ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 2 (501)

УДК 517.544

И.Т. ДЕНИСЮК

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЛАМЕ В ОБЛАСТЯХ С КУСОЧНО-ГЛАДКИМИ ГРАНИЦАМИ

Решение двумерных задач сопряжения аналитических функций в заданных и аффинно-преобразованных областях с кусочно-гладкими границами [1], [2] позволили получить решение ряда прикладных задач механики сплошной среды [3]–[9]. В данной статье изучается задача сопряжения решений уравнений Ламе [10] в трехмерных областях с кусочно-гладкими границами.

Постановка задачи. Пусть в трехмерном пространстве R_3 содержится односвязная конечная область V_1, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью S, которая содержит непересекающиеся гладкие замкнутые особые линии (множества угловых точек) и не принадлежащие им конические точки.

Построим векторные функции $\overline{u}_i(M) = \{u_{1i}(M), u_{2i}(M), u_{3i}(M)\}$ ($i = \overline{0,1}$, $M = M(x_1, x_2, x_3)$), определенные в соответствующих областях V_i, где $V_0 = R_3 \setminus V_1$, удовлетворяющие уравнению Ламе [10]

$$(\lambda_i + 2\mu_i) \operatorname{grad} \operatorname{div} \overline{u}_i(M) - \mu_i \operatorname{rot} \overline{u}_i(M) = 0, \tag{1}$$

где $\lambda_i = \frac{2\nu_i\mu_i}{1-2\nu_i}$, $0 < \nu_i < 0.5$; $\mu_i \in (0, \infty)$, $\mu_i \neq \infty$,
и условиям сопряжения на поверхности S раздела областей V_0 и V_1:
в точках гладкости

$$\overline{v}_0^-(M) - \overline{u}_1^+(M) = 0, \quad N_{n0}^-[\overline{u}_0(M)] - N_{n1}^+[\overline{u}_1(M)] = 0, \tag{2}$$

в особых точках M^0

$$\lim_{M \to M^0} (\overline{u}_0^-(M) - \overline{u}_1^+(M)) = 0, \quad \lim_{M \to M^0} (N_{n0}^-[\overline{u}_0(M)] - N_{n1}^+[\overline{u}_1(M)]) = 0, \tag{3}$$

где оператор $N_{ni}[\ ]$ действует согласно правилу

$$N_{ni}[\overline{u}_i(M)] = 2\mu_i \frac{\partial \overline{u}_i(M)}{\partial n} + \lambda_i \overline{n} \operatorname{div} \overline{u}_i(M) + \mu_i [\overline{n}, \operatorname{rot} \overline{u}_i(M)],$$

$\overline{n}$ — нормаль к поверхности S, внешняя к области V_1; $\overline{u}_i^{\pm}(M)$, $N_{ni}^{\pm}[\overline{u}_i(M)]$, $i = \overline{0,1}$, — граничные значения векторных функций $\overline{u}_i(M)$, $N_{ni}[\overline{u}_i(M)]$ при подходе к поверхности S со стороны области V_1 (знак “+”) или V_0 (знак “−”), $[\dots, \dots]$ — символ векторного произведения.

В точках особых линий или конических точках реализация уравнений Ламе понимается в смысле выполнения равенства

$$\lim_{\Delta V \to M^0} \iiint\limits_{\Delta V} ((\lambda_i + 2\mu_i) \operatorname{grad} \operatorname{div} \overline{u}_i(x_1, x_2, x_3) - \mu_i \operatorname{rot} \operatorname{rot} \overline{u}_i(x_1, x_2, x_3)) dv = 0, \tag{4}$$

что физически означает выполнение условий равновесия среды в особых точках, т. е. при стягивании области ΔV в особую точку M^0.

Функция $\overline{u}_0(M)$, определенная в области V_0, при $M \to \infty$ принимает заданное значение $\overline{u}_0^{(0)}(M)$, удовлетворяющее уравнению Ламе.

К такой задаче приводится ряд задач механики сплошной среды (теории упругости, термоупругости) [11], [13].

Асимптотика решений уравнений Ламе. Изучим поведение решений уравнения Ламе (1) вблизи особенностей поверхностей раздела областей. Пусть гладкая замкнутая особая линия $L = S_1 \cap S_2$, где S_g, $g = 1, 2$, определяется уравнением $f_g(x_1, x_2, x_3) = 0$. Натянем на L гладкую поверхность S_0, описываемую уравнением $f_0(x_1, x_2, x_3) = 0$, на которой введем криволинейные ортогональные координаты u, v так, что при $v = v_0 = \mathrm{const}$ определяется особая линия L. Параметризуем кривую L и положим $u = s$, где s — длина дуги, отсчитываемая от некоторой начальной точки [14]. Величины углов, образованных поверхностями в точках особой линии, таковы:

$$\theta_1(s) = \arccos((\operatorname{grad} f_1, \operatorname{grad} f_0)/(|\operatorname{grad} f_1|\,|\operatorname{grad} f_0|)),$$
$$\theta_2(s) = \arccos((\operatorname{grad} f_2, \operatorname{grad} f_0)/(|\operatorname{grad} f_2|\,|\operatorname{grad} f_0|)),$$

здесь $(\ldots, \ldots)$ — символ скалярного произведения.

Пусть $\overline{n}\,\overline{n}_1\overline{n}_2$ — сопровождающий трехгранник поверхности S_0 в точке $M_0 \in L$, где $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$ — орты, лежащие в плоскости, касательной к S_0 в точке M_0, $\overline{n}_1$ — касательный вектор к кривой L, $\overline{n} \perp \overline{n}_1$, $\overline{n} \perp \overline{n}_2$. Точка M плоскости векторов $\overline{n}$, $\overline{n}_2$ определяется полярными координатами $\rho = |MM_0|$, $\theta = \angle(\overline{M_0M}, \overline{n}_2)$. Соотношение

$$\overline{r} = \overline{r}_0 + \rho(\cos\theta\overline{n}_2(s) + \sin\theta\overline{n}(s)), \tag{5}$$

где $\overline{r}_0$, $\overline{r}$ — радиус-векторы точек M_0, M, определяет переменные ρ, θ, s как криволинейные ортогональные координаты точки M в локальной области особой линии с коэффициентами Ламе $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = 1 + \rho H_0$, $H_0 = -(p_0\cos\theta + r_{11}\sin\theta)$, $p_0 = -|\overline{r}_s|_v/|\overline{r}_v|$, $r_{11} = (\overline{r}, \overline{r}_{ss})/|\overline{r}_s|$.

Лемма 1. *Если характеристические уравнения*

$$\sin m_q\omega = \pm m_q \sin\omega, \quad \mu^*\sin m_q\omega = \pm m_q\sin\omega, \tag{6}$$

где $\mu^* = \frac{\varkappa_1\gamma - \varkappa_0}{1-\gamma}$, $\varkappa_i = 3 - 4\nu_i$, $i = \overline{0,1}$, $\omega(s) = \theta_1(s) - \theta_2(s)$, $\gamma = \mu_0/\mu_1$, *в точках особой линии* L *поверхности раздела* S *имеют корни* $m_q \in (0,1)$ *и величина* $m_5 = \pi/(2\pi - \omega(s)) < 1$, *то решение уравнения Ламе в окрестности особой линии имеет асимптотику*

$$\overline{u} = \{u_\rho, u_\theta, u_s\}, \quad u_\rho = \rho^{m_q}A_q + o(\rho^{m_q}), \quad u_\theta = \rho^{m_q}B_q + o(\rho^{m_q}), \quad u_s = \rho^{m_5}V + o(\rho^{m_5}),$$
$$N_n[\overline{u}] = \{\tau_{\rho\theta}, \sigma_\theta, \tau_{\theta s}\}, \quad \tau_{\rho\theta} = \mu\rho^{m_q-1}\left[(m_q-1)B_q + \frac{\partial A_q}{\partial\theta}\right] + O(1),$$
$$\sigma_\theta = 2\mu\rho^{m_q-1}\left\{[\beta(1+m_q)+1]A_q + (\beta+1)\frac{\partial B_q}{\partial\theta}\right\} + O(1), \quad \tau_{\theta s} = \mu\rho^{m_5-1}\frac{\partial C}{\partial\theta} + O(1), \tag{7}$$

где

$$A_q = (m_q - \varkappa)a_{1q}(s)\sin(m_q-1)\theta + (\varkappa - m_q)b_{1q}(s)\cos(m_q-1)\theta +$$
$$+c_{1q}(s)\sin(m_q+1)\theta - d_{1q}(s)\cos(m_q+1)\theta,$$
$$B_q = (m_q + \varkappa)a_{1q}(s)\cos(m_q-1)\theta + (m_q + \varkappa)b_{1q}(s)\sin(m_q-1)\theta +$$
$$+c_{1q}(s)\cos(m_q+1)\theta + d_{1q}(s)\sin(m_q+1)\theta,$$
$$C = g_1(s)\cos m_5\theta + h_1(s)\sin m_5\theta, \quad \beta = \frac{\nu}{1-2\nu}\theta, \tag{8}$$

ρ, θ, s — *локальные криволинейные координаты* (5).

Здесь и далее при доказательстве леммы 1, а также леммы 2 идентифицирующий индекс i, соотносящий величины с соответствующими областями, с целью упрощения записи опущен, кроме величин, определяющих μ^* и γ.

Доказательство. Уравнение Ламе (1) при линейных граничных условиях (3), (4) допускает преобразование подобия

$$\overline{u} = A\overline{u}(Bx_1, Bx_2, Bx_3), \tag{9}$$

где $\overline{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$, $A = A(B)$, $A, B \in R$. Дифференцируя соотношение (9) по B, получим систему уравнений

$$u_\alpha \frac{\partial A}{\partial B} + A(\operatorname{grad} u_\alpha, \overline{r}) = 0, \quad \alpha = \overline{1,3}. \tag{10}$$

Решением уравнений (10) являются однородные функции переменных x_1, x_2, x_3 m-го порядка

$$u_\alpha = F_\alpha(x_1, x_2, x_3). \tag{11}$$

Подставляя (5) в (11), получаем представление компонент вектора $\overline{u}$:

$$u_\rho = \rho^{m_{\rho q}} A_q(\theta, s), \quad u_\theta = \rho^{m_{\theta q}} B_q(\theta, s), \quad u_s = \rho^{m_5} C(\theta, s), \tag{12}$$

где $m_{\rho q} = m_{\rho q}(s)$, $m_{\theta q} = m_{\theta q}(s)$, $m_5 = m_5(s)$. Удовлетворяя с помощью представлений (12) уравнению (4), получим систему дифференциальных уравнений, которая совместима при $m_{\rho q} = m_{\theta q} = m_q$ и расщепляется на систему

$$\begin{aligned} &(m_q - \varkappa)\frac{\partial B_q}{\partial \theta} + (1 - 2\nu)\frac{\partial^2 A_q}{\partial \theta^2} + 2(1 - \nu)(m_q^2 - 1)A_q = 0, \\ &(m_q + \varkappa)\frac{\partial A_q}{\partial \theta} + 2(1 - \nu)\frac{\partial^2 B_q}{\partial \theta^2} + (1 - 2\nu)(m_q^2 - 1)B_q = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

и уравнение

$$m_3^2 C + \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} = 0. \tag{14}$$

Решение системы (13) и уравнения (14) дается формулами (8), откуда следует представление вектора $N_n[\overline{u}]$ в виде (7). Удовлетворяя с помощью представлений (8), (12) граничным условиям (3) и полагая $\theta = \theta_1(s)$ и $\theta = \theta_2(s)$, получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно величин $a_{1q}(s)$, $b_{1q}(s)$, $c_{1q}(s)$, $d_{1q}(s)$, а также однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно величин $g_1(s)$, $h_1(s)$. Нетривиальные решения таких систем существуют при равенстве их главных определителей нулю, что и дает характеристические уравнения (6) и величину $m_5 = \pi/(2\pi - \omega)$. Число положительных корней $m_q \in (0, 1)$ уравнений (6), меньших единицы, не превышает четырех [15].

В случае плоской особой линии утверждение леммы совпадает с результатами работы [16]. $\square$

Пусть точка O является вершиной конической поверхности с прямолинейными образующими и гладкой криволинейной направляющей L_0, очерченной ортом $\overline{r}_0(s)$ образующей с началом в точке O. Следуя работе [17], введем локальные криволинейные координаты ρ_1, θ_1, s_1 согласно равенству

$$\overline{r}_1 = \rho_1(\overline{r}_0(s_1)\sin\theta_1 + \overline{n}_3(s_1)\cos\theta_1), \tag{15}$$

где $\overline{r}_1$ — радиус-вектор точки $M(x_1, x_2, x_3)$, $\overline{n}_3(s_1) = \left[\overline{r}_0(s_1), \frac{d\overline{r}_0(s_1)}{ds_1}\right]$ — нормаль к образующей $\overline{r}_0(s_1)$ конической поверхности в точке O, $\rho_1 = |\overline{r}_1|$, θ_1 — угол, образованный вектором $\overline{r}_1$ с нормалью $\overline{n}_3(s_1)$. Такие координаты ортогональны с коэффициентами Ламе $h_1 = 1$, $h_2 = \rho_1$, $h_3 = \rho_1 H_{0k}$, $H_{0k} = \sin\theta_1 + d\cos\theta_1$, $d = \left|\left[\overline{r}_0, \frac{d^2\overline{r}_0}{ds_1^2}\right]\right|$ и при $\theta_1 = \pi/2$ соотношения (15) описывают коническую поверхность. Переходя в соотношениях (11) к координатам ρ_1, θ_1, s_1 согласно (15), получим

$$u_{\rho_1} = \rho_1^{m_{k1}} A_{0k}(\theta_1, s_1), \quad u_{\theta_1} = \rho^{m_{k2}} B_{0k}(\theta_1, s_1), \quad u_{s_1} = \rho_1^{m_{k3}} C_k(\theta_1, s_1), \quad m_{kq} = m_{kq}(\theta_1, s_1), \quad q = \overline{1,3}. \tag{16}$$

Подставляя представления (16) в уравнение (4), записанное в координатах ρ_1, θ_1, s_1, получим систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных $A_{0k}(\theta_1, s_1)$, $B_{0k}(\theta_1, s_1)$, $C_k(\theta_1, s_1)$, $m_{kq}(\theta_1, s_1)$, которая из-за громоздкости не выписана. Для ее совместимости необходимо, чтобы $m_{kq}(\theta_1, s_1) = \mathrm{const}$. Рассмотрим сначала случай, когда величина H_{0k} в выражении коэффициента Ламе h_3 не зависит от переменной s_1, что отвечает, например, круговым коническим поверхностям. Исходная система дифференциальных уравнений совместима, если $m_{k1} = m_{k2} = m_k$, и распадается на две системы:

$$\begin{gathered}
aA_{0k} + \frac{1}{H_{0k}}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(H_{0k}\frac{\partial A_{0k}}{\partial\theta_1}\right) + \frac{1}{H_{0k}}\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial A_{0k}}{\partial s_1}\right) + b\frac{1}{H_{0k}}\frac{\partial}{\partial\theta_1}(H_{0k}B_{0k}) = 0,\\
c\frac{\partial A_{0k}}{\partial\theta_1} + \mu_0\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\frac{1}{H_{0k}}\frac{\partial}{\partial\theta_1}(H_{0k}B_{0k})\right) + m_k(m_k+1)B_{0k} + \frac{1}{H_{0k}}\frac{\partial}{\partial s_1}\left(H_{0k}\frac{\partial B_{0k}}{\partial s_1}\right) = 0,\\
c\frac{1}{H_{0k}}\frac{\partial A_{0k}}{\partial s_1} + \frac{\mu_0}{H_{0k}}\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{1}{H_{0k}}\frac{\partial}{\partial\theta_1}(H_{0k}B_{0k})\right) - \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\frac{1}{H_{0k}}\frac{\partial B_{0k}}{\partial s_1}\right) = 0,\\
\frac{\partial C_k}{\partial s_1} = 0, \quad \mu_0\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\frac{1}{H_{0k}}\frac{\partial C_k}{\partial s_1}\right) - \frac{1}{H_{0k}}\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{1}{H_{0k}}\frac{\partial}{\partial\theta_1}(H_{0k}c_k)\right) = 0,\\
\frac{\mu_0}{H_{0k}}\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{1}{H_{0k}}\frac{\partial C_k}{\partial s_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\frac{1}{H_{0k}}\frac{\partial}{\partial\theta_1}(H_{0k}C_k)\right) + m_{k3}(m_{k3}+1)C_k = 0,\\
a = \mu_0(m_k+2)(m_k-1), \quad b = \mu_0(m_k-1) - (1+m_k), \quad c = \mu_0(2+m_k) - m_k,\\
\mu_0 = 2(1-\nu)/(1-2\nu), \quad A_{0k} = A_{0k}(\theta_1, s_1), \quad B_{0k} = B_{0k}(\theta_1, s_1), \quad C_k = C_k(\theta_1, s_1).
\end{gathered}$$

Решения таких систем получены в [17], и на основе их с учетом соотношений (16) находим следующие представления:

$$\begin{aligned}
u_{\rho_1} &= \rho_1^{m_k}(N_1 P_{m_k-1}(\cos\theta_{11}) + N_2 P_{m_k+1}(\cos\theta_{11})),\\
u_{\theta_1} &= \rho_1^{m_k} d(d_1 N_1 P_{m_k-1}(\cos\theta_{11}) + d_2 N_2 P_{m_k+1}(\cos\theta_{11}))/d\theta_{11},\\
u_{s_1} &= \rho_1^{m_{3k}} N_3 P^1_{m_{k3}}(\cos\theta_{11}),
\end{aligned} \tag{17}$$

где $P_{m_k\pm 1}(\cos\theta_{11})$, $P^1_{m_{k3}}(\cos\theta_{11})$ — функции Лежандра, $\theta_{11} = \theta_1 + \alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = d$, $H_{0k} = \sqrt{1+d^2}\sin\theta_{11}$, N_r, $r = \overline{1,3}$, — произвольные постоянные. Пусть H_{0k} является функцией переменных θ_1 и s_1, тогда исходная система дифференциальных уравнений совместима при $m_{k1} = m_{k2} = m_{k3} = m_k$ и принимает вид

$$\begin{gathered}
aA_{0k} + \frac{1}{H_{0k}}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(H_{0k}\frac{\partial A_{0k}}{\partial\theta_1}\right) + \frac{1}{H_{0k}}\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{1}{H_{0k}}\frac{\partial A_{0k}}{\partial s_1}\right) + bK = 0,\\
c\frac{\partial A_{0k}}{\partial\theta_1} + m_k\frac{\partial K}{\partial\theta_1} + m_k(m_k+1)B_{0k} + \frac{1}{H_{0k}}\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{1}{H_{0k}}Q\right) = 0,\\
c\frac{1}{H_{0k}}\frac{\partial A_{0k}}{\partial s_1} + \frac{m_k}{H_{0k}}\frac{\partial K}{\partial s_1} - \frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\frac{1}{H_{0k}}Q\right) + m_k(m_k+1)C_k = 0,\\
K = \frac{1}{H_{k0}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}(H_{k0}) + \frac{\partial C_k}{\partial s_1}\right), \quad Q = \frac{\partial B_{0k}}{\partial s_1} - \frac{\partial}{\partial\theta_1}(H_{0k}C_k).
\end{gathered} \tag{18}$$

Система (18) имеет решение, приведенное в [17], и тогда соотношения (16) с учетом этого решения принимают вид

$$u_{\rho_1} = \rho_1^{m_k} \sum_{n=0}^{N} (A_{n1k}(\theta_1) \cos nls_1 + A_{n2k}(\theta_1) \sin nls_1) + O(N^{-1}),$$
$$u_{\theta_1} = \rho_1^{m_k} \sum_{n=0}^{N} (B_{n1k}(\theta_1) \cos nls_1 + B_{n2k}(\theta_1) \sin nls_1) + O(N^{-1}),$$
$$u_{s_1} = \rho_1^{m_k} \sum_{n=0}^{N} (C_{n1k}(\theta_1) \cos nls_1 + C_{n2k}(\theta_1) \sin nls_1) + O(N^{-1}), \tag{19}$$
$$A_{ngk}(\theta_1) = \sum_{j=1}^{2(2N+1)} N_{ngk} \Phi_{j,k_1}^{(k)}(\theta_1), \quad B_{ngk}(\theta_1) = \sum_{j=1}^{3(2N+1)} N_{ngk} E_{jgk}(\theta_1),$$
$$C_{ngk}(\theta_1) \sum_{j=1}^{3(2N+1)} N_{ngk} F_{jgk}(\theta_1), \quad g = \overline{1,2},$$

где $\Phi_{j,k_1}^{\{k\}}(\theta_1)$, $k_1 = m_k + 1; m_k - 1,$ — функции фундаментальной системы решений, ограниченные при $\theta_1 \in [-\pi, \pi]$; $E_{jgk}(\theta_1)$, $F_{jgk}(\theta_1)$ — известные функции; N_{ngk} — произвольные постоянные; $l = 2\pi/s_0$; s_0 — длина направляющей.

Подставив представления (17) или (19) в условия (4) и положив $\theta_1 = \pi/2$, сгруппировав и приравняв выражения при степенях ρ_1, а для соотношений (19) и при гармониках $n = \overline{0, 2N+1}$, нулю, получим однородные системы линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных.

Условиями их разрешимости являются равенства их главных определителей нулю, что дает характеристические уравнения для показателей m_k в представлениях (17) или (19)

$$\Delta(m_k) = 0. \tag{20}$$

Явный вид таких уравнений из-за громоздкости не выписан, а их численный анализ приведен в [17], [18], где установлено, что множество корней $m_k \in (0,1)$ уравнений вида (20) непустое. Для таких значений m_k находим нетривиальные решения систем алгебраических уравнений. На основе этого устанавливаем, что компоненты вектора $N_n[\overline{u}]$ будут иметь особенности порядка $1 - m_k$ в конической точке, и находим их явный вид. Таким образом, доказана

Лемма 2. *Если характеристическое уравнение типа* (20) *имеет корни* $m_k \in (0,1)$, *то решение уравнения Ламе имеет асимптотику* (17) *или* (19) $\overline{u} = \{u_{\rho_1}, u_{\theta_1}, u_{s_1}\}$ *и*

$$N_n[\overline{u}] = \{\tau_{\rho_1\theta_1}, \sigma_{\theta_1}, \tau_{\theta_1 s_1}\}, \quad \tau_{\rho_1\theta_1} = \rho_1^{m_k-1}\mu\left[(m_k-1)B_{0k} + \frac{\partial A_{0k}}{\partial\theta_1}\right] + O(1),$$
$$\sigma_{\theta_1} = 2\mu\rho_1^{m_k-1}\left\{[\beta(m_k+2)+1]A_{0k} + (\beta+1)\frac{\partial B_{0k}}{\partial\theta_1} + \right.$$
$$\left. + \beta H_{0k}^{-1}\frac{\partial C_k}{\partial s_1} + \beta B_{0k}H_{0k}^{-1}\frac{\partial H_{0k}}{\partial\theta_1}\right\} + O(1), \quad \beta = \nu/(1-2\nu),$$
$$\tau_{\theta_1 s_1} = \mu\rho_1^{m_k-1}\left(-H_{0k}^{-1}\frac{\partial H_{0k}}{\partial\theta_1}C_k + \frac{\partial C_k}{\partial\theta_1} + H_{0k}^{-1}\frac{\partial B_{0k}}{\partial s_1}\right) + O(1). \tag{21}$$

Отметим, что здесь, как и в лемме 1, идентифицирующий индекс i, соотносящий величины с соответствующей областью, для упрощения записи опущен. Компоненты векторов $\overline{u}$, $N_n[\overline{u}]$ зависят от μ_0, μ_1, а величина m_k зависит от отношения $\gamma = \mu_0/\mu_1$ посредством соответствующего характеристического уравнения, что детально показано в работе [17].

Разрешимость задачи. Решение уравнения Ламе (1) представляется обобщенными упругими потенциалами простого и двойного слоя [10].

Лемма 3. *Если в точках гладкости замкнутой кусочно-гладкой поверхности S плотность $\overline{\varphi}_2(M)$ обобщенного упругого потенциала двойного слоя $\overline{W}(M)$ удовлетворяет условию Липшица–Гёльдера, а в особых точках M^0 имеет место представление*

$$\overline{\varphi}_2(M) = O(|MM^0|^\alpha), \quad \alpha \in (0,1), \quad \overline{\varphi}_2(M^0) = 0, \tag{22}$$

то обобщенный упругий потенциал двойного слоя существует и в точках гладкости поверхности имеет место обычное представление

$$\overline{W}^\pm(M_0) = \mp\overline{\varphi}_2(M_0) + \overline{W}(M_0), \tag{23}$$

где $\overline{W}^\pm(M_0)$ — граничное значение потенциала при стремлении точки $M \in V_0$ (знак “$-$”) или точки $M \in V_1$ (знак “$+$”) к точке $M_0 \in S$; $\overline{W}(M_0)$ — прямое значение потенциала в M_0.

Доказательство. Пусть поверхность S содержит одну особую точку O_1, являющуюся, например, конической точкой, а точка $M_0 \in S$ является точкой гладкости. Доказательство в случае множества особых точек аналогично. Построим сферу с центром в особой точке O_1 радиуса $R_0 < |M_0O_1|$. Тогда $S = S_1 \cup S_2$, где S_1 — часть поверхности S, лежащей вне сферы и являющейся гладкой разомкнутой поверхностью, а S_2 — часть поверхности S, содержащаяся внутри такой сферы. Потенциал представляется в виде суммы

$$\overline{W}(M) = \iint\limits_S \Gamma_2(M,N)\overline{\varphi}_2(N)ds_N = \iint\limits_{S_1} \Gamma_2(M,N)\overline{\varphi}_2(N)ds_N + \iint\limits_{S_2} \Gamma_2(M,N)\overline{\varphi}_2(N)ds_N, \tag{24}$$

где

$$\Gamma_2(M,N) = \|\Gamma_{2mp}(M,N)\|, \quad m,p = \overline{1,3};$$
$$\Gamma_{2mp}(M,N) = \left[m_{01}\delta_{mp} + \frac{n_{01}(y_m - x_m)(y_p - x_p)}{r^2}\right]\sum_{i=1}^{3}\frac{(x_l - y_l)n_l(N)}{r^3} +$$
$$+m_{01}\left[n_m(N)\frac{x_p - y_p}{r^3} - n_p(N)\frac{x_m - y_m}{r^3}\right], \quad m = \overline{1,3}; \quad p = \overline{1,3},$$
$$m_{01} = \frac{1}{2\pi}\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}, \quad n_{01} = \frac{3}{2\pi}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad N = N(y_1,y_2,y_3),$$

$r = ((x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2)^{1/2}$ — матрица потенциала двойного слоя, δ_{mp} — символ Кронекера.

Первое слагаемое в правой части (24) существует как обобщенный упругий потенциал двойного слоя на разомкнутой поверхности Ляпунова [10]. Второе слагаемое содержит интегралы, которые при переходе к переменным ρ_1, s_1 (15) вычисляются как несобственные интегралы типа

$$\int_0^{R_0} d\rho_1 \int_0^{s_1} \frac{A_{s_1}(s_1)}{\rho_1^{1-\alpha}}ds_1 = \frac{R_0^\alpha}{\alpha}\int_0^{s_1} A_{s_1}(s_1)ds_1 < \infty.$$

Пусть точка M стремится к точке $M_0 \in S_1$, тогда, учитывая для первого слагаемого в представлении (24) известные граничные значения обобщенного упругого потенциала двойного слоя на разомкнутых поверхностях Ляпунова ([13], с. 218) и непрерывность второго слагаемого при $M_0 \in S_1$, получаем формулу (23). □

Лемма 4. *Если в точках гладкости кусочно-гладкой поверхности S плотность $\overline{\varphi}_1(M)$ обобщенного упругого потенциала простого слоя $\overline{V}(M)$ удовлетворяет условию Липшица–Гёльдера, а в особых точках M^0 стремится к бесконечности и имеет место асимптотическое представление*

$$\overline{\varphi}_1(M) = O\bigg(\frac{1}{|MM^0|^\alpha}\bigg), \quad \alpha \in (0,1), \tag{25}$$

то обобщенный упругий потенциал простого слоя существует и является непрерывной функцией при переходе поверхности S в ее точках гладкости и в этих точках имеет место обычное представление

$$N_n^{\pm}[\overline{V}(M_0)] = \pm\overline{\varphi}_1(M_0) + N_n[\overline{V}(M_0)], \tag{26}$$

где $N_n^{\pm}[\overline{V}(M_0)]$ — граничные значения вектора $N_n[\overline{V}(M_0)]$ при подходе точки M к точке $M_0 \in S$ со стороны области V_0 (знак “$-$”) или V_1 (знак “$+$”); $N_n[\overline{V}(M_0)]$ — прямое значение оператора от потенциала на поверхности S.

Доказательство. Аналогично предыдущему проиллюстрируем доказательство на примере наличия на поверхности одной особой точки, также конической. Представляя, как и в предыдущем доказательстве, поверхность $S = S_1 \cup S_2$, получаем

$$\overline{V}(M) = \iint\limits_S \Gamma(M,N)\overline{\varphi}_1(N)ds_N = \iint\limits_{S_1} \Gamma(M,N)\overline{\varphi}_1(N)ds_N + \iint\limits_{S_2} \Gamma(M,N)\overline{\varphi}_1(N)ds_N, \tag{27}$$

где $\Gamma(M,N) = \|\Gamma_{mp}(M,N)\|$,

$$\Gamma_{mp}(M,N) = \frac{1}{4\pi\mu(\lambda+2\mu)}\bigg[(\lambda+\mu)\frac{\partial r}{\partial x_m}\frac{\partial r}{\partial x_p} + (\lambda+3\mu)\delta_{mp}\bigg]\frac{1}{r}$$

— матрица потенциала простого слоя. Первый интеграл правой части соотношения (27) существует как интеграл по поверхности Ляпунова. Переходя в интеграле второго слагаемого с учетом (25) к переменным ρ_1, s_1 с помощью (15), убеждаемся, что он существует как несобственный. Устремляя в представлении (27) M к M_0 и учитывая непрерывность обобщенного упругого потенциала простого слоя при переходе разомкнутых поверхностей Ляпунова ([10], с. 547), а также непрерывность второго слагаемого, убеждаемся, что $\overline{V}(M)$ является непрерывной функцией при переходе поверхности S в ее точках гладкости.

Подействуем оператором $N_n[\,]$ на равенство (27), перейдем в полученном равенстве к пределу при $M \to M_0$. Принимая во внимание известные граничные значения для $N_n[\overline{V}(M)]$ на разомкнутой поверхности Ляпунова ([13], с. 231) и непрерывность второго слагаемого правой части, получаем утверждение леммы. При этом интеграл $N_n[\overline{V}(M_0)]$ понимаем как сингулярный. $\square$

Перейдем к общему случаю разрешимости задачи. Пусть

$$\Gamma_1(M,N) = \|\Gamma_{1mp}(M,N)\|,$$

$$\Gamma_{1mp}(M,N) = -0,5\left[m_{01}\delta_{pm} + n_{01}\frac{(x_m-y_m)(x_p-y_p)}{r^2}\right]\frac{1}{r^3}\sum_{l=1}^{3}(x_l-y_l)n_l(M) +$$

$$+m_{01}\left[n_m(M)\frac{x_p-y_p}{r^3} - n_p(M)\frac{x_m-y_m}{r^3}\right], \quad \Gamma_3(M,N) = \|\Gamma_{3mp}(M,N)\|,$$

$$\Gamma_{3mp}(M,N) = \sum_{s=1}^{3}(\sigma_{ms}^{(p)}n_s),$$

$$\sigma_{ms}^{(p)} = 2\mu\varepsilon_{ms}^{(p)} + \lambda\delta_{ms}\theta^{(p)}, \quad \varepsilon_{ms}^{(p)} = 0,5\left(\frac{\partial u_s^{(p)}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m^{(p)}}{\partial x_s}\right),$$

$$u_g^{(h)} = \Gamma_{2gh}, \quad g,h = \overline{1,3}; \quad p = \overline{1,3}, \quad \theta^{(p)} = \varepsilon_{11}^{(p)} + \varepsilon_{22}^{(p)} + \varepsilon_{33}^{(p)},$$

матрицы $\Gamma^{(i)}(M,N)$, $\Gamma_t^{(i)}(M,N)$, $t=\overline{1,3}$; $i=\overline{0,1}$, следуют соответственно из матриц $\Gamma(M,N)$, $\Gamma_t(M,N)$, $t=\overline{1,3}$, если в элементах последних заменить постоянные ν, μ соответственно на ν_i, μ_i, т. е. при значении индекса $i=0$ величины отвечают области V_0, а при $i=1$ — области V_1, M_0 — точки гладкости поверхности S.

Теорема. *Если в особых точках кусочно-гладкой поверхности корни характеристических уравнений* (6), (20) *принадлежат интервалу* $(0,1)$ *и имеют место следующие соотношения*:

$$0,5\sum_{p=1}^{3}\iint_S \{|\Gamma_{mp}^{(1)}(M,N) - \Gamma_{mp}^{(0)}(M,N)| + |\Gamma_{2mp}^{(1)}(M,N) - \Gamma_{2mp}^{(0)}(M,N)|\}ds_n = A_m < 1, \tag{28}$$

$$0,5\sum_{p=1}^{3}\iint_S \{|\Gamma_{1mp}^{(1)}(M,N) - \Gamma_{1mp}^{(0)}(M,N)| + |\Gamma_{3mp}^{(1)}(M,N) - \Gamma_{3mp}^{(0)}(M,N)|\}ds_n = B_m < 1, \quad m=\overline{1,3},$$

то задача сопряжения разрешима.

Доказательство. Пусть конечная односвязная область ограничена поверхностью $S = \bigcup\limits_{j=1}^{n_1} S_j$, которая содержит конические точки O_l, $l=\overline{1,m_1}$, и гладкие замкнутые непересекающиеся особые линии $L_j = S_j \cap S_{j+1}$, $j=\overline{1,n_1-1}$, $O_l \notin L_j$. Поверхности S_j задаются уравнениями $f_j(x_1,x_2,x_3)=0$, а натянутые на контуры L_j, определяются уравнениями $f_{0j}(x_1,x_2,x_3)=0$.

Учитывая характер решений, установленный в леммах 1, 2, представляем решения уравнений Ламе в виде

$$\overline{u}_0(M) = \overline{u}_{01}(M) + \overline{u}_{02}(M), \quad \overline{u}_1(M) = \overline{u}_{11}(M) + \overline{u}_{12}(M), \tag{29}$$

где $\overline{u}_{i1}(M)$, $i=\overline{0,1}$, реализуют асимптотику, приведенную в леммах 1 и 2, а $\overline{u}_{i2}(M)$ являются ограниченными непрерывными функциями в своих областях определения.

Согласно леммам 3 и 4 характер обобщенного упругого потенциала двойного слоя и оператора $N_n[\,]$ от обобщенного упругого потенциала простого слоя вблизи точек гладкости поверхности S определяется плотностями потенциалов с точностью до величин прямых значений их на поверхности.

Представим сингулярные составляющие посредством обобщенных упругих потенциалов простого и двойного слоя

$$\overline{u}_{i1}(M) = \iint_S \Gamma^{(i)}(M,N)\overline{\varphi}_{i11}(N)ds_N + \iint_S \Gamma_2^{(i)}(M,N)\overline{\varphi}_{i12}(N)ds_N, \tag{30}$$

где значение индекса $i = 0$ относится к величинам области $V_0 = R_3 \setminus V_1$, а $i = 1$ — области V_1. Векторы плотностей представляем в виде

$$\overline{\varphi}_{i11}(N) = \{\varphi_{i111}(N), \varphi_{i112}(N), \varphi_{i113}(N)\}, \quad \overline{\varphi}_{i12}(N) = \{\varphi_{i121}(N), \varphi_{i122}(N), \varphi_{i123}(N)\}, \tag{31}$$

$$\varphi_{i111}(N) = \Big(\prod_{j=1}^{n_1-1} \varphi^{(1)}_{i11j}(N)\Big)\Big(\prod_{k=1}^{m_1} \varphi^{(2)}_{i11k}(N)\Big), \quad \varphi_{i121}(N)\Big(\prod_{j=1}^{n_1-1} \varphi^{(3)}_{i21j}(N)\Big)\Big(\prod_{k=1}^{m_1} \varphi^{(4)}_{i21k}(N)\Big),$$

$$M = M(x_1, x_2, x_3), \quad N = N(y_1, y_2, y_3).$$

В формулах (31) функции $\varphi^{(1)}_{i11j}(N)$, $\varphi^{(3)}_{i21j}(N)$ определяются геометрией поверхностей вблизи особых линий и согласно леммам 1, 3 ,4 имеют вид

$$\varphi^{(1)}_{i11j}(N) = 2\mu_i(-1)^{i+1}\sum_{q=1}^{p_2}\Big\langle R_j^{m_{qj}-1}(N)\Big\{(m_{qj}+1)B_{ijq}[T_j(N)] + \frac{\partial A_{ijq}[T_j(N)]}{\partial T_j(N)}\Big\}\Big\rangle,$$

$$\varphi^{(1)}_{i12j}(N) = 2\mu_i(-1)^{i+1}\sum_{q=1}^{p_2}\Big\langle R_j^{m_{q1j}-1}(N)\Big\{[\beta_i(1+n_i)+1]A_{ijq}[T_j(N)] + (\beta_i+1)\frac{\partial B_{ijq}[T_j(N)]}{\partial T_j(N)}\Big\}\Big\rangle,$$

$$\varphi^{(1)}_{i13j}(N) = (-1)^i\mu_i R_j^{m_{5j}-1}(N)\frac{\partial C_{ij}[T_j(N)]}{\partial T_j(N)}, \quad \varphi^{(3)}_{i12j}(N) = (-1)^i\sum_{q=1}^{p_2} R_j^{m_{qj}}(N)A_{ijq}[T_j(N)],$$

$$\varphi^{(3)}_{i22j}(N) = (-1)^i\sum_{q=1}^{p_2} R_j^{m_{qj}}(N)B_{ijq}[T_j(N)], \quad \varphi^{(3)}_{i23j}(N) = (-1)^i R_j^{m_{3j}}(N)C_{ij}[T_j(N)], \tag{32}$$

$$A_{ijq}(T_j(N)) = (m_{qj} - \varkappa_i)a_{1ijq}\sin((m_{qj}-1)T_j(N)) + (\varkappa_i - m_{qj})b_{1ijq}\cos((m_{qj}-1)T_j(N)) +$$
$$+ c_{1ijq}\sin((m_{qj}+1)T_j(N)) - d_{1ijq}\cos((m_{qj}+1)T_j(N)),$$
$$B_{ijq}(T_j(N)) = (m_{qj} + \varkappa_i)a_{1ijq}\cos((m_{qj}-1)T_j(N)) + (m_{qj} + \varkappa_i)b_{1ijq}\sin((m_{qj}-1)T_j(N)) +$$
$$+ c_{1ijq}\cos((m_{qj}+1)T_j(N)) + d_{1ijq}\sin((m_{qj}+1)T_j(N)),$$
$$C_{ij}(T_j(N)) = g_{1ij}\cos(m_{5j}T_j(N)) + h_{1ij}\sin(m_{5j}T_j(N));$$
$$R_j(N) = ((f_{0j}(N)/|\operatorname{grad} f_{0j}(N)|)^2 + Q_j^2(N))^{1/2}, \quad T_j(N) = \arcsin(f_{0j}(N)/(|\operatorname{grad} f_{0j}(N)|R_j(N))),$$
$$Q_j(N) = (f_j(N)/|\operatorname{grad} f_j(N)|) + (1 - (\overline{G}_{2j}(N), \overline{G}_{0j}(N))^2 f_{0j}(N)/|\operatorname{grad} f_{0j}(N)|(\overline{G}_{0j}(N), \overline{G}_{2j}(N))),$$
$$\overline{G}_j(N) = \operatorname{grad} f_j(N)/|\operatorname{grad} f_j(N)|, \quad \overline{G}_{0j}(N) = \operatorname{grad} f_{0j}(N)/|\operatorname{grad} f_{0j}(N)|,$$
$$\overline{G}_{2j}(N) = [[\overline{G}_j(N), \overline{G}_{j+1}(N)]/|[\overline{G}_j(N), \overline{G}_{j+1}(N)]|, \overline{G}_{0j}(N)],$$

p_2 — число корней $m_{qj} \in (0,1)$ характеристических уравнений (6).

Функции $\varphi^{(2)}_{i11k}(N)$, $\varphi^{(4)}_{i21k}(N)$ определяются геометрией поверхностей вблизи конических точек и согласно леммам 2–4 имеют вид (17) и (21) или (19) и (21), в которых необходимо заменить ρ_1, θ_1, s_1 соответственно на

$$R_l(N) = ((y_1 - x_{1l})^2 + (y_2 - x_{2l})^2 + (y_3 - x_{3l})^2)^{1/2},$$
$$T_{ln}(N) = \arcsin(R_l^{-1}(N)(l_{0l}(y_1 - x_{1l}) + m_{0l}(y_2 - x_{2l}) + n_{0l}(y_3 - x_{3l}))),$$
$$S_l(N) = \int_0^{\varphi_l}((dl_{0l}(N)/d\varphi_l)^2 + (dm_{0l}(N)/d\varphi_l)^2 + (dn_{0l}(N)/d\varphi_l)^2)d\varphi_l,$$

где $\varphi_l = \varphi_l(y_2, y_3)$, $O_l(x_{1l}, x_{2l}, x_{3l})$, $l_{0k}(N)$, $m_{0k}(N)$, $n_{0k}(N)$ — координаты орта образующей $\overline{r}_{0k}(N)$, и просуммировать в зависимости от числа корней $m_k \in (0,1)$ уравнения (20).

Представление сингулярных составляющих обобщенными упругими потенциалами двойного и простого слоя с плотностями (31), (32) отвечает условиям лемм 3 и 4. Удовлетворяя с помощью (29), (30) граничным условиям (4) в особых точках при переходе к соответствующим локальным координатам, убеждаемся, что они реализуются.

Регулярные составляющие решений уравнений Ламе в формулах (29) представляем также обобщенными упругими потенциалами простого и двойного слоя с неизвестными плотностями $\overline{\varphi}_{i21}(N)$, $\overline{\varphi}_{i22}(N)$, $i=\overline{0,1}$,

$$\overline{u}_{02}(M)=\overline{u}_0^{(0)}(M)+\iint\limits_S \Gamma(M,N)\overline{\varphi}_{021}(N)ds_N+\iint\limits_S \Gamma_2(M,N)\overline{\varphi}_{022}(N)ds_N, \tag{33}$$

$$\overline{u}_{12}(M)=\overline{u}_1^{(0)}(M)+\iint\limits_S \Gamma(M,N)\overline{\varphi}_{121}(N)ds_N+\iint\limits_S \Gamma_2(M,N)\overline{\varphi}_{122}(N)ds_N, \tag{34}$$

где $\overline{u}_i^{(0)}(M)$ — известные векторы, удовлетворяющие уравнению Ламе (1) и обусловленные физической сущностью задачи, а также условиям на бесконечности.

Подставляя представления (29)–(34) в граничные условия (3) в точках гладкости и учитывая формулы (23), (26), получим систему интегральных уравнений, в которой полагаем ввиду произвольности плотностей

$$\overline{\varphi}_{021}(N)=\overline{\varphi}_{121}(N),\quad \overline{\varphi}_{022}(N)=\overline{\varphi}_{122}(N).$$

В результате придем к системе интегральных уравнений

$$\begin{gathered}
\overline{\varphi}_{022}(M_0)-0,5\iint\limits_S[\Gamma^{(1)}(M_0,N)-\Gamma^{(0)}(M_0,N)]\overline{\varphi}_{021}(N)ds_N-\\
-0,5\iint\limits_S[\Gamma_2^{(1)}(M_0,N)-\Gamma_2^{(0)}(M_0,N)]\overline{\varphi}_{022}(N)ds_N=-0,5\overline{g}_1(M_0),\\
\overline{\varphi}_{021}(M_0)+0,5\iint\limits_S[\Gamma_1^{(1)}(M_0,N)-\Gamma_1^{(0)}(M_0,N)]\overline{\varphi}_{021}(N)ds_N+\\
+0,5\iint\limits_S[\Gamma_3^{(1)}(M_0,N)-\Gamma_3^{(0)}(M_0,N)]\overline{\varphi}_{022}(N)ds_N=0,5\overline{h}_1(M_0),
\end{gathered} \tag{35}$$

где

$$\overline{g}_1(M_0)=\overline{u}_{01}^-(M_0)+\overline{u}_0^{(0)-}(M_0)-(\overline{u}_{11}^+(M_0)+\overline{u}_1^{(0)+}(M_0)),$$
$$\overline{h}_1(M_0)=N_{n0}^-[\overline{u}_{01}(M_0)+\overline{u}_0^{(0)}(M_0)]-N_{n1}^+[\overline{u}_{11}(M_0)+\overline{u}_1^{(0)}(M_0)],$$

матрицы $\Gamma^{(i)}(M,N)$, $\Gamma_t^{(i)}(M,N)$, $t=\overline{1,3}$, и оператор $N_{ni}[\;]$ при значении индекса $i=0$ отвечают области V_0, а при $i=1$ — области V_1, M_0 — точки гладкости поверхности S. Ввиду выполнения условий (3) в особых точках правые части уравнений (35) являются непрерывными ограниченными функциями на поверхности S, а матрицы $\Gamma_1^{(i)}(M_0,N)$, $\Gamma_3^{(i)}(M_0,N)$ порождают сингулярные интегралы, поэтому (35) является системой сингулярных интегральных уравнений [19].

Решение системы (35) аналогично [13] представляем в итерационной форме

$$\begin{aligned}
&\overline{\varphi}_{022}^{(0)}(M) = -0,5\overline{g}_1(M), \quad \overline{\varphi}_{021}^{(0)} = 0,5\overline{h}_1(M),\\
&\overline{\varphi}_{022}^{(n)}(M) = 0,5\iint\limits_S [\Gamma^{(1)}(M,N) - \Gamma^{(0)}(M,N)]\overline{\varphi}_{021}^{(n-1)}(N)ds_N +\\
&\qquad + 0,5\iint\limits_S [\Gamma_2^{(1)}(M,N) - \Gamma_2^{(0)}(M,N)]\overline{\varphi}_{022}^{(n-1)}(N)ds_N - 0,5\overline{g}_1(M),\\
&\overline{\varphi}_{021}^{(n)}(M) = -0,5\iint\limits_S [\Gamma_1^{(1)}(M,N) - \Gamma_1^{(0)}(M,N)]\overline{\varphi}_{021}^{(n-1)}(N)ds_N -\\
&\qquad - 0,5\iint\limits_S [\Gamma_3^{(1)}(M,N) - \Gamma_3^{(0)}(M,N)]\overline{\varphi}_{022}^{(n-1)}(N)ds_N + 0,5\overline{h}_1(M),
\end{aligned} \tag{36}$$

$$\overline{\varphi}_{022}(M) = \lim_{n\to\infty}\overline{\varphi}_{022}^{(n)}(M), \quad \overline{\varphi}_{021}(M) = \lim_{n\to\infty}\overline{\varphi}_{021}^{(n)}(M). \tag{37}$$

Здесь точка M принадлежит множеству точек гладкости поверхности S. Сходимость пределов (37) равносильна сходимости рядов

$$\overline{\varphi}_{021}^{(0)}(M) + \sum_{n=1}^{\infty}[\overline{\varphi}_{021}^{(n)}(M) - \overline{\varphi}_{021}^{(n-1)}(M)], \quad \overline{\varphi}_{022}^{(0)}(M) + \sum_{n=1}^{\infty}[\overline{\varphi}_{022}^{(n)}(M) - \overline{\varphi}_{022}^{(n-1)}(M)]. \tag{38}$$

Переходя к скалярным компонентам (38) и учитывая условия (28), находим, что они мажорируются сходящимися числовыми рядами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_m^n M_{1m}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_m^n M_{1m}$, где $M_{1m} = \max\{|0,5h_{1m}(M)|, |0,5g_{1m}(M)|\}$, $\overline{h}_1(M) = \{h_{11}(M), h_{12}(M), h_{13}(M)\}$, $\overline{g}_1(M) = \{g_{11}(M), g_{12}(M), g_{13}(M)\}$, и таким образом, ряды (38) сходятся абсолютно и равномерно в точках гладкости поверхности S. Выполняя предельный переход в (36) с учетом равномерной сходимости (38) в точках гладкости $M, N \in S$, получаем, что (36), (37) является решением системы (35).

Пусть система имеет два решения $\overline{\varphi}_{021}^{(a)}(M)$, $\overline{\varphi}_{022}^{(a)}(M)$ и $\overline{\varphi}_{021}^{(b)}(M)$, $\overline{\varphi}_{022}^{(b)}(M)$, тогда, подставляя их в (35) и вычитая уравнения, получим

$$\begin{aligned}
&-\overline{u}_b(M_0) + 0,5\iint\limits_S [\Gamma^{(1)}(M_0,N) - \Gamma^{(0)}(M_0,N)]\overline{u}_a(N)ds_N +\\
&\qquad + 0,5\iint\limits_S [\Gamma_2^{(1)}(M_0,N) - \Gamma_2^{(0)}(M_0,N)]\overline{u}_b(N)ds_N = 0,\\
&-\overline{u}_a(M_0) + 0,5\iint\limits_S [\Gamma_1^{(1)}(M_0,N) - \Gamma_1^{(0)}(M_0,N)]\overline{u}_a(N)ds_N +\\
&\qquad + 0,5\iint\limits_S [\Gamma_3^{(1)}(M_0,N) - \Gamma_3^{(0)}(M_0,N)]\overline{u}_b(N)ds_N = 0,
\end{aligned} \tag{39}$$

где

$$\begin{aligned}
\overline{u}_a(M) &= \{u_{a1}(M), u_{a2}(M), u_{a3}(M)\} = \overline{\varphi}_{021}^{(a)}(M) - \overline{\varphi}_{021}^{(b)}(M),\\
\overline{u}_b(M) &= \{u_{b1}(M), u_{b2}(M), u_{b3}(M)\} = \overline{\varphi}_{022}^{(a)}(M) - \overline{\varphi}_{022}^{(b)}(M).
\end{aligned}$$

Решения системы (35) ограничены на S и поэтому $|u_{ql}(M)| < L$, $q = \overline{1,2}$, $l = \overline{1,3}$. Тогда из (39) с учетом (28) имеем $L \le |A_m|L$, $L \le |B_m|L$, откуда следует $|A_m| \ge 1$, $|B_m| \ge 1$, что противоречит условию теоремы, т. е. решение задачи единственно. □

Для приведения задачи сопряжения к системе сингулярных интегральных уравнений в случае N попарно непересекающихся конечных односвязных областей V_i сингулярные составляющие решений уравнений Ламе строим аналогично (30)–(32) для каждой области. Регулярные слагаемые берем, следуя (34) для каждой области V_i, $i = \overline{1, N}$, а для области $V_0 = R_3 \setminus \bigcup_{i=1}^{N} V_i$ представляем в виде $\overline{u}_{01}(M) = \sum_{j=1}^{N} \overline{u}_{0j1}(M)$, $\overline{u}_{02}(M) = \sum_{j=1}^{N} \overline{u}_{0j2}(M)$, где $\overline{u}_{0j1}(M)$ строится с учетом негладкостей поверхностей раздела S_i областей V_i и V_0 аналогично изложенному выше, а слагаемые $\overline{u}_{0j2}(M)$ представляются в виде (33), (34).

Литература

1. Денисюк И.Т. *Решение одной задачи сопряжения для составной области с угловыми точками на линиях раздела* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 6. – С. 17–24.
2. Денисюк И.Т. *Одна задача сопряжения аналитических функций в аффинно-преобразованных областях с кусочно-гладкими границами* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 6. – С. 70–74.
3. Денисюк И.Т. *Термоупругость изотропной пластинки с угловыми включениями* // Изв. РАН. Сер. механ. твердого тела. – 1999. – № 2. – С. 148–155.
4. Денисюк И.Т. *Одна модель тонких упругих включений в изотропной пластинке* // Изв. РАН. Сер. механ. твердого тела. – 2000. – № 4. – С. 140–148.
5. Денисюк И.Т. *Напряжения анизотропной пластинки с угловыми включениями* // Прикл. механика. – 1999. – № 2. – С. 76–84.
6. Денисюк И.Т. *Особенность напряжений анизотропной пластинки с угловым вырезом* // Прикл. механика. – 1996. – № 1. – С. 48–52.
7. Денисюк І.Т. *Термонапруження в анізотропній пластині з кутовими включеннями* // Фіз.-хім. механ. матеріалів. – 1999. – № 3. – С. 59–68.
8. Барабаш С.С., Денисюк І.Т. *Поздовжній зсув анізотропного тіла з кутовими вкрапленнями* // Фіз.-хім. механ. матеріалів. – 1996. – № 4. – С. 86–90.
9. Денисюк І.Т. *Поздовжній зсув анізотропного тіла з пружними смугами* // Фіз.-хім. механ. матеріалів. – 1997. – № 1. – С .51–56.
10. Партон В.З., Перлин П.И. *Методы математической теории упругости.* – М.: Наука, 1981. – 688 с.
11. Седов Л.И. *Механика сплошной среды.* Т. 1. – М.: Наука, 1973. – 536 с.
12. Седов Л.И. *Механика сплошной среды.* Т. 2. – М.: Наука, 1973. – 568 с.
13. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. *Трехмерные задачи математической теории упругости.* – Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1968. – 627 с.
14. Норден А.П. *Краткий курс дифференциальной геометрии.* – М.: ГИФМЛ, 1958. – 244 с.
15. Денисюк І.Т. *Сингулярні напруження в ізотропній матриці з пружним клином* // Фіз.–хім. механ. матеріалів. – 1992. – № 4. – С. 76–81.
16. Денисюк И.Т. *Напряженное состояние вблизи особой линии поверхности раздела сред* // Изв. РАН. Сер. Механ. твердого тела. – 1995. – № 5. – С. 64–70.
17. Денисюк И.Т. *Напряжения вблизи конической точки поверхности раздела сред* // Изв. РАН. Сер. механ. твердого тела. – 2001. – № 3. – С. 68–77.
18. Денисюк І.Т. *Напруження біля конічних та пірамідальних включень* // Фіз.-хім. механ. матеріалів. – 2000. – № 3. – С. 16–20.
19. Михлин С.Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.* – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.

Луцкий государственный технический университет (Украина)

Поступили
первый вариант 06.12.2001
окончательный вариант 08.04.2003