И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2001 МАТЕМАТИКА № 3 (466)

УДК 514.763

А.В. БОЯРШИНОВА

ПРЕПЯТСТВИЕ К ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ k-ДУАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Целью данной работы является построение препятствия к интегрируемости инфинитезимальной деформации структуры многообразия над алгеброй k-дуальных чисел. Доказано, что, как и в случае комплексной структуры, этим препятствием является дифференциальная скобка $[V,V]$ для инфинитезимальной деформации V, которая определяет класс во второй группе когомологий многообразия с коэффициентами в пучке голоморфных векторных полей.

Все геометрические объекты предполагаются гладкими.

1. Инфинитезимальная деформация k-дуальной структуры

Пусть M — компактное гладкое многообразие размерности $n(k+1)$ с заданной на нем k-дуальной структурой $\overline{J}$, рассматриваемой как набор аффинорных полей $\overline{J} = \{J_s : M \to T^1_1 M\}$, $s = \overline{1,k}$, таких, что для любой точки x многообразия M выполняются условия

1) $J_s(x) \cdot J_r(x) = 0 \;\; \forall s, r = \overline{1,k}$;

2) $\operatorname{rank}\|J_s(x)\| = n$, $s = \overline{1,k}$, где $\|J_s(x)\|$ — матрица аффинора J_s;

3) на M существует атлас

$$\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}, \;\; \text{где} \;\; \varphi_\alpha : x \to (X^i = x^i_0 + \varepsilon_1 x^{n+i}_1 + \dots + \varepsilon_k x^{n+i}_k), \;\; x^i_0, x^{n+i}_p \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1,n},$$

в картах которого координаты аффиноров $J_s(x)$ постоянны. Тогда в базисе $\{\frac{\partial}{\partial x^i_0} = \partial^0_i, \; \frac{\partial}{\partial^{n+i}_p} = \partial^p_{n+i}\}$ матрицы $\|J_s(x)\|$ аффиноров J_s имеют вид

$$\|J_s(x)\| = \begin{pmatrix} 0^{ns}_n, & 0^{ns}_{nk} \\ E^n_n, & 0^n_{nk} \\ 0^{n(k-s)}_n, & 0^{n(k-s)}_{nk} \end{pmatrix},$$

где E^n_n — единичная матрица размера $n \times n$, 0^β_α — нулевая матрица размера $\alpha \times \beta$. Такие матрицы будем называть каноническими. Задание на многообразии k-дуальной структуры эквивалентно тому, что M является гладким многообразием над алгеброй k-дуальных чисел $\mathbb{R}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \{a_0 + a_1\varepsilon_1 + \dots + a_k\varepsilon_k \mid \varepsilon_s \cdot \varepsilon_p = 0, \; s, p = \overline{1,k}, \; a_i \in \mathbb{R}, \; i = \overline{0,k}\}$ [1].

Рассмотрим расслоение линейных реперов $(L(M), \pi, M)$. Структура многообразия над алгеброй $\mathbb{R}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ определяет G-структуру $P(M,G) \subset L(M)$ с подгруппой Ли $G = \{A \in GL(n(k+1)) \mid A\|J_s\| = \|J_s\|A, \; s = \overline{1,k}\}$, где $\|J_s\|$ — канонические матрицы структурных аффиноров J_s.

Для любой группы Ли G определяемая с помощью нее G-структура называется интегрируемой, если существует адаптированный атлас, функции склейки которого имеют матрицы Якоби из группы G. Задание интегрируемой G-структуры эквивалентно заданию сечения $s : M \to E_G$ ассоциированного расслоения $p : (E_G = L(M)/G) \to M$ [2].

Определение 1. Деформацией интегрируемой G-структуры, заданной сечением $s : M \to E_G$, называется такое гладкое отображение $\widetilde{s} : \mathbb{R} \times M \to E_G$, $(t,x) \in \mathbb{R} \times M \to \widetilde{s}_t(x) \in E_G$, что

1) $\forall t \in \mathbb{R}$ отображение $\widetilde{s}_t : M \to E_G$ есть сечение ассоциированного расслоения $p : E_G \to M$, причем соответствующая этому сечению G-структура является интегрируемой;
2) $\forall x \in M$ $\widetilde{s}_0(x) = s(x)$.

В локальных координатах легко проверить, что существует вложение $\gamma : E_G \to \oplus^k T^1_1 M$, $\gamma([e_j]) = (\{J_1, \ldots, J_k\} : M \to \oplus^k T^1_1 M)$ расслоения, ассоциированного с G-структурой $P(M,G)$, в сумму Уитни аффинорных расслоений. Отсюда следует, что изучение деформации G-структуры можно свести к изучению деформации $\widetilde{J}(t) = (\widetilde{J}_1(t), \ldots, \widetilde{J}_k(t))$ структурных аффиноров на $\mathbb{R}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$-многообразии M.

Пусть $\widetilde{s}_t$ — деформация G-структуры. При фиксированной точке $x \in M$ кривая $\widetilde{s}_t$ лежит в слое над этой точкой, поэтому касательный вектор $v = \frac{d\widetilde{s}_t}{dt}\big|_{t=0}$ к этой кривой в нуле будет вертикальным. Имеет место изоморфизм $s^*(V_{E_G})\big|_{s(M)} \cong \oplus^k T^1_1 M$ (см. [3]), где s^* — обратный образ вертикального расслоения V_{E_G} для сечения s. В силу этого изоморфизма векторное поле v определяет на M набор аффинорных полей $V = \{V_p\}_{p=\overline{1,k}} = \{\frac{d\widetilde{J}_p(t)}{dt}\big|_{t=0}\}_{p=\overline{1,k}}$, который будем называть инфинитезимальной деформацией интегрируемой k-дуальной структуры.

Определение 2. Деформация $\widetilde{s}_t$ G-структуры s называется несущественной, если $\widetilde{s}_t = \widehat{\Phi}_t \circ s \circ \Phi_{-t}$, где Φ_t — поток на M, $\widehat{\Phi}_t$ — соответствующий поток на E_G, порожденный потоком Φ_t. В случае несущественной деформации векторное поле $v = \frac{d\widetilde{s}_t}{dt}\big|_{t=0}$ совпадает с производной Ли $L_w s(x)$ сечения s в направлении векторного поля $w = \frac{d\Phi_t}{dt}\big|_{t=0}$.

Определение 3. Векторное поле $v = L_w s(x)$ определяет набор аффинорных полей $\widetilde{X} = (\frac{d\widetilde{J}_p(t)}{dt}\big|_{t=0})$ на M, называемый несущественной инфинитезимальной деформацией k-дуальной структуры.

Множество $\mathcal{D}$ инфинитезимальных деформаций k-дуальной структуры является векторным подпространством в пространстве сечений расслоения $\oplus^k T^1_1 M \to M$ суммы Уитни аффинорных пространств, а пространство $\mathcal{D}_0$ несущественных инфинитезимальных деформаций k-дуальной структуры является, в свою очередь, векторным подпространством в векторном пространстве $\mathcal{D}$.

Определение 4. Пространством существенных инфинитезимальных деформаций k-дуальной структуры называется фактор-пространство

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{D}/\mathcal{D}_0.$$

В [4] была построена резольвента пучка векторных полей $\mathfrak{X}_h$, дифференцируемых над алгеброй k-плюральных чисел. Для k-дуальных чисел эта резольвента будет иметь вид

$$0 \to \mathfrak{X}_h \xrightarrow{i\times \mathrm{Id}} C^0 \xrightarrow{\overline{D}\times \mathrm{Id}} C^1 \xrightarrow{\overline{D}\times \mathrm{Id}} C^2 \xrightarrow{\overline{D}\times \mathrm{Id}} \cdots \xrightarrow{\overline{D}\times \mathrm{Id}} C^p \xrightarrow{\overline{D}\times \mathrm{Id}} \cdots,$$

где $C^p = A^p \otimes_{\mathbb{R}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)} \mathfrak{X}_h$, $A^p = \oplus_{s=1}^k A^p_s$, A^p_s — пучки ростков $\mathbb{R}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$-значных дифференциальных форм степени p, имеющих в локальных координатах вид $\omega = \{\omega_{i_1\cdots i_t j_1\cdots j_m} \Theta^{i_1}_s \wedge \cdots \wedge \Theta^{i_t}_s \wedge \Theta^{j_1}_{r_1} \wedge \cdots \wedge \Theta^{j_m}_{r_m} \mid t+m = p, r_i \neq s \ \forall i = \overline{1,m}, \omega_{i_1\cdots i_t j_1\cdots j_m}$ — гладкие функции$\}$, где $\Theta^i_s = dx^i_0 - \varepsilon_s dx^{n+i}_s$, $i = \overline{1,n}$; $\Theta^i_r = -\varepsilon_s dx^{n+i}_r$, $r \neq s$, $r = \overline{1,k}$.

Морфизмы пучков $\overline{D} = \{\overline{D}_s : A^p_s \to A^{p+1}_s\}$ корректно определяются с помощью дифференциалов, выражающихся в локальных координатах следующим образом:

$$\forall \omega \in A^p_s(U) \quad \overline{D}_s \omega = \overline{D}^s_i \omega \wedge \Theta^i_s + \sum_{r=1, r\neq s}^{k} \overline{D}^r_i \omega \wedge \Theta^i_r,$$

где $\overline{D}^s_i = \partial^s_{n+i} - \varepsilon_s \partial^0_i$, $i = \overline{1,n}$, $\overline{D}^r_i = \partial^r_{n+i}$, $r \neq s$, $r = \overline{1,k}$, $i = \overline{1,n}$.

Отметим, что пространство существенных инфинитезимальных деформаций $\mathcal{D}^*$ изоморфно первой группе когомологий $H^1(M, \mathfrak{X}_h)$ [4].

2. Описание пространства существенных инфинитезимальных деформаций через когомологии Чеха

Пусть M — компактное многообразие с заданной на нем k-дуальной структурой, и деформация этого многообразия задана с помощью деформации $\mathcal{A}(t) = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha(t))\}$ некоторого атласа $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ с $\mathbb{R}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$-дифференцируемыми функциями склейки, где $\{U_\alpha\}$ — покрытие Лере. Построим на $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ векторное поле следующим образом: зафиксируем точку $y \in V_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$ и пусть $y = \varphi_\alpha(x)$, $x \in U_{\alpha\beta}$. Рассмотрим кривую $\varphi_{\alpha\beta}(t)(y)$, определенную на некотором интервале $(-\delta, \delta)$, и вычислим ее касательный вектор

$$\widetilde{v}_{\beta\alpha}(y) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi_{\alpha\beta}(t)(y) \in T_y V_{\beta\alpha}.$$

Полученное векторное поле гладкое в силу гладкости отображения $\varphi_{\alpha\beta}(t)$ $\forall t : |t| < \delta$. Более того, это векторное поле голоморфное, т. к. является касательным к однопараметрическому семейству $f(t) = \varphi_{\beta\alpha}(t) \circ \varphi_{\alpha\beta}$ $\mathbb{R}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$-дифференцируемых функций.

С помощью векторного поля $\widetilde{v}_{\beta\alpha}$ на $V_{\beta\alpha}$ построим векторное поле $v_{\beta\alpha}$ на $U_{\alpha\beta}$: $v_{\beta\alpha} = D\varphi_\beta^{-1}(\widetilde{v}_{\beta\alpha})$, которое будет голоморфным на M.

Векторные поля $\{v_{\beta\alpha}\}$ являются 1-коциклами на покрытии $\{U_\alpha\}$ с коэффициентами в пучке голоморфных векторных полей $\mathfrak{X}_h$, т. к. они обладают следующими свойствами:

1) $v_{\alpha\alpha} = 0$ на U_α;
2) $v_{\alpha\beta} = -v_{\beta\alpha}$ на $U_\alpha \bigcap U_\beta$;
3) $v_{\alpha\beta} + v_{\beta\gamma} + v_{\gamma\alpha} = 0$ на $U_\alpha \bigcap U_\beta \bigcap U_\gamma$.

Эти свойства легко проверить, исходя из определения голоморфных векторных полей и из свойства функций склейки

$$\varphi_{\alpha\beta}(t) \circ \varphi_{\beta\gamma}(t) \circ \varphi_{\gamma\alpha}(t) = \mathrm{Id}\,.$$

Коцикл $\{v_{\beta\alpha}\} \in Z^1(\{U_\alpha\}, \mathfrak{X}_h)$ называется инфинитезимальной деформацией атласа $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$. Если деформация $\mathcal{A}(t)$ атласа $\mathcal{A}$ является несущественной, т. е. функции склейки имеют вид

$$\varphi_{\beta\alpha}(t) = \eta_\beta(t) \circ \varphi_{\beta\alpha}(0) \circ \eta_\alpha^{-1}(t),$$

где $\eta_\alpha(t)$ — $\mathbb{R}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$-диффеоморфизмы такие, что $\eta_\alpha(0) = \mathrm{Id}$, то инфинитезимальная деформация $\{v_{\beta\alpha}\}$ называется несущественной. Векторные поля $\{v_{\beta\alpha}\}$ будут кограницами на покрытии $\{U_\alpha\}$ с коэффициентами в пучке $\mathfrak{X}_h$, т. е. $v_{\beta\alpha} = w_\beta - w_\alpha$, где $w_\alpha = D\varphi_\alpha^{-1}\big(\frac{d\eta_\alpha}{dt}\big|_{t=0}\big) \in \mathfrak{X}_h(U_\alpha)$, $w_\beta = D\varphi_\beta^{-1}\big(\frac{d\eta_\beta}{dt}\big|_{t=0}\big) \in \mathfrak{X}_h(U_\beta)$.

Переходя к инъективному пределу по покрытию, можно показать, что коцикл $\{v_{\alpha\beta}\}$ определяет класс когомологий Чеха $\check{H}^1(M, \mathfrak{X}_h) \cong \check{H}^1(\{U_\alpha\}, \mathfrak{X}_h)$.

Утверждение 1. *Существует гомоморфизм абелевых групп*

$$\alpha : \check{H}^1(M, \mathfrak{X}_h) \to \mathcal{D}^*$$

такой, что если по деформации многообразия M построены инфинитезимальная деформация атласа $\{v_{\alpha\beta}\}$ и инфинитезимальная деформация G-структуры $v = \frac{d\widetilde{s}(t)}{dt}\big|_{t=0}$, то $\alpha([v_{\alpha\beta}]) = v$.

3. Препятствие к интегрируемости инфинитезимальной деформации

Пусть $\{v_{\alpha\beta}\} \in Z^1(\{U_\alpha\}, \mathfrak{X}_h)$, т. е. $\{v_{\alpha\beta}\}$ является инфинитезимальной деформацией атласа $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, где $\{U_\alpha\}$ — покрытие Лере [5].

Определение 5. Инфинитезимальная деформация $\{v_{\alpha\beta}\}$ называется интегрируемой, если существует деформация $\mathcal{A}(t) = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha(t))\}$ заданного атласа $\mathcal{A}$, порождающая коцикл $\{v_{\alpha\beta}\}$.

Для любых двух коциклов $\{v_{\alpha\beta}\}, \{w_{\alpha\beta}\} \in Z^1(\{U_\alpha\}, \mathfrak{X}_h)$ построим скобку следующим образом:

$$\xi_{\gamma\beta\alpha} = [v, w]_{\gamma\beta\alpha} = \frac{1}{2}([v_{\gamma\beta}, w_{\beta\alpha}] + [w_{\gamma\beta}, v_{\beta\alpha}]),$$

где $[\ ,\ ]$ — скобка векторных полей. Тогда $\xi_{\gamma\beta\alpha} \in Z^2(\{U_\alpha\}, \mathfrak{X}_h)$.

Если один из коциклов является кограницей, то результат их произведения также будет кограницей. Действительно, пусть $v_{\alpha\beta} = v_\alpha - v_\beta$, где $v_\alpha, v_\beta \in \mathfrak{X}_h$, тогда

$$\xi_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}([v_\alpha - v_\beta, w_{\beta\gamma}] + [w_{\alpha\beta}, v_\beta - v_\gamma]) = \frac{1}{2}([w_{\alpha\gamma}, v_\alpha + v_\gamma] + \\ + [w_{\alpha\beta}, v_\alpha + v_\beta] + [w_{\beta\gamma}, v_\beta + v_\gamma]) = \xi_{\gamma\alpha} + \xi_{\alpha\beta} + \xi_{\beta\gamma} \in B^2(\{U_\alpha\}, \mathfrak{X}_h).$$

Значит, скобку можно перенести на классы когомологий

$$[\xi] : \check{H}^1(\{U_\alpha\}, \mathfrak{X}_h) \times \check{H}^1(\{U_\alpha\}, \mathfrak{X}_h) \to \check{H}^2(\{U_\alpha\}, \mathfrak{X}_h)$$

и, переходя к инъективному пределу по покрытию Лере $\{U_\alpha\}$, получить произведение

$$[\xi] : \check{H}^1(M, \mathfrak{X}_h) \times \check{H}^1(M, \mathfrak{X}_h) \to \check{H}^2(M, \mathfrak{X}_h).$$

Утверждение 2. *Если коцикл $\{v_{\beta\alpha}\}$ является интегрируемой инфинитезимальной деформацией заданного атласа $\mathcal{A}$, то класс когомологий скобки $[v, v]_{\gamma\beta\alpha} = 0$ принадлежит $\check{H}^2(M, \mathfrak{X}_h)$.*

Доказательство. Так как коцикл $\{v_{\alpha\beta}\}$ является интегрируемой инфинитезимальной деформацией, то по определению существует деформация $\mathcal{A}(t) = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha(t))\}$ исходного атласа $\mathcal{A}$, и в этом случае $v_{\alpha\beta} = D\varphi_\alpha^{-1} \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \varphi_{\alpha\beta}(t)$. Обозначим $\widetilde{v}_{\gamma\alpha} = \frac{d\varphi_{\gamma\alpha}(t)}{dt}$ и введем семейство коциклов $v_{\gamma\alpha}(t) = D\varphi_\gamma^{-1}(t)\widetilde{v}_{\gamma\alpha}(t)$. Дифференцируя по t равенство $v_{\gamma\alpha}(t) = v_{\gamma\beta}(t) + v_{\beta\alpha}(t)$, при $t = 0$ получим

$$\psi_\gamma \widetilde{v}_{\gamma\alpha} - \psi_\gamma \widetilde{v}_{\gamma\beta} - \psi_\beta \widetilde{v}_{\beta\alpha} = -\dot{v}_{\gamma\alpha} + \dot{v}_{\gamma\beta} + \dot{v}_{\beta\alpha}, \tag{1}$$

где $\psi_\gamma = \frac{d}{dt} D\varphi_\gamma^{-1}(t)$, $\widetilde{v}_{\gamma\alpha} = \widetilde{v}_{\gamma\alpha}(0)$, $\dot{v}_{\gamma\alpha} = D\varphi_\gamma^{-1}(0) \frac{d\widetilde{v}_{\gamma\alpha}}{dt}\big|_{t=0}$.

Векторные поля $\dot{v}_{\gamma\alpha} \in \mathfrak{X}_h(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)$, т.к. если $v(t) \in \mathfrak{X}_h$, то для каждого структурного аффинора J_s выполняется равенство $L_v J_s = 0$. Дифференцируя по t это равенство, получим $L_{\dot{v}} J_s = 0$, т.е. $\dot{v}(t) \in \mathfrak{X}_h$. Значит, правая часть равенства (1) есть кограница.

Покажем, что левая часть равенства (1) совпадает со скобкой $[v, v]_{\alpha\beta\gamma} = [v_{\alpha\beta}, v_{\beta\gamma}]$. Применим оператор $D\varphi_\gamma$ к $\psi_\gamma \widetilde{v}_{\gamma\alpha}$, обозначив $\widetilde{v}_\gamma = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \varphi_\gamma(t)$:

$$D\varphi_\gamma \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} D\varphi_\gamma^{-1}(t) \widetilde{v}_{\gamma\alpha} \right) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} D(\varphi_\gamma \circ \varphi_\gamma^{-1}(t) \widetilde{v}_{\gamma\alpha}) = L_{\widetilde{v}_\gamma} \widetilde{v}_{\gamma\alpha} = [\widetilde{v}_\gamma, \widetilde{v}_{\gamma\alpha}].$$

Подействовав оператором $D\varphi_\gamma^{-1}$ на последнее равенство, получим

$$\psi_\gamma \widetilde{v}_{\gamma\alpha} = [v_\gamma, v_{\gamma\alpha}], \quad \text{где} \quad v_\gamma = D\varphi_\gamma^{-1} \widetilde{v}_\gamma.$$

Голоморфное векторное поле $v_{\gamma\alpha}$ можно представить в виде $v_{\gamma\alpha} = v_\gamma - v_\alpha$, где $v_\gamma = D\varphi_\gamma^{-1}(\frac{d\varphi_\gamma}{dt}\big|_{t=0})$ — векторное поле на U_γ, $v_\alpha = D\varphi_\alpha^{-1}(\frac{d\varphi_\alpha}{dt}\big|_{t=0})$ — векторное поле на U_α. Тогда $\psi_\gamma \widetilde{v}_{\gamma\alpha} = [v_\gamma, v_{\gamma\alpha}] = [v_\gamma, v_\gamma - v_\alpha] = -[v_\gamma, v_\alpha] = [v_\alpha, v_\gamma]$ и, следовательно,

$$-\psi_\gamma \widetilde{v}_{\gamma\alpha} + \psi_\gamma \widetilde{v}_{\gamma\beta} + \psi_\beta \widetilde{v}_{\beta\alpha} = -[v_\alpha, v_\gamma] + [v_\alpha, v_\beta] + [v_\beta, v_\gamma] = [v_\alpha - v_\beta, v_\beta - v_\gamma] = [v_{\alpha\beta}, v_{\beta\gamma}] = [v, v]_{\alpha\beta\gamma}.$$

Таким образом, $[v, v]_{\alpha\beta\gamma} \in B^2(M, \mathfrak{X}_h)$, т.е. $[[v, v]_{\alpha\beta\gamma}] = 0 \in \check{H}^2(M, \mathfrak{X}_h)$. Другими словами, если $[[v, v]_{\alpha\beta\gamma}] \neq 0$, то не существует деформации $\mathcal{A}(t) = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha(t))\}$, для которой

$$v_{\alpha\beta} = D\varphi_\alpha^{-1} \left(\frac{d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(t)(x)}{dt} \right).$$

В этом смысле скобка $[v, v]_{\alpha\beta\gamma}$ является препятствием к интегрируемости инфинитезимальной деформации $\{v_{\alpha\beta}\}$.

Для любых векторных форм $\omega \in C^p_s = A^p_s \otimes \mathfrak{X}_h$ и $\eta \in C^r_s = A^r_s \otimes \mathfrak{X}_h$ определим дифференциальную скобку

$$[\ ,\ ] : C^p_s \times C^r_s \to C^{p+r}_s,$$
$$[\omega, \eta] = (\omega^i \wedge \widetilde{D}_i \eta^j - (-1)^{pr} \eta^i \wedge \widetilde{D}_i \omega^j)\widetilde{D}_j,$$

где $\widetilde{D}_j = (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k)\Big(\sum\limits_{q=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_q^{n+j}}\Big)$, $i, j = \overline{1, n}$.

Проверим, что определение скобки корректно. Пусть задана $\mathbb{R}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$-дифференцируемая замена координат

$$\begin{cases} x_0^{i'} = x_0^{i'}(x_0^i), \\ x_q^{n+i'} = x_q^{n+i'}(x_0^i, x_q^{n+i}), \quad q = \overline{1,k}, \quad i, i' = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Тогда из условий Шефферса [1] следует, что функции $x^{i'}$, $x^{n+i'}$ имеют свойства

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = \frac{\partial x_q^{n+i'}}{\partial x_q^{n+i}}, \qquad \frac{\partial x^{i'}}{\partial x_q^{n+i}} = 0.$$

Убедимся, что при такой замене операторы $\widetilde{D}_j$ выражаются друг через друга:

$$\widetilde{D}_{j'} = (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k)\Big(\sum_{q=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_q^{n+j'}}\Big) = (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k)\Big(\sum_{q=1}^{k} \frac{\partial x_q^{n+i}}{\partial x_q^{n+j'}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_q^{n+i}}\Big) =$$
$$= (\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k)\Big(\sum_{q=1}^{k} \frac{\partial x_0^i}{\partial x_0^{j'}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_q^{n+i}}\Big) = \frac{\partial x_0^i}{\partial x_0^{j'}}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k)\Big(\sum_{q=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_q^{n+i}}\Big) = \frac{\partial x_0^i}{\partial x_0^{j'}}\widetilde{D}_i = B^i_{i'}\widetilde{D}_i.$$

Так как векторы $\{\widetilde{D}_i\}$ образуют базис с $\mathbb{R}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$-дифференцируемыми функциями перехода, то они определяют расслоение, изоморфное голоморфному касательному расслоению T_hM.

Непосредственными вычислениями можно показать, что базисные 1-формы $\{\Theta^i_q\}$, $q = \overline{1,k}$, выражаются при замене координат друг через друга следующим образом:

$$\begin{cases} \Theta^{i'}_s = \Big(\dfrac{\partial x_0^{i'}}{\partial x_0^j} - \varepsilon_s \dfrac{\partial x_s^{n+i'}}{\partial x_0^j}\Big)\Theta^j_s, \\ \Theta^{i'}_r = -\varepsilon_s \dfrac{\partial x_r^{n+i'}}{\partial x_0^j}\Theta^j_s + \dfrac{\partial x_0^{i'}}{\partial x_0^j}\Theta^j_r, \quad r \neq s, \quad r = \overline{1,k}. \end{cases}$$

Используя свойства $\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = 0$ $\forall i, j = \overline{1,k}$; $\frac{\partial x_0^i}{\partial x_r^{n+j}} = 0$ $\forall r = \overline{1,k}$, легко получить, что $\widetilde{D}_{p'}(A^{j'}_{i'}) = 0$, где $A^{j'}_{i'}$ — матрицы перехода базисных 1-форм Θ^i. Используя последнее равенство, проверим корректность определения скобки: пусть

$$\omega = \omega^k_{i_1\ldots i_p}\Theta^{i_1}_s \wedge \cdots \wedge \Theta^{i_t}_s \wedge \Theta^{a_1}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \Theta^{a_m}_{i_m}, \quad t + m = p, \quad a_i \neq s,$$
$$\eta = \eta^l_{j_1\ldots j_r}\Theta^{j_1}_s \wedge \cdots \wedge \Theta^{j_q}_s \wedge \Theta^{i_1}_{b_1} \wedge \cdots \wedge \Theta^{j_u}_{b_u}, \quad q + u = r, \quad b_i \neq s.$$

Тогда

$$[\omega, \eta]^{k'}_{i'_1\ldots i'_p j'_1\ldots j'_r} = (\omega^{s'}_{[i'_1\ldots i'_p}\widetilde{D}_{s'}\eta^{k'}_{j'_1\ldots j'_r]} - (-1)^{pr}\eta^{s'}_{[j'_1\ldots j'_r}\widetilde{D}_{s'}\omega^{k'}_{i'_1\ldots i'_p]}) =$$
$$= A^{i_1}_{i'_1}\cdots A^{i_p}_{i'_p}B^{s'}_s B^s_{s'}\omega^s_{[i_1\ldots i_p}D_s(A^{j_1}_{j'_1}\cdots A^{j_r}_{j'_r}B^{k'}_k\eta^k_{j_1\ldots j_r]}) -$$
$$- (-1)^{pr}A^{j_1}_{j'_1}\cdots A^{j_r}_{j'_r}B^{s'}_s B^s_{s'}\eta^s_{[j_1\ldots j_r}D_s(A^{i_1}_{i'_1}\cdots A^{i_p}_{i'_p}B^{k'}_k\omega^k_{i_1\ldots i_p]}) =$$
$$= A^{i_1}_{i'_1}\cdots A^{i_p}_{i'_p}A^{j_1}_{j'_1}\cdots A^{j_r}_{j'_r}B^{k'}_k[\omega, \eta]^k_{i_1\ldots i_p j_1\ldots j_r} + A^{i_1}_{i'_1}\cdots A^{i_p}_{i'_p}A^{j_1}_{j'_1}\cdots A^{j_r}_{j'_r}(\omega^s_{[i_1\ldots i_p}\eta^k_{J_1\ldots J_r]} -$$
$$- (-1)^{pr}\eta^s_{[j_1\ldots j_r}\omega^k_{i_1\ldots i_p]})D_s B^{k'}_k +$$

$$+ A^{i_1}_{i'_1}\cdots A^{i_p}_{i'_p} B^{k'}_k B^{s'}_s \left(\sum_{m=1}^{r} A^{j_1}_{j'_1}\cdots A^{j_{m-1}}_{j'_{m-1}} A^{j_{m+1}}_{j'_{m+1}}\dots A^{j_r}_{j'_r} D_{s'}(A^{j_m}_{j'_m})\right)\omega^s_{[i_1\dots i_p}\eta^k_{j_1\dots j_r]} -$$

$$-(-1)^{pr} A^{j_1}_{j'_1}\cdots A^{j_r}_{j'_r} B^{k'}_k B^{s'}_s \left(\sum_{m=1}^{p} A^{i_1}_{i'_1}\cdots A^{i_{m-1}}_{i'_{m-1}} A^{i_{m+1}}_{i'_{m+1}}\cdots A^{i_p}_{i'_p} D_{s'}(A^{i_m}_{i'_m})\right)\eta^s_{[j_1\dots j_r}\omega^k_{i_1\dots i_p]} =$$

$$= A^{i_1}_{i'_1}\cdots A^{i_p}_{i'_p} A^{j_1}_{j'_1}\cdots A^{j_r}_{j'_r} B^{k'}_k [\omega,\eta]^k_{i_1\dots i_p j_1\dots j_r},$$

т. к. $\omega^s_{[i_1\dots i_p}\eta^k_{j_1\dots j_r]} - (-1)^{pr}\eta^s_{[j_1\dots j_r}\omega^k_{i_1\dots i_p]} = 0$ и $D_{s'}(A^{i_m}_{i'_m}) = 0$.

Значит, дифференциальная скобка не зависит от выбора координат. $\square$

Утверждение 3. *Дифференциальная скобка* $[\ ,\ ] : C^p_s \times C^r_s \to C^{p+r}_s$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $[\omega,\eta] = (-1)^{pr+1}[\eta,\omega]$;
2) $\overline{D}[\omega,\eta] = [\overline{D}\omega,\eta] + (-1)^p[\omega,\overline{D}\eta]$ *для любых* $\omega \in C^p_s$, $\eta \in C^r_s$.

Из второго условия и того, что $\overline{D}V = 0$ для инфинитезимальной деформации V, следует, что скобка $[V,V]$ является $\overline{D}$-замкнутой, а значит, определяет класс в $H^2(M,\mathfrak{X}_h)$.

Утверждение 4. *Дифференциальная скобка* $[\ ,\ ]$ *определяет умножение*

$$H^i(M,\mathfrak{X}_h) \times H^j(M,\mathfrak{X}_h) \to H^{i+j}(M,\mathfrak{X}_h).$$

Доказательство. Если ω и η — замкнутые формы, то

$$\overline{D}[\omega,\eta] = [\overline{D}\omega,\eta] + (-1)^p[\omega,\overline{D}\eta] = 0.$$

Если, например, форма ω является точной, то точной будет и скобка $[\omega,\eta]$, т. к. для $\omega = \overline{D}\nu$ $[\omega,\eta] = [\overline{D}\nu,\eta] = \overline{D}[\nu,\eta]$. $\square$

Рассмотрим изоморфизмы

$$\varphi^* : \check{H}^p(M,\mathfrak{X}_h) \to H^p(M,\mathfrak{X}_h),$$
$$\psi^* : H^p(C^\cdot,\overline{D}) \to H^p(M,\mathfrak{X}_h),$$
$$\rho^* = (\psi^*)^{-1}\circ\varphi^* : \check{H}^p(M,\mathfrak{X}_h) \to H^p(C^\cdot,\overline{D}).$$

Утверждение 5. *Для любых двух коциклов* $\{v_{\alpha\beta}\}$, $\{w_{\alpha\beta}\}$

$$\rho^*[[v,w]_{\alpha\beta\gamma}] = [\rho^*[\{v_{\alpha\beta}\}],\rho^*[\{w_{\beta\gamma}\}]].$$

Для доказательства покажем, как строится соответствие между $\xi_{\gamma\beta\alpha} = [v,w]_{\gamma\beta\alpha}$ и скобкой $[V,W]$. Если коциклы $v_{\gamma\beta} = v_\gamma - v_\beta$, $w_{\gamma\beta} = w_\gamma - w_\beta$, 2-коцикл $\xi_{\gamma\beta\alpha} = \eta_{\gamma\beta} + \eta_{\alpha\gamma} + \eta_{\beta\alpha}$, где $\eta_{\gamma\beta} = \frac{1}{2}([v_\gamma,w_\beta] + [w_\gamma,v_\beta])$, т. е. $\xi_{\gamma\beta\alpha}$ является кограницей, то $\overline{D}\xi_{\gamma\beta\alpha} = \overline{D}\eta_{\gamma\beta} + \overline{D}\eta_{\alpha\gamma} + \overline{D}\eta_{\beta\alpha} = 0$, где

$$\overline{D}\eta_{\gamma\beta} = \frac{1}{2}\overline{D}([v_\gamma,w_\beta] + [w_\gamma,v_\beta]) = \frac{1}{2}([\overline{D}v_\gamma,w_\beta] + [\overline{D}w_\gamma,v_\beta] + [v_\gamma,\overline{D}w_\beta] + [w_\gamma,\overline{D}v_\beta]) = \nu_\gamma - \nu_\beta,$$

$$\nu_\gamma = -\frac{1}{2}([\overline{D}v_\gamma,w_\gamma] + [\overline{D}w_\gamma,v_\gamma]).$$

Отсюда $\overline{D}(\overline{D}\eta_{\gamma\beta}) = \overline{D}\nu_\gamma - \overline{D}\nu_\beta = 0$, а значит, $\overline{D}\nu_\beta$ согласованы на пересечениях и составляют векторную 2-форму U такую, что $U|_{U_\gamma} = \nu_\gamma$ и $[V,W] = U$. Если $\{v_{\alpha\beta}\}$, $\{w_{\alpha\beta}\}$ определяют классы V, W из $H^1(C^\cdot,\overline{D})$, то скобка $\xi_{\alpha\beta\gamma} = [v,w]_{\alpha\beta\gamma}$ определяет класс $[V,W] \in H^2(C^\cdot,\overline{D})$ [6]. $\square$

Определение 6. Инфинитезимальная деформация V называется интегрируемой, если существует деформация $\overline{J}(t)$ k-дуальной структуры, порождающая V.

Из утверждения 5 следует, что если V — интегрируемая инфинитезимальная деформация k-дуальной структуры, то класс дифференциальной скобки $[V,V]$ в $H^2(M,\mathfrak{X}_h)$ тривиален.

Литература

1. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. *Пространства над алгебрами.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. – 262 с.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
3. Поммаре Ж. *Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли.* – М.: Мир, 1983. – 398 с.
4. Бояршинова А.В. *О пространстве существенных инфинитезимальных деформаций многообразия над алгеброй k-плюральных чисел* // Тр. геом. семин. – 1997. – Вып. 23. – С. 7–21.
5. Уэллс Р. *Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях.* – М.: Мир, 1976. – 288 с.
6. Kodaira K., Spencer D.C. *On deformations of complex analytic structures*, I–II // Ann. Math. – 1958. – V. 67. – P. 328–466.

Казанский энергетический институт

Поступила
07.06.2000