается по набору f_{40}, f_{31}, f_{22}, f_{13}, f_{04}, что доказывает первую часть теоремы 2.

Для получения формул (7) рассмотрим более подробно изменения коэффициентов четвертого порядка нормального уравнения (3) при смещении из начала координат в близкую к нему точку $q(a,b,F(a,b)) \in M$. Перенося систему координат в эту точку, получим уравнение

$$z + F(a,b) = (x+a)^2 + (y+b)^2 + (x+a)^3 + \sum_{k+l\geq 4} f_{kl}(x+a)^k(y+b)^l.$$

Приведем его к нормальной форме. На промежуточных этапах нормализации будем следить лишь за бесконечно малыми величинами первого порядка по a и b. Например, после раскрытия скобок имеем уравнение

$$z - (2a+\cdots)x - (2b+\cdots)y = (1+3a+\cdots)x^2 + (0+\cdots)xy + (1+\cdots)y^2 + \sum_{k+l\geq 3} F_{kl}x^k y^l. \tag{18}$$

При этом
$$F_{kl} = f_{kl} + ((k+1)f_{k+1,l}a + (l+1)f_{k,l+1}b) + \cdots ,$$
где многоточиями обозначены бесконечно малые величины высших порядков по a, b. Тогда преобразование (16), приводящее к каноническому виду квадратичную форму $F_2(x,y)$ поверхности (18), имеет вид
$$x = (1 - \tfrac{3}{2}a + \cdots)x^* + (0 + \cdots)y^*, \quad y = (1 + \cdots)y^*.$$
Получаем новое уравнение вида (17). Его коэффициенты третьего и четвертого порядков равны соответственно

$$\begin{aligned}
g_{30} &= 1 + (4f_{40} - 9/2)a + f_{31}b + \cdots ,\\
g_{21} &= (3f_{31}a + 2f_{22}b) + \cdots ,\\
g_{12} &= (2f_{22}a + 3f_{13}b) + \cdots ,\\
g_{03} &= (f_{13}a + 4f_{04}b) + \cdots
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
g_{40} &= f_{40} + (-6f_{40} + 5f_{50})a + f_{41}b + \cdots ,\\
g_{31} &= f_{31} + (-\tfrac{9}{2}f_{31} + 4f_{41})a + 2f_{32}b + \cdots ,\\
g_{22} &= f_{22} + (-3f_{22} + 3f_{32})a + 3f_{23}b + \cdots ,\\
g_{13} &= f_{13} + (-\tfrac{3}{2}f_{13} + 2f_{23})a + 4f_{14}b + \cdots ,\\
g_{04} &= f_{04} + (f_{14}a + 5f_{05}b) + \cdots
\end{aligned}$$

Остается преобразованием (4) превратить (17) в нормальное уравнение $z = (x^2 + y^2) + x^3 + \sum\limits_{k+l\geq 4} h_{kl}x^k y^l$.

Комплексные числа C и D определяются по формулам (6) и зависят, как и коэффициенты Φ_{30}, Φ_{12}, от параметров смещения a, b. В частности, $C = |C|e^{i\theta}$, где $|C| = 1/(8|\Phi_{30}(a,b)|)$. Для угла $\theta = \theta(a,b)$ имеем уравнение
$$e^{3i\theta} = \frac{|\Phi_{30}|}{\Phi_{30}}.$$
В качестве его решения $\theta(a,b)$ можно взять непрерывную ветвь кубического корня с начальным значением $\theta(0,0) = 0$.

Вычисления, которые здесь не приводятся, дают следующие формулы для коэффициентов h_{kl} четвертого порядка нового нормального уравнения:

$$\begin{aligned}
h_{40} = f_{40} &+ \Big(5f_{50} + 3f_{40} - 5f_{22} - 2f_{40}(4f_{40} - 2f_{22}) - \frac{1}{3}f_{13}(f_{13} - 3f_{31})\Big)a +\\
&+ \Big(f_{41} - \frac{15}{2}f_{13} - 2f_{40}(f_{31} - 3f_{13}) - \frac{1}{3}f_{31}(4f_{04} - 2f_{22})\Big)b + \cdots , \qquad (19)\\
h_{31} = f_{31} &+ \Big(4f_{41} + \frac{9}{2}f_{31} - f_{13} + \frac{1}{3}(4f_{40} - 2f_{22})(f_{13} - 9f_{31})\Big)a +\\
&+ \Big(2f_{32} - 4f_{04} + \frac{1}{3}(4f_{40} - 2f_{22})(4f_{04} - 2f_{22}) - 2f_{31}(f_{31} - 3f_{13})\Big)b + \cdots , \qquad (20)\\
h_{22} = f_{22} &+ (3f_{32} + 3f_{22}(f_{31} - f_{13})(f_{13} - 3f_{31}) - 2f_{22}(4f_{40} - 2f_{22}))a +\\
&+ \Big(3f_{23} - \frac{9}{2}f_{13} + (f_{31} - f_{13})(4f_{04} - 2f_{22}) - 2f_{22}(f_{31} - 3f_{13})\Big)b + \cdots , \qquad (21)
\end{aligned}$$

$$h_{13} = f_{13} + \left(2f_{23} + \frac{15}{2}f_{13} + \frac{1}{3}(2f_{22} - 4f_{04})(f_{13} - 3f_{31}) - 2f_{13}(4f_{40} - 2f_{22})\right)a +$$
$$+ \left(4f_{14} - \frac{1}{3}(4f_{04} - 2f_{22})^2 - 2f_{13}(f_{31} - 3f_{13})\right)b + \cdots, \qquad (22)$$
$$h_{04} = f_{04} + \left(f_{14} + 9f_{04} + \frac{1}{3}f_{13}(f_{13} - 3f_{31}) - 2f_{04}(4f_{40} - 2f_{22})\right)a +$$
$$+ \left(5f_{05} + \frac{1}{3}f_{13}(4f_{04} - 2f_{22}) - 2f_{04}(f_{31} - 3f_{13})\right)b + \cdots \qquad (23)$$

В однородном случае все выписанные коэффициенты должны быть константами, не зависящими от точки $q(a, b, F(a, b))$ поверхности M. Следовательно, коэффициенты при a и b в формулах (19)–(23) равны нулю для однородной поверхности M.

Освобождаясь в этих уравнениях от коэффициентов пятого порядка, получаем систему (7) и завершаем тем самым доказательство теоремы 2. □

Замечание 1. Аналогично, используя уравнения вида (2) и не используя инвариант Пика и тензор Дарбу, можно доказать и теорему 1.

Замечание 2. Можно показать, что используемое в статье определение однородности в силу свойств единственности и непрерывности получаемых нормальных уравнений эквивалентно традиционному определению. Последнее связано с наличием в группе Aff(3) подгруппы Ли, транзитивно действующей на рассматриваемой поверхности вблизи выделенной точки.

В такой ситуации для упрощения вычислений можно привлечь, например, линейные векторные поля на поверхности. Подобная идея реализована в случае вещественных подмногообразий пространства $\mathbb{C}^2$ в статье [6].

3. Решение системы (7) и некоторые примеры

Рассмотрим прежде всего два первых уравнения системы (7) как линейную однородную систему относительно f_{31} и f_{13}.

Если ее определитель Δ, элементы которого — линейные функции относительно f_{40}, f_{22}, f_{04}, отличен от нуля, то $f_{31} = f_{13} = 0$. Тогда в двух последних уравнениях возможны несколько случаев.

1. $2f_{04} + f_{22} = 0$, $f_{04} = 0$; получаем решение $(t, 0, 0, 0, 0)$, т. е. набор (8) из предложения 2.

2. $2f_{04} + f_{22} = 0$, $f_{04} \neq 0$; имеем $8f_{40} + 8f_{04} - 27 = 0$, что соответствует набору (10) при $t = 0$.

3. $3 - f_{40} + 2f_{22} = 0$; получаем набор (9).

Пусть теперь определитель Δ равен нулю. Тогда также можно рассмотреть несколько случаев.

4. Первый столбец Δ нулевой, т. е. $27 - 24f_{40} + 20f_{22} + 32f_{04} = 0$, $2f_{04} + f_{22} = 0$; получаем двухпараметрическое решение (10).

5. Определитель $\Delta = 0$, но его первый столбец ненулевой. Тогда второй столбец этого определителя получается из первого умножением на некоторое вещественное число λ. Имеем в силу этого три равенства:

$$\begin{aligned} 174 - 136f_{40} - 4f_{22} &= \lambda(27 - 24f_{40} + 20f_{22} + 32f_{04}),\\ 63 - 48f_{40} - 4f_{22} + 8f_{04} &= \lambda(8f_{04} + 4f_{22}),\\ f_{31} &= -\lambda f_{13}. \end{aligned}$$

Из них находим

$$f_{40} = \frac{1}{48}(63 - 4(1 + \lambda)f_{22} + 8(1 - \lambda)f_{04})$$

и

$$4(3\lambda^2 + 16\lambda - 11)f_{22} + 8(3\lambda^2 + 4\lambda + 17)f_{04} = 27(\lambda - 1).$$

Подставляя эти формулы в два последних равенства (7), получим систему относительно f_{22}, f_{13} вида

$$\alpha_1 f_{22}^2 + \beta_1 f_{22} + \gamma_1 = (1-5\lambda) f_{13}^2,$$
$$\alpha_2 f_{22}^2 + \beta_2 f_{22} + \gamma_2 = (3\lambda-7) f_{13}^2.$$

Коэффициенты этой системы являются рациональными функциями относительно λ с общим знаменателем $(3\lambda^2+4\lambda+17)^2 \neq 0$. Освобождаясь от этого знаменателя и от f_{13}^2, получаем новое квадратное уравнение

$$\alpha f_{22}^2 + \beta f_{22} + \gamma = 0, \tag{24}$$

где

$$\alpha = 64 \cdot 12 \cdot 256(\lambda-1)(\lambda+3)^2(3\lambda+1),$$
$$\beta = -64 \cdot 27 \cdot 32(\lambda-1)(\lambda+1)(3\lambda^2+46\lambda+47),$$
$$\gamma = -48 \cdot 27 \cdot 27(\lambda-1)(\lambda+1)^2(\lambda-13).$$

При $\lambda = 1$ получаем случай (11) из предложения 2.

Решая уравнение (24) при $\lambda \neq 1$, получаем две функции $f_{22} = f_{22}(\lambda)$:

$$(f_{22})_1 = \frac{81}{64}\frac{(\lambda+1)}{(3\lambda+1)}, \quad (f_{22})_2 = \left(-\frac{9}{64}\right)\frac{(\lambda+1)(\lambda-13)}{(\lambda+3)^2}.$$

Первая из этих формул соответствует случаю (12) из предложения 2 при $t = \frac{27\lambda+15}{8(3\lambda+1)}$, а вторая — набору (13) при $t = \frac{1}{\lambda+3}$.

В заключение рассмотрим несколько примеров однородных поверхностей и их нормальных уравнений. Факт однородности всех этих поверхностей легко проверяется непосредственно. Кроме того, все они имеются в списке [2].

Пример 1. Поверхность $z = y^2 - x^\alpha$ вблизи точки $(1, 0, -1)$ при $0 < \alpha < 1$.

После поворота осей в указанной точке имеем уравнение

$$z = y^2 - \sum_{k \geq 2} \beta_k x^k, \quad \beta = \frac{1}{k!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1).$$

Последующее растяжение осей дает уравнение вида (3) с

$$f_{40} = \frac{\beta_2\beta_4}{\beta_3^2} = \frac{3}{4}\frac{\alpha-3}{\alpha-2}.$$

В силу равенства нулю остальных коэффициентов четвертого порядка $f_{31}, \ldots, f_{04}$ имеем здесь случай (8) предложения 2 при

$$t = \frac{3}{4}\frac{\alpha-3}{\alpha-2}.$$

Остальные значения параметра t в (8) реализуются на поверхностях $z = y^2 + x^\alpha$ ($\alpha \notin (0,1)$), а также на поверхностях $z = y^2 + e^x$, $z = y^2 - \ln x$, $z = y^2 + x \ln x$.

Пример 2. $xz = y^2 - x^\alpha$ ($\alpha \in (1,2)$) вблизи точки $(1, 0, -1)$.

Разрешая уравнение относительно z, легко видеть, что его правая часть имеет в тейлоровском разложении только слагаемые двух типов: x^k и $x^l y^2$. В силу этого возможна достаточно простая нормализация уравнения, затрагивающая лишь переменные x и z. При этом получаем в нормальном уравнении $f_{31} = f_{13} = 0$ и

$$f_{40} = \frac{3(\alpha^2+3\alpha-3)}{4\alpha^2}, \quad f_{22} = \frac{9(\alpha-1)}{2\alpha^2}, \quad f_{04} = -\frac{9}{4\alpha^2}.$$

Такой набор коэффициентов задает часть параболы (9) .

Пример 3. $z = \ln x + \alpha \ln y$ вблизи точки $(1,1,0)$ при $\alpha > 0$.

После переноса и поворота системы координат имеем здесь уравнение

$$z = (x^2 + \alpha y^2) + \frac{2}{3}(x^3 + \alpha y^3) + \frac{1}{2}(x^4 + \alpha y^4) + \cdots$$

Для дальнейших преобразований уравнения оказывается удобным ввести вместо α новый параметр

$$t = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right).$$

Коэффициент C нормализующего отображения (4) при этом можно положить равным $(3/2)\cos 3t\ e^{-it}$. Тогда в нормальном уравнении коэффициенты имеют вид

$$f_{40} = \frac{3}{64}(25 - \cos 4t), \quad f_{31} = \frac{3}{8}\sin 4t, \quad f_{22} = \frac{9}{32}(1 - \cos 4t),$$
$$f_{13} = 0, \quad f_{40} = -\frac{9}{64}(1 - \cos 4t).$$

Ясно, что этот набор задает дугу эллипса в плоскости (10).

Примечание при корректуре. После того, как данная работа была направлена в печать, вышла в свет статья: Eastwood M., Ezhov V. On affine normal forms and a classification of homogeneous surfaces in affine three-space // Geom. Dedicata. – 1999. – V. 77. – P. 11–69. В ней решается аналогичная задача описания аффинно-однородных поверхностей в трехмерном пространстве в терминах коэффициентов нормальных уравнений таких поверхностей. В эллиптическом случае Иствуд и Ежов используют канонический вид уравнения, совпадающий с предложенным в [5] и отличающийся от нашего. В их работе приводится более детальное обсуждение связей между списком предлагаемых нормальных уравнений и классификацией однородных поверхностей из [2].

Литература

1. Nomizu K., Sasaki T. *A new model of unimodular-affinely homogeneous surfaces* // Manuscr. Math. – 1991. – V. 73. – № 1. – P. 39–44.
2. Doubrov B., Komrakov B., Rabinovich M. *Homogeneous surfaces in the 3-dimensional affine geometry* // Prepr. Ser. Pure Math. Inst. Math. Univ. – Oslo, 1995. – № 41. – 26 p.
3. Лобода А.В. *О некоторых инвариантах трубчатых гиперповерхностей в* $\mathbb{C}^2$ // Матем. заметки. – 1996. – Т. 59. – № 2. – С. 211–223.
4. Лобода А.В. *О классификации аффинно-однородных поверхностей пространства* $\mathbb{R}^3$ *в терминах их нормальных уравнений* // Понтрягинские чтения-IX. Тез. докл. – Воронеж, 1998. – С. 92.
5. Широков П.А., Широков А.П. *Аффинная дифференциальная геометрия.* – М., Физматлит, 1959. – 319 с.
6. Белошапка В.К. *Однородные вещественные гиперповерхности в* $\mathbb{C}^2$ // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60. – № 5. – С. 760–764.

Воронежская государственная архитектурно-строительная академия

Поступила 30.04.1998