

УДК 519.63

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ОДНОФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ В ТРЕЩИНОВАТЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

*М.В. Васильева, В.И. Васильев, А.А. Красников, Д.Я. Нижифоров*

*Северо-восточный федеральный университет, г. Якутск, 677000, Россия*

### Аннотация

В работе рассмотрены модели однофазной фильтрации жидкости в трещиноватой среде. Наличие трещин оказывает существенное влияние на процессы фильтрации, поскольку трещины являются каналами высокой проводимости. Математическая модель описана параболическим уравнением для давления. Представлены два подхода к аппроксимации течения в трещинах: подход 1 (посредством задания неоднородных коэффициентов для ячейки, занятой трещиной) и подход 2 (с использованием дискретной модели трещин). Оба подхода позволяют проводить явное моделирование течения в трещинах с использованием сеточных методов. Аппроксимация задачи проведена с использованием метода конечных разностей и метода конечных элементов. Проведено численное сравнение двух представленных методов на модельной двумерной задаче. Представлены результаты моделирования и для трехмерного случая.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, течение однофазной жидкости, фильтрация, трещиноватые пористые среды, неоднородные коэффициенты, дискретная модель трещин, метод конечных разностей, метод конечных элементов

### Введение

Математические модели процессов разработки месторождений нефти и газа базируются на фундаментальных законах механики многофазных сред [1–3]. Значительный интерес вызывают процессы фильтрации в неоднородных и трещиноватых пластах [4–6]. Трещины являются каналами высокой проводимости небольшого объема, но за счет высокой проводимости их влияние на общую картину течения может быть значительным [7, 8].

Современные подходы к моделированию задач многофазной фильтрации в трещиноватых и неоднородных средах ограничены некоторыми идеализированными моделями [9–11]. Среди них можно выделить подходы, связанные с моделями двойной пористости [12–16] или с моделями встроенных трещин (EFM, embedded fracture model) [17, 18]. Модели двойной пористости используются в случае, когда система трещин является связной [12, 13]. Современные идеализированные модели двойной (или более) пористости и/или проницаемости, как правило, ограничены двумя или более определенными масштабами и строятся в предположении априори неизвестных для общего случая ограничений.

Другим популярным подходом для моделирования фильтрации в трещиноватых средах является метод явного моделирования течения в трещинах, который может быть использован для несвязанных протяженных трещин. В данной модели течения в каждой трещине и в матрице пористой среды моделируются напрямую с использованием закона Дарси. Одним из методов явного моделирования является

расчет с прямым заданием неоднородных свойств на ячейке расчетной сетки, что приводит к излишнему увеличению количества неизвестных, поскольку на практике толщина трещин пренебрежимо мала по сравнению с характерными размерами ячейки. Еще одним методом моделирования течения в трещинах является использование дискретной системы трещин (DFN, discrete fracture network) [11, 19, 20]. Отметим, что при этом численное решение происходит на мелкой сетке, данный метод является наиболее точным для моделирования трещиноватых сред, но и вычислительно дорогостоящим [21, 22]

Работа состоит из пяти разделов. В разд. 1 приводятся уравнения, описывающие течение слабосжимаемой жидкости в трещиноватой пористой среде. В разд. 2 и 3 представлена аппроксимация уравнения по времени и по пространству. Рассматриваются два подхода аппроксимации течения в трещинах: подход 1 с использованием неоднородных коэффициентов и подход 2 с использованием непосредственной аппроксимации трещин в пространстве, меньшей на единицу размерности (дискретная модель трещин). Изучаются как конечно-разностная (в разд. 2), так и конечно-элементная (в разд. 3) аппроксимации. Результаты численных расчетов на структурированных сетках с использованием конечно-разностных аппроксимаций представлены в разд. 4. В разд. 5 представлены результаты численного решения задачи фильтрации в двумерной и трехмерной постановках на неструктурированной сетке с использованием метода конечных элементов.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим процесс фильтрации в некоторой области  $\Omega$ . Процесс фильтрации жидкости в пористой среде описывается законом сохранения массы [1, 3, 6]

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = q, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

и законом Дарси

$$u = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

где  $\phi$  – пористость,  $u$  – скорость течения жидкости в пористой среде,  $p$  – давление,  $\mu$ ,  $\rho$  – вязкость и плотность жидкости,  $q$  – источники/стоки и  $k = k(x)$  – тензор проницаемости пористой среды.

В случае течения слабосжимаемого жидкости в пористой среде имеем

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} = \rho(\phi c_f + c\phi_0) \frac{\partial p}{\partial t}, \quad c_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}, \quad \phi \approx \phi_0(1 + c(p - p_0)),$$

где  $c_f$  – коэффициент сжимаемости жидкости,  $c$  – коэффициент сжимаемости пористой среды, а через  $\phi_0$  обозначена пористость коллектора при давлении  $p_0$ .

С учетом проведенных упрощений получаем следующее параболическое уравнение для давления:

$$b \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(a \nabla p) = q, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

где  $b(x) = \rho(\phi(x)c_f + c\phi_0(x))$ ,  $a(x) = \rho \frac{k(x)}{\mu}$  и  $\rho = \rho(p)$ ,  $\phi = \phi(p)$ .

Пусть область  $\Omega = \Omega_m \cup \Omega_f$  состоит из двух подобластей:  $\Omega_m$  – подобласть матрицы пористой среды и  $\Omega_f$  – подобласть трещин (см. рис. 1). Будем предполагать, что течения в трещинах и в пористой среде описываются законом Дарси,

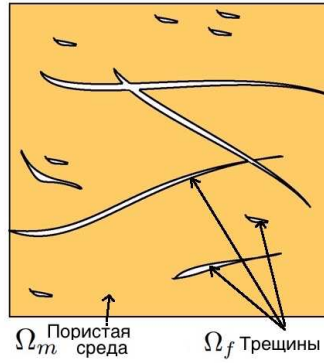


Рис. 1. Трещиноватая пористая среда

тогда математическая модель течения жидкости в трещиноватой пористой среде описывается уравнением (3) с неоднородными коэффициентами

$$b(x) = \begin{cases} b_f, & x \in \Omega_f, \\ b_m, & x \in \Omega_m, \end{cases} \quad a(x) = \begin{cases} a_f, & x \in \Omega_f, \\ a_m, & x \in \Omega_m, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$b_f = \rho(\phi_f c_t + c_f \phi_{0,f}), \quad a_f = \rho \frac{k_f}{\mu}, \quad b_m = \rho(\phi_m c_t + c_m \phi_{0,m}), \quad a_m = \rho \frac{k_m}{\mu},$$

$k_f$ ,  $k_m$  – проницаемость трещин и пористой среды соответственно,  $\phi_f$ ,  $\phi_m$  и  $c_f$ ,  $c_m$  – пористость, сжимаемость трещин и пористой среды соответственно.

Уравнение (3) дополним начальным условием  $p = p_0(x)$ ,  $x \in \Omega$ , и граничными условиями

$$\begin{aligned} p &= g(x), & x \in \Gamma_D, \\ -a \frac{\partial p}{\partial n} &= 0, & x \in \Gamma_N, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ .

В представленной математической модели при описании течений в каждой трещине и в матрице пористой среды используется закон Дарси. Явная аппроксимация рассматриваемого уравнения (3) с неоднородными коэффициентами (4) может привести к излишнему увеличению количества неизвестных, поскольку толщина трещин пренебрежимо мала по сравнению с характерными размерами ячейки. Другим способом моделирования течения в трещинах является дискретная модель сети трещин.

Далее рассмотрим как конечно-разностную, так и конечно-элементную аппроксимации уравнения (3) с использованием описанных выше подходов.

## 2. Конечно-разностная аппроксимация уравнений

Рассмотрим конечно-разностную аппроксимацию уравнения на структурированной расчетной сетке. Для численного решения задачи будем использовать два следующих подхода к аппроксимации (см. рис. 2):

- подход 1 – подход с неоднородными коэффициентами в подобластях;
- подход 2 – дискретная модель трещин.

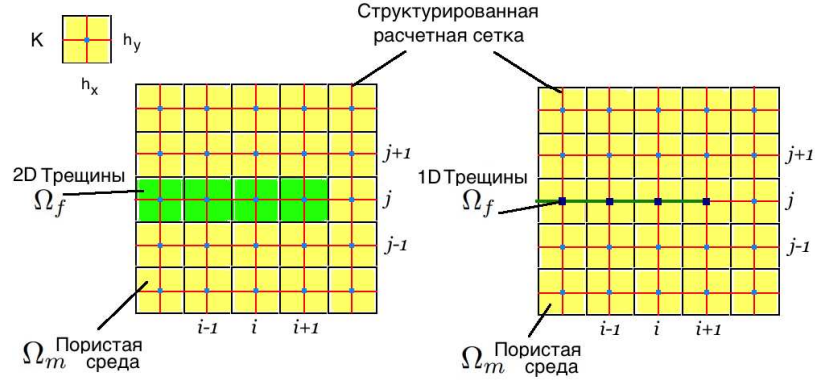


Рис. 2. Расчетная сетка для трещиноватой пористой среды с явным учетом течения в трещинах: слева – подход 1; справа – подход 2

Подход 1 применим в случае, когда удастся построить пространственную сетку таким образом, что каждая трещина занимает некоторое множество соседних ячеек. Это может привести к системам уравнений очень большой размерности, поскольку толщина трещин существенно меньше размерности блока при моделировании нефтяных или газовых месторождений.

В области  $\Omega$  определим структурированную равномерную расчетную сетку  $\omega_m$  с шагами  $h_x$  и  $h_y$  по направлениям  $x$  и  $y$  соответственно. Запишем конечно-разностную дискретизацию уравнения (3) с коэффициентами (4) [23, 24]

$$b_{i,j} \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n}{\tau} - a_{i+1/2,j} \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{h_x^2} + a_{i-1/2,j} \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} - a_{i,j+1/2} \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j+1}^{n+1}}{h_y^2} + a_{i,j-1/2} \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} = q_{i,j}, \quad (6)$$

где коэффициенты  $b_{i,j} = b(x_i, y_j)$ ,  $q_{i,j} = q(x_i, y_j)$  определены в ячейках (в элементарном объеме  $K$ ), а коэффициенты  $a_{i\pm 1/2,j}$  и  $a_{i,j\pm 1/2}$  определим как среднее значение между значениями в ячейках (подход 1a)

$$a_{i+1/2,j}^{av} = \frac{a_{i+1,j} + a_{i,j}}{2}, \quad a_{i,j+1/2}^{av} = \frac{a_{i,j+1} + a_{i,j}}{2} \quad (7)$$

или как среднегармоническое значение (подход 1b)

$$a_{i+1/2,j}^{ha} = 2 \left( \frac{1}{a_{i+1,j}} + \frac{1}{a_{i,j}} \right)^{-1}, \quad a_{i,j+1/2}^{ha} = 2 \left( \frac{1}{a_{i,j+1}} + \frac{1}{a_{i,j}} \right)^{-1}, \quad (8)$$

где  $a_{i,j} = a(x_i, y_j)$ . Отметим, что подход 1b задания коэффициентов основан на использовании интегро-интерполяционного метода (метода баланса) [23, 24] и является более предпочтительным для задач со значениями коэффициентов, изменяющихся в большом диапазоне.

Для аппроксимации по времени была использована абсолютно устойчивая неявная разностная схема с равномерным шагом по времени  $\tau$ , при этом верхний индекс означает номер временного слоя  $t^n = n\tau$ .

Рассмотрим теперь подход 2 конечно-разностной аппроксимации с использованием дискретной модели трещин [11, 19, 20], когда предполагается, что толщина трещин значительно меньше размера ячейки и трещины геометрически определяются как объекты пониженной размерности, то есть размерность трещин на один

порядок ниже размерности, используемой для описания пористой среды. Например, в двумерном случае пористая среда представима в виде двумерной области, а трещины – в виде одномерных линий (см. рис. 2, справа).

При моделировании трещин область фильтрации  $\Omega$  представляется в виде  $\Omega = \Omega_m \oplus_i \Omega_f^i$ , где  $\Omega_m$  – пористая среда и  $\Omega_f^i$  –  $i$ -я трещина. В области пористой среды  $\Omega_m$  введем структурированную равномерную расчетную сетку  $\omega_m$ . В подобластях трещин  $\Omega_f^i$  размерности  $(d-1)$  определим также сетки  $\omega_f^i$ , узлы и грани которых совпадают с некоторыми узлами и гранями сетки  $\omega_m$ .

Запишем дискретную задачу для матрицы пористой среды с постоянными коэффициентами  $a_m$  и  $b_m$  на расчетной сетке  $(x_i, y_j) \in \omega_m$

$$b_m \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n}{\tau} - a_m \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{h_x^2} + a_m \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1}}{h_x^2} - a_m \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j+1}^{n+1}}{h_y^2} + a_m \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} = q_{i,j}. \quad (9)$$

Для сети трещин имеем следующую аппроксимацию на сетке  $\omega_f^i$ :

$$b_f \frac{p_k^{n+1} - p_k^n}{\tau} - a_f \frac{p_{k+1}^{n+1} - p_k^{n+1}}{h_f^2} + a_f \frac{p_k^{n+1} - p_{k-1}^{n+1}}{h_f^2} = 0, \quad (10)$$

где  $k$  – индекс, соответствующий трещине. Для трещины, расположенной горизонтально,  $k = i$  и  $h_f = h_x$ , для вертикальной трещины  $k = j$  и  $h_f = h_y$ . В общем случае трещина может располагаться под любым углом или иметь любую произвольную геометрию.

При матричной записи уравнений (9)–(10) сложим матрицу  $A_m$ , соответствующую пористой среде, и матрицы  $A_f^i$  для трещин (это можно осуществить, поскольку узлы сеток совпадают):

$$\left( M_m + \sum_i M_f^i + \tau A_m + \tau \sum_i A_f^i \right) p^{n+1} = \left( M_m + \sum_i M_f^i \right) p^n + Q. \quad (11)$$

Здесь матрицы  $A_m$  и  $A_f$  соответствуют аппроксимации оператора диффузии,  $Q$  – вектор правой части,  $M_m = a_m \mathcal{I}$ ,  $M_f = a_f \mathcal{I}$ ,  $\mathcal{I}$  – единичная матрица.

Нами рассмотрена аппроксимация для двумерного случая расчетной области. Аналогичная аппроксимация может быть записана и для трехмерного случая. Отметим, что в общем случае коэффициенты пористой среды и трещин могут быть неоднородными.

### 3. Конечно-элементная аппроксимация уравнений

Для проведения численных расчетов на неструктурированных сетках применим метод конечных элементов. Для аппроксимации по времени будем использовать устойчивую неявную разностную схему. Как и в предыдущем разделе, рассматриваем как подход 1, когда  $a = a(x)$ ,  $b = b(x)$ , так и подход 2 с использованием дискретной модели трещин (см. рис. 3). Рассмотрим сначала подход 1.

Вариационную постановку задачи (3) запишем следующим образом [25]:

$$\begin{aligned} \text{Найти } p \in V : \int_{\Omega} b \frac{p^{n+1} - p^n}{\tau} v \, dx + \int_{\Omega} (a \nabla p^{n+1}, \nabla v) \, dx = \\ = \int_{\Omega} q v \, dx \quad \forall v \in \hat{V}, \quad (12) \end{aligned}$$

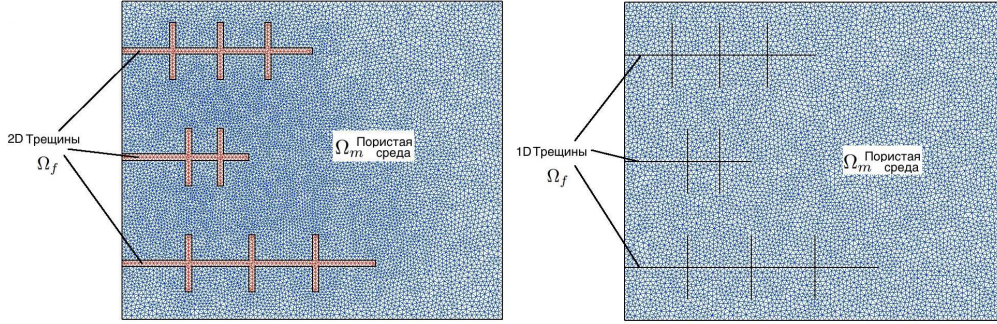


Рис. 3. Расчетная сетка для трещиноватой пористой среды с явным учетом течения в трещинах: слева – подход 1; справа – подход 2

где

$$V = \{p \in H^1 : p = g, x \in \Gamma_D\}, \quad \widehat{V} = \{p \in H^1 : p = 0, x \in \Gamma_D\},$$

$H^1 = H^1(\Omega)$  – пространство функций  $v$ , имеющих в  $\Omega$  обобщенные производные, интегрируемые с квадратом.

Для численного решения задачи перейдем от непрерывной вариационной задачи (12) к дискретной с использованием некоторой триангуляции  $\mathcal{T}_h$  в области  $\Omega$ , где  $h$  – характерный параметр триангуляции. Введем конечномерные пространства  $V_h \subset V$  и  $\widehat{V}_h \subset \widehat{V}$  и определим следующую дискретную задачу:

$$\begin{aligned} \text{Найти } p_h \in V_h : \int_{\Omega} b \frac{p_h^{n+1} - p_h^n}{\tau} v_h dx + \int_{\Omega} (a \nabla p_h^{n+1}, \nabla v_h) dx = \\ = \int_{\Omega} q v_h dx, \quad \forall v_h \in \widehat{V}_h. \end{aligned} \quad (13)$$

В качестве базисных функций будем использовать стандартные линейные базисные функции класса  $P^1$ .

В соответствии со стандартным методом Галеркина решение задачи будем искать в виде

$$p = \sum_{i=1}^N p_i \phi_i,$$

где  $\phi_i$  – линейные базисные функции класса  $P^1$ ,  $N$  – количество узлов триангуляции  $\mathcal{T}_h$ . Уравнение (13) может быть представлено в матричной форме

$$(M + \tau A)p^{n+1} = \tau F + Mp^n, \quad (14)$$

где  $A$  и  $M$  – матрицы жесткости и масс соответственно,

$$A = [a_{ij}] = \int_{\Omega} a \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx, \quad M = [m_{ij}] = \int_{\Omega} b \phi_i \phi_j dx, \quad F = \{f_i\} = \int_{\Omega} q \phi_i dx.$$

Отметим, что размерность получаемой системы равна  $N \times N$ .

Рассмотрим далее подход 2 [11, 19, 20]. Дискретизация трещин производится на одну размерность меньше, чем дискретизация пористой среды, то есть если  $d = 2, 3$  – размерность пространства, то течения в трещинах будем описывать

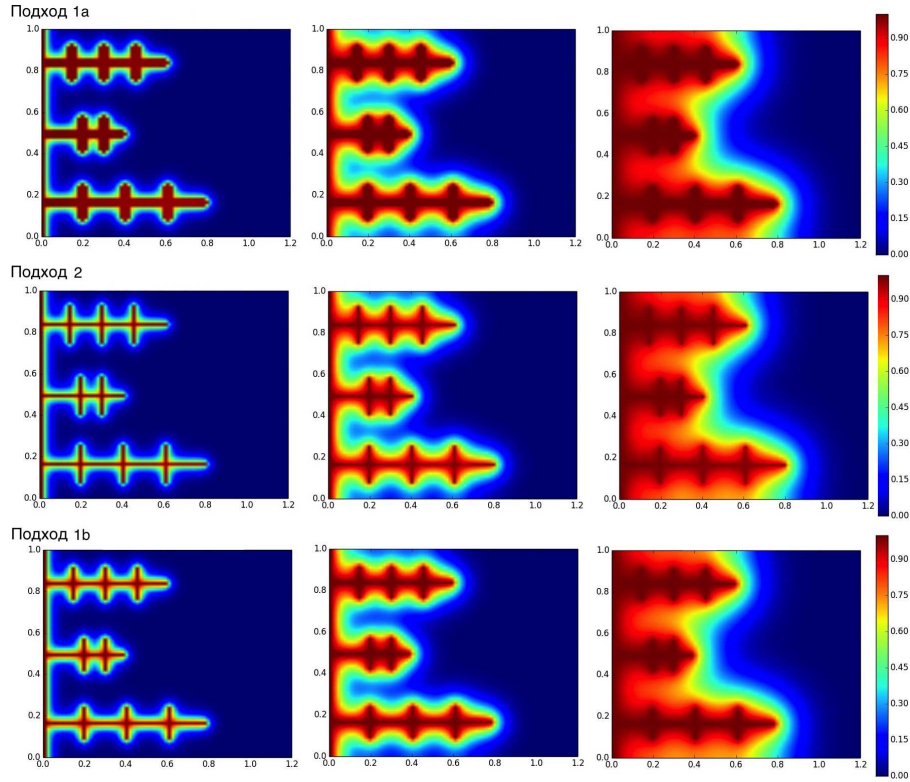


Рис. 4. Результаты численного решения модельной задачи с использованием конечно-разностной аппроксимации для различных временных слоев:  $m = 1, 5$  и  $20$ : сверху – подход 1а; в центре – подход 2; снизу – подход 1б

уравнениями размерности  $(d-1)$ . Таким образом, при рассмотрении среды в двумерном случае трещины представляются одномерными линиями, а в трехмерном – двумерными поверхностями [21, 22].

Запишем вариационную постановку, соответствующую уравнению (3), с учетом дискретной модели трещин

$$\int_{\Omega_m} b_m \frac{p^{n+1} - p^n}{\tau} v \, dx + \sum_i \int_{\Omega_{f,i}} b_f \frac{p^{n+1} - p^n}{\tau} v_f \, dx + \int_{\Omega_m} (a_m \nabla p^{n+1}, \nabla v) \, dx + \sum_i \int_{\Omega_{f,i}} (a_f \nabla p^{n+1}, \nabla v_f) \, dx = \int_{\Omega} qv \, dx. \quad (15)$$

В следующем разделе представим результаты численного моделирования для двух предложенных подходов с использованием как метода конечных разностей, так и метода конечных элементов.

#### 4. Численное сравнение методов на структурированной сетке

Приведем результаты численного решения модельной задачи в области  $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ , где  $L_x = 1.2$  и  $L_y = 1.0$ . Расчет будем проводить до 20-го временного слоя включительно с временным шагом  $\tau = 0.05$ . На правой и левой

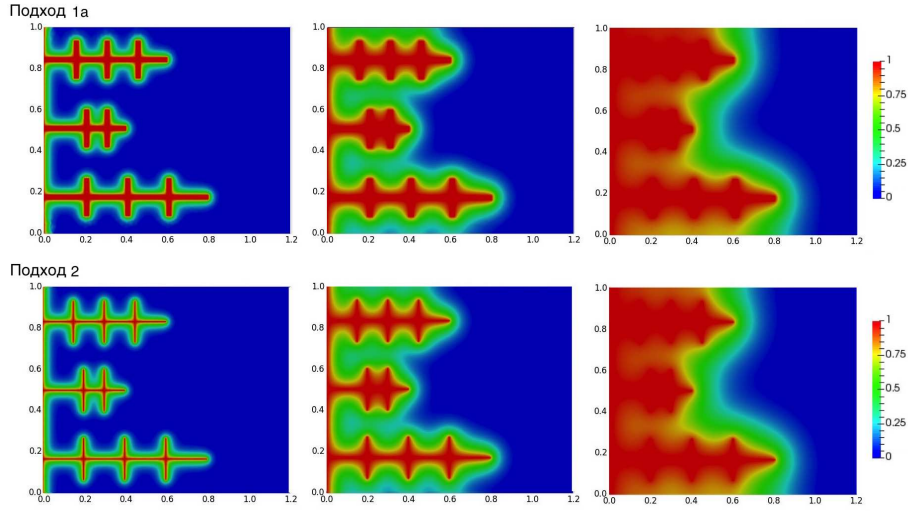


Рис. 5. Результаты численного решения модельной задачи с использованием конечно-элементной аппроксимации для различных временных слоев:  $t = 1, 5$  и  $20$ : сверху – подход 1a; снизу – подход 2

границах зададим граничные условия Дирихле:

$$p = 1 \quad \text{при } x = 0 \quad \text{и} \quad p = 0 \quad \text{при } x = L_x,$$

а на верхней и нижней границах – однородные граничные условия Неймана

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0.$$

Расчетная сетка содержит  $N = 70 \times 70$  узлов. Параметры задачи:  $a_m = 0.01$ ,  $b_m = 1.0$  для матрицы пористой среды и  $a_f = 1000$ ,  $b_f = 0.1$  для сети трещин. Начальное условие задавалось нулевым во всей области  $\Omega$ .

Далее приведем численное решение задачи с использованием предлагаемых подходов 1a, формула (6), 1b, формула (7), и 2. Отметим, что конечно-элементная аппроксимация в случае неоднородных коэффициентов аналогична подходу 1a, поскольку при построении локальных матриц для ячеек расчетной сетки коэффициенты предполагаются постоянными.

На рис. 4 приведены результаты численного решения задачи с использованием конечно-разностной аппроксимации для различных временных слоев:  $t = 1, 5$  и  $20$ . На рис. 5 представлены результаты для конечно-элементной аппроксимации. Для численного сравнения предлагаемых подходов решения задачи в трещиноватых пористых средах вычислялась относительная  $L_2$ -погрешность решения с использованием дискретной модели трещин (подход 2) и подходов с заданием неоднородного коэффициента на ячейке расчетной сетки

$$e = \sqrt{\int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2} / \sqrt{\int_{\Omega} u_2^2},$$

где  $u_1$  и  $u_2$  – решения задачи с использованием подходов 1 и 2 соответственно. На рис. 6 представлено численное сравнение этих подходов и изображена погрешность в различные моменты времени. Проведенные расчеты позволяют сделать следующие выводы:



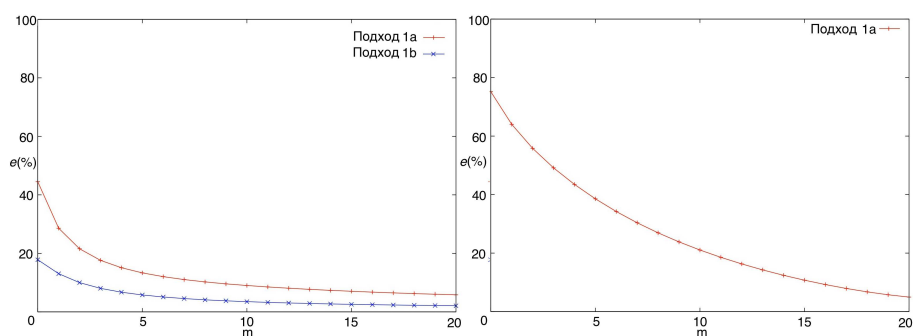


Рис. 6. Численное сравнение подходов 1 и 2. Погрешность на различные моменты времени: слева – метод конечных разностей; справа – метод конечных элементов

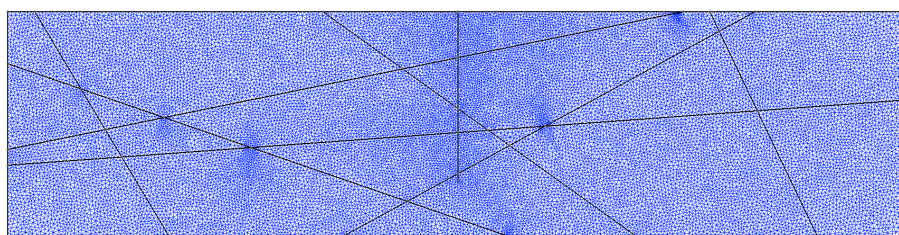


Рис. 7. Расчетная сетка для дискретной модели трещин в двумерной постановке

1) в начальный момент времени разница решений с использованием подходов 1 и 2 существенна, так, например, для метода конечных-разностей погрешность на 5-м временном слое составляет 15% для подхода 1a и 6.7% для подхода 1b (см. рис. 5);

2) на конечный момент времени разница решений сокращается, так, например, для метода конечных разностей погрешность на последний момент времени составляет 5.8% для подхода 1a и 2% для подхода 1b;

3) использование среднегармонического значения коэффициентов для аппроксимации методом конечных разностей приводит к существенно лучшим результатам, когда уменьшается эффект «численного размазывания» решения, и, следовательно, такая аппроксимация является более предпочтительной для задач с сильно меняющимися коэффициентами;

4) для конечно-элементной аппроксимации получаем аналогичные результаты для подходов 1a и 2, то есть разница решений убывает по времени. Следовательно, для решения задач в трещиноватых пористых средах подход 2 аппроксимации является предпочтительным.

Отметим также, что подход 1 с неоднородными коэффициентами применим и для задач с заданием низкой проницаемости на трещинах, то есть фильтрации при наличии барьеров.

## 5. Результаты численного моделирования двумерной и трехмерной задач фильтрации в трещиноватой пористой среде

Представим результаты численного моделирования с помощью метода конечных элементов процессов фильтрации в области с более сложной геометрией трещин. Расчетная область имеет длину 2 км и высоту 500 м. В середине области расположена скважина с длиной 375 м, которая задается в виде точечного

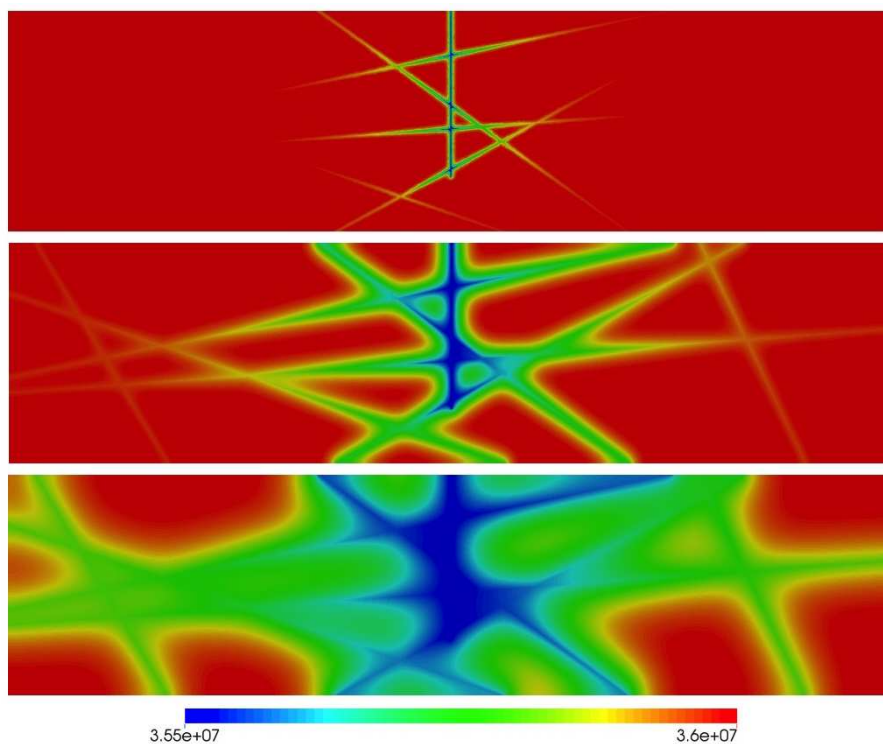


Рис. 8. Распределение поля давления для двумерной задачи для различных моменты времени: 1 ч, 1 сут и 7 сут

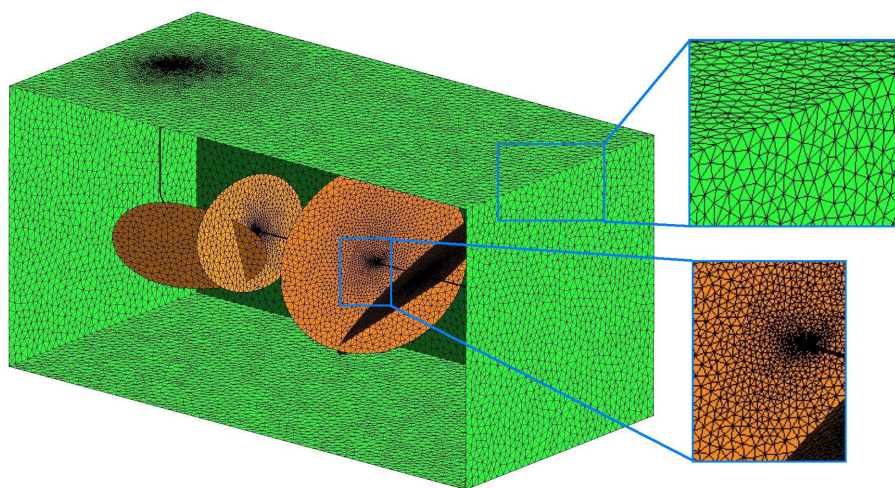


Рис. 9. Расчетная сетка и геометрия трещин для трехмерной задачи фильтрации в трещиноватой пористой среде

источника. Расчетная сетка представлена на рис. 7 и содержит 21410 узлов и 42213 элементов. Как говорилось ранее, трещины в виде линии – это грани треугольных элементов. Дискретизация конечными элементами производится с учетом того, что на трещинах и на скважинах должны существовать узлы, соединяющие элементы.

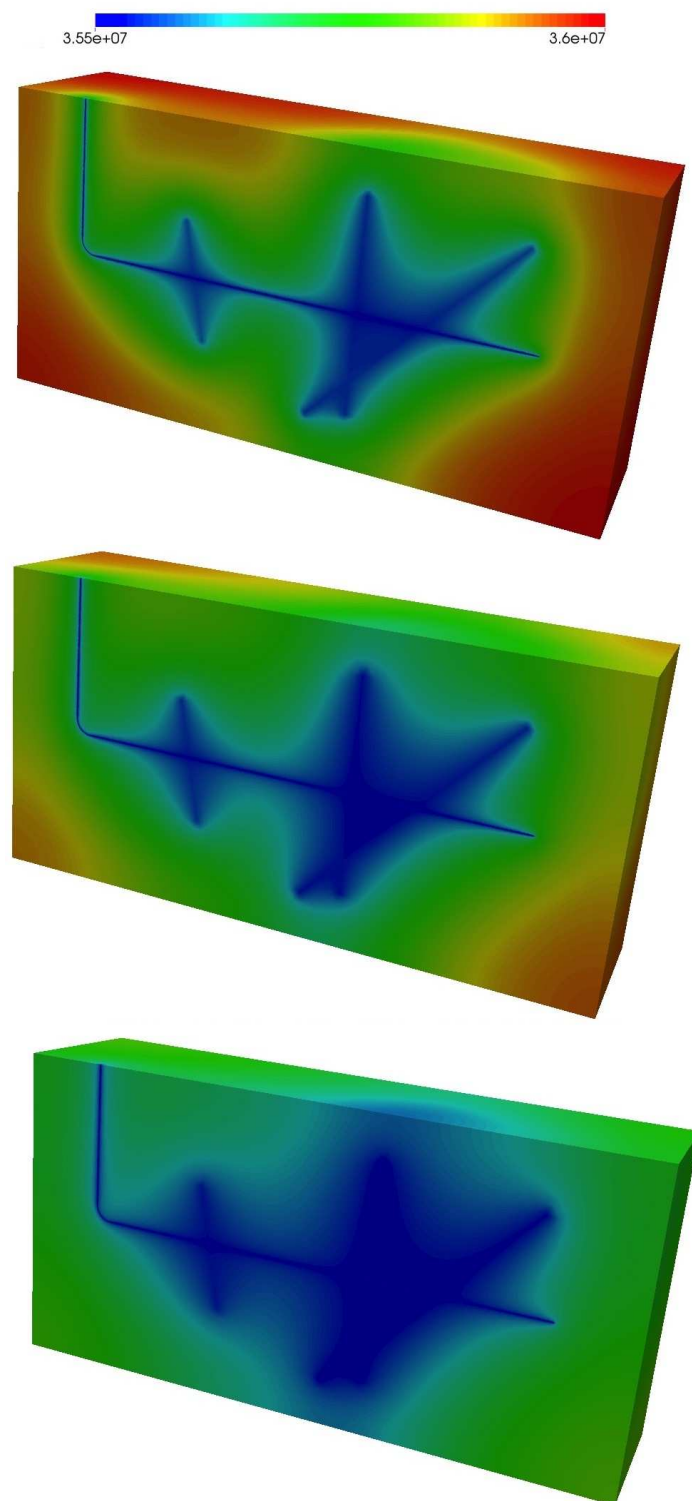


Рис. 10. Распределение поля давления в различные моменты времени в трехмерном случае: 6 ч, 12 ч и 1 сут

Расчет проводился при следующих входных данных: сжимаемость среды  $c_r = 10^{-8} \text{ Па}^{-1}$ , проницаемость среды для пор  $k_m = 10^{-13} \text{ м}^2$ , проницаемость среды для трещин  $k_f = 10^{-9} \text{ м}^2$ , вязкость флюида  $\mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ ; на границе  $i$ -й скважины полагаем  $p = g_i = 35.5 \text{ МПа}$ . Моделирование проводилось до  $T_{\max} = 1$  неделя с начальным условием  $u_0 = 36 \text{ МПа}$  и шагом по времени  $\tau = 1 \text{ ч}$ .

На рис. 8 представлены результаты численного решения задачи на различные моменты времени, которые иллюстрируют влияние сети трещин на процесс фильтрации. Отметим, что по трещинам, которые проходят через скважину, происходит основной поток флюида.

Нами была рассмотрена также и трехмерная постановка задачи. Расчетная область имеет длину 1000 м, ширину 500 м и высоту 500 м, радиус скважины составляет 10 см. На рис. 9 изображена расчетная сетка с тетраэдральными элементами и содержит 130110 узлов и 731468 элементов. Параметры задачи брались аналогичными предыдущей двумерной задачи.

На рис. 10 представлены распределения поля давления в различные моменты времени. Как и предполагалось, в трещинах скорость намного больше, чем в порах, и, следовательно, наличие сети трещин может значительно менять характер течения в пористой среде.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00732 а) и мегагранта Правительства РФ (проект № 14.Y26.31.0013).

#### Литература

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. – М.: Недра, 1982. – 408 с.
2. Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Media. – N. Y.: Elsevier, 1972. – 764 p.
3. Chen Z., Huan G., Ma Y. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media Siam. – Dallas, Texas: Southern Methodist Univ., 2006. – 569 p.
4. Васильева М.В., Васильев В.И., Тимофеева Т.С. Численное решение методом конечных элементов задач диффузионного и конвективного переноса в сильно гетерогенных пористых средах // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 2. – С. 243–261.
5. Talonov A., Vasilyeva M. On numerical homogenization of shale gas transport // J. Comput. Appl. Math. – 2016. – V. 301. – P.44–52. – doi: 10.1016/j.cam.2016.01.021.
6. Vabishchevich P., Vasil'eva M. Iterative solution of the pressure problem for the multiphase filtration // Math. Modelling and Analysis. – 2012. – V. 17, No 4. – P. 532–548. – doi: 10.3846/13926292.2012.706655.
7. Заславский М.Ю., Томин П.Ю. О моделировании процессов многофазной фильтрации в трещиноватых средах в применении к задачам адаптации модели месторождения. Препринт № 45. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2010. – 20 с.
8. Томин П.Ю. Математическое моделирование процессов фильтрации в трещиноватых средах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М., 2011. – 147 с.
9. Gong B., Karimi-Fard M., Durlofsky L.J. Upscaling discrete fracture characterizations to dual-porosity, dual-permeability models for efficient simulation of flow with strong gravitational effects // Soc. Pet. Eng. J. – 2008. – V. 13, No 1. – P. 58–67. – doi: 10.2118/102491-PA.
10. Karami-Fard M., Gong B., Durlofsky L.J. Generation of coarse-scale continuum flow models from detailed fracture characterizations // Water Resour. Res. – 2006. – V. 42, No 10. – Art. W10423, P. 1–13. – doi: 10.1029/2006WR005015.

11. *Karami-Fard M., Durlofsky L.J., Aziz K.* An efficient discrete fracture model applicable for general purpose reservoir simulators // Soc. Pet. Eng. J. – 2004. – V. 9, No 02. – P. 227–236. – doi: 10.2118/88812-PA.
12. *Barenblatt G.I., Zheltov I.P., Kochina I.N.* Basic concept in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks (strata) // J. Appl. Math. Mech. – 1960. – V. 24, No 5. – P. 1286–1303.
13. *Arbogast T., Douglas J. Jr., Hornung U.* Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory // SIAM J. Math. Anal. – 1990. – V. 21, No 4. – P. 823–836. – doi: 10.1137/0521046.
14. *Kazemi H., Merrill L.S. Jr., Porterfield K.L., Zeman P.R.* Numerical simulation of water-oil flow in naturally fractured reservoirs // Soc. Pet. Eng. J. – 1976. – V. 16, No 6. – P. 317–326. – doi: 10.2118/5719-PA.
15. *Warren J.E., Root P.J.* The behavior of naturally fractured reservoirs. // Soc. Pet. Eng. J. – 1963. – V. 3, No 3. – P. 245–255. – doi: 10.2118/426-PA.
16. *Вабичевич П.Н., Григорьев А.В.* Численное моделирование фильтрации флюида в анизотропной трещиновато-пористой среде // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2016. – Т. 19, № 1. – С. 61–74. – doi: 10.15372/SJNM20160105.
17. *Lee S.H., Jensen C.L., Lough M.F.* Efficient finite-difference model for flow in a reservoir with multiple length-scale fractures // Soc. Pet. Eng. J. – 2000. V. 5, No 3. – P. 268–275. – doi: 10.2118/65095-PA.
18. *Li L., Lee S.H.* Efficient field-scale simulation of black oil in a naturally fractured reservoir through discrete fracture networks and homogenized media // SPE Reservoir Evaluation & Engineering. – 2008. – V. 11, No 4. – P. 750–758. – doi: 10.2118/103901-PA.
19. *Karimi-Fard M., Firoozabadi A.* Numerical simulation of water injection in 2d fractured media using discrete-fracture model // SPE Annual Technical Conference and Exhibition. – 2001. – SPE Paper 71615. – doi: 10.2118/71615-MS.
20. *Kim J.-G., Deo M.D.* Finite element, discrete-fracture model for multiphase flow in porous media // AIChE J. – 2000. – V. 46, No 6. – P. 1120–1130. – doi: 10.1002/aic.690460604.
21. *Efendiev Y., Lee S., Li G., Yao J., Zhang N.* Hierarchical multiscale modeling for flows in fractured media using generalized multiscale finite element method // Int. J. Geomath. – 2015. – V. 6, No 2. – P. 141–162. – doi: 10.1007/s13137-015-0075-7.
22. *Akkutlu I.Y., Efendiev Y., Vasilyeva M.* Multiscale model reduction for shale gas transport in fractured media // Comput. Geosci. – 2016. – V. 20, No 5. – P. 953–973. – doi: 10.1007/s10596-016-9571-6.
23. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
24. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 589 с.
25. *Brenner S., Scott R.* The Mathematical Theory of Finite Element Methods. – N. Y.: Springer-Verlag, 2007. – XVIII, 400 p.

Поступила в редакцию  
31.01.17

---

**Васильева Мария Васильевна**, кандидат физико-математических наук, доцент-исследователь кафедры «Вычислительные технологии»

Северо-восточный федеральный университет  
ул. Белинского, д. 58, г. Якутск, 677000, Россия  
E-mail: [vasilyevadotmdotv@gmail.com](mailto:vasilyevadotmdotv@gmail.com)

**Васильев Василий Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедры «Вычислительные технологии»

Северо-восточный федеральный университет  
ул. Белинского, д. 58, г. Якутск, 677000, Россия  
E-mail: *vasvasil@mail.ru*

**Красников Алексей Андреевич**, аспирант кафедры «Вычислительные технологии»

Северо-восточный федеральный университет  
ул. Белинского, д. 58, г. Якутск, 677000, Россия  
E-mail: *aleksey.a.krasnikov@gmail.com*

**Никифоров Дьулустан Яковлевич**, аспирант кафедры «Вычислительные технологии»

Северо-восточный федеральный университет  
ул. Белинского, д. 58, г. Якутск, 677000, Россия  
E-mail: *dju92@mail.ru*

---

---

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2017, vol. 159, no. 1, pp. 100–115

---

---

### Numerical Simulation of Single-Phase Fluid Flow in Fractured Porous Media

*M.V. Vasilyeva\**, *V.I. Vasilyev\*\**, *A.A. Krasnikov\*\*\**, *D.Ya. Nikiforov\*\*\*\**

*North-Eastern Federal University, Yakutsk, 677000 Russia*  
E-mail: *\*vasilyevadotmdotv@gmail.com*, *\*\*vasvasil@mail.ru*,  
*\*\*\*aleksey.a.krasnikov@gmail.com*, *\*\*\*\*dju92@mail.ru*

Received January 31, 2017

#### Abstract

The models of single-phase fluid filtration in the fractured medium have been considered. Fractures have a significant impact on filtration processes, because they act as highly conductive channels. The mathematical model has been described by a parabolic pressure equation. Two approaches to flow approximation in fractures have been discussed: Approach 1 (by defining the nonhomogeneous coefficient for a cell occupied by the fracture); Approach 2 (by using a discrete model of fractures). Both approaches enable the explicit flow simulation in fractures by means of grid methods. Approximation of the problem has been performed using the method of finite differences and the method of finite elements. Numerical comparison of the two methods based on the model two-dimensional problem has been carried out. The results of simulation for the three-dimensional case have been presented.

**Keywords:** mathematical simulation, single-phase fluid flow, filtration, fractured porous media, nonhomogeneous coefficients, discrete model of fractures, method of finite differences, method of finite elements

**Acknowledgments.** The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-01-00732 a) and the megagrant of the Government of the Russian Federation (project no. 14.Y26.31.0013).

### Figure Captions

- Fig. 1. Fractured porous medium.
- Fig. 2. The computational grid for the fractured porous medium with explicit account of the flow in fractures: on the left – Approach 1; on the right – Approach 2.
- Fig. 3. The computational grid for the fractured porous medium with explicit account of the flow in fractures: on the left – Approach 1; on the right – Approach 2.
- Fig. 4. The results of the numerical solution of the model problem using finite-difference approximation for various time layers:  $m = 1, 5$  and  $20$ : above – Approach 1a; in the center – Approach 2: below – Approach 1b.
- Fig. 5. The results of the numerical solution of the model problem using the finite-element approximation for various time layers:  $m = 1, 5$  and  $20$ : above – Approach 1a; below – Approach 2.
- Fig. 6. The numerical comparison of Approaches 1 and 2. Error at various moments of time: on the left – method of finite differences; on the right – method of finite elements.
- Fig. 7. The computational grid for the two-dimensional discrete model of fractures.
- Fig. 8. The distribution of the pressure field for the two-dimensional problem at various moments of time: 1 h, 1 day, and 7 days.
- Fig. 9. The computational grid and geometry of fractures for the three-dimensional problem of filtration in the fractured porous medium.
- Fig. 10. The distribution of the pressure field at various moments of time in the three-dimensional case: 6 h, 12 h, and 1 day.

### References

1. Aziz K., Settari A. Petroleum Reservoir Simulation. London, Appl. Sci. Publ. Ltd., 1979. 476 p.
2. Bear J. Dynamics of Fluids in Porous Media. New York, Elsevier, 1972, 764 p.
3. Chen Z., Huan G., Ma Y. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media Siam. Dallas, Tex., South. Methodist Univ., 2006. 569 p.
4. Vasilyeva M.V., Vasilyev V.I., Timofeeva T.S. Numerical solution of the convective and diffusive transport problems in a heterogeneous porous medium using finite element method. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 2, pp. 243–261. (In Russian)
5. Talonov A., Vasilyeva M. On numerical homogenization of shale gas transport. *J. Comput. Appl. Math.*, 2016, vol. 301, pp. 44–52. doi: 10.1016/j.cam.2016.01.021.
6. Vabishchevich P., Vasil'eva M. Iterative solution of the pressure problem for the multi-phase filtration. *Math. Modell. Anal.*, 2012, vol. 17, no. 4, pp. 532–548. doi: 10.3846/13926292.2012.706655.
7. Zaslavskii M.Yu., Tomin P.Yu. On modeling of multiphase flows in fractured media with application to history matching problem. Preprint no. 45. Moscow, IMP im. M.V. Keldysh, 2010. 20 p. (In Russian)
8. Tomin P.Yu. Mathematical simulation of filtration processes in fractured reservoirs. *Cand. Phys.-Math. Diss.* Moscow, 2011. 147 p. (In Russian)
9. Gong B., Karimi-Fard M., Durlofsky L.J. Upscaling discrete fracture characterizations to dual-porosity, dual-permeability models for efficient simulation of flow with strong gravitational effects. *Soc. Pet. Eng. J.*, 2008, vol. 13, no. 1, pp. 58–67. doi: 10.2118/102491-PA.
10. Karimi-Fard M., Gong B., Durlofsky L.J. Generation of coarse-scale continuum flow models from detailed fracture characterizations. *Water Resour. Res.*, 2006, vol. 42, no. 10, art. W10423, pp. 1–13. doi: 10.1029/2006WR005015.

11. Karami-Fard M., Durlofsky L.J., Aziz K. An efficient discrete fracture model applicable for general purpose reservoir simulators. *Soc. Pet. Eng. J.*, 2004, vol. 9, no. 02, pp. 227–236. doi: 10.2118/88812-PA.
12. Barenblatt G.I., Zheltov I.P., Kochina I.N. Basic concept in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks (strata). *J. Appl. Math. Mech.*, 1960, vol. 24, no. 5, pp. 1286–1303.
13. Arbogast T., Douglas J.Jr., Hornung U. Derivation of the double porosity model of single phase flow via homogenization theory. *SIAM J. Math. Anal.*, 1990, vol. 21, no. 4, pp. 823–836. doi: 10.1137/0521046.
14. Kazemi H., Merrill L.S., Jr., Porterfield K.L., Zeman P.R. Numerical simulation of water-oil flow in naturally fractured reservoirs. *Soc. Pet. Eng. J.*, 1976, vol. 16, no. 6, pp. 317–326. doi: 10.2118/5719-PA.
15. Warren J.E., Root P.J. The behavior of naturally fractured reservoirs. *Soc. Pet. Eng. J.*, 1963, vol. 3, no. 3, pp. 245–255. doi: 10.2118/426-PA.
16. Vabishchevich P.N., Grigoriev A.V. Numerical simulation of a fluid flow in anisotropic fractured porous media. *Sib. Zh. Vychisl. Mat.*, 2016, vol. 19, no. 1, pp. 61–74. doi: 10.15372/SJNM20160105. (In Russian)
17. Lee S.H., Jensen C.L., Lough M.F. Efficient finite-difference model for flow in a reservoir with multiple length-scale fractures. *Soc. Pet. Eng. J.*, 2000, vol. 5, no. 3, pp. 268–275. doi: 10.2118/65095-PA.
18. Li L., Lee S.H. Efficient field-scale simulation of black oil in a naturally fractured reservoir through discrete fracture networks and homogenized media. *SPE Reservoir Eval. Eng.*, 2008, vol. 11, no. 4, pp. 750–758. doi: 10.2118/103901-PA.
19. Karimi-Fard M., Firoozabadi A. Numerical simulation of water injection in 2d fractured media using discrete-fracture model. *SPE Annu. Tech. Conf. Exhib.*, 2001. SPE Paper 71615. doi: 10.2118/71615-MS.
20. Kim J.-G., Deo M.D. Finite element, discrete-fracture model for multiphase flow in porous media. *AIChE J.*, 2000, vol. 46, no. 6, pp. 1120–1130. doi: 10.1002/aic.690460604.
21. Efendiev Y., Lee S., Li G., Yao J., Zhang N. Hierarchical multiscale modeling for flows in fractured media using generalized multiscale finite element method. *Int. J. Geomath.*, 2015, vol. 6, no. 2, pp. 141–162. doi: 10.1007/s13137-015-0075-7.
22. Akkutlu I.Y., Efendiev Y., Vasilyeva M. Multiscale model reduction for shale gas transport in fractured media. *Comput. Geosci.*, 2016, vol. 20, no. 5, pp. 953–973. doi: 10.1007/s10596-016-9571-6.
23. Samarskii A.A. Theory of Difference Schemes. Moscow, Nauka, 1989. 616 p. (In Russian)
24. Samarskii A.A., Nikolaev E.S. Methods for Solving Grid Equations. Moscow, Nauka, 1978. 589 p. (In Russian)
25. Brenner S., Scott R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. New York, Springer, 2007. XVIII. 400 p.

---

*Для цитирования:* Васильева М.В., Васильев В.И., Красников А.А., Никифоров Д.Я. Численное моделирование течения однофазной жидкости в трещиноватых пористых средах // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 1. – С. 100–115.

*For citation:* Vasilyeva M.V., Vasilyev V.I., Krasnikov A.A., Nikiforov D.Ya. Numerical simulation of single-phase fluid flow in fractured porous media. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 1, pp. 100–115. (In Russian)