ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 2 (441)

УДК 517.927

Ю.В. ПОКОРНЫЙ, Р. МУСТАФОКУЛОВ

О ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ФУНКЦИИ ГРИНА ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ

1. Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(p(x)u'')'' = f(x) \tag{1}$$

на множестве прямолинейных интервалов $\{\gamma_i\}_1^m$, расположенных в пространстве R^n. Каждый из интервалов γ_i является ребром геометрического графа (в других терминах — пространственной или топологической сети) из R^n. Этот граф Γ состоит по определению из объединения всех ребер γ_i, дополненного некоторым набором точек $J(\Gamma)$, каждая из которых является общим концом не менее двух ребер. В целом Γ предполагается связным. Множество концов γ_i, не вошедших в $J(\Gamma)$, обозначим через $\partial\Gamma$. Точки из $\partial\Gamma$ называем граничными вершинами Γ в отличие от точек $J(\Gamma)$, называемых внутренними вершинами Γ. Для удобства через $\overset{\circ}{\Gamma}$ обозначаем объединение всех ребер γ_i ($i = \overline{1,m}$). Топология на Γ индуцируется нормой R^n.

На каждом из ребер γ_i уравнение (1) понимается как обычно: дифференцирование вдоль отрезка производится по натуральному параметру. Под решениями уравнения (1) на Γ будем понимать функции, заданные на Γ со значениями в R^1, непрерывные в целом на Γ, удовлетворяющие уравнению (1) на $\overset{\circ}{\Gamma}$; в каждом из внутренних вершин $a \in J(\Gamma)$ решение помимо условия непрерывности должно удовлетворять дополнительным условиям согласования, приводимым далее. В граничных точках $\partial\Gamma$ будем накладывать на решения краевые условия. Изучаемая ниже задача возникает при моделировании упругих деформаций некоторых типов решеток из стержней. В центре внимания настоящей работы — вопрос об усилении положительной обратимости (u_0-положительность в терминах [1]) оператора, порождаемого уравнением (1) на графе при некоторых граничных условиях $\partial\Gamma$. Будем опираться на методологию дифференциальных уравнений на графах, развитую в [2], [3], для случая уравнения второго порядка. В этих работах можно найти более развернутое описание рассматриваемых графов.

Обозначим через $E(\Gamma)$ пространство функций $u(x)$, каждая из которых задана и непрерывна на Γ, имеет непрерывные производные до четвертого порядка на $\overset{\circ}{\Gamma}$ (т. е. на каждом ребре γ_i) и удовлетворяет в каждой внутренней вершине следующим условиям

$$u_i''(a+0) = 0 \quad (i \in I(a)), \tag{2}$$

$$\sum_{i\in I(a)} [(p_i u_i'')' - q u_i'](a+0) = 0 \quad (q_i > 0). \tag{3}$$

Здесь $I(a)$ — набор индексов примыкающих к a ребер γ_i, через $u_i(\cdot)$ обозначено сужение функции $u : \Gamma \to R^1$ на ребро γ_i, а $v_i'(a+0)$ означает производную от $v_i(x)$, вычисленную в точке a вдоль ребра γ_i по направлению "от a". Другими словами, включение $u(x) \in E(\Gamma)$ означает гладкость $u(x)$ на каждом ребре γ_i и непрерывность $u(x)$ в каждой внутренней вершине a вместе с условиями гладкости (2) и (3). Под решением (1) на Γ понимаем функцию из $E(\Gamma)$, удовлетворяющую уравнению (1) на $\overset{\circ}{\Gamma}$ или, что то же, условие непрерывности вместе с (2) и (3) вносим в понятие уравнения (1) на Γ.

Функция $p(\cdot)$ предполагается достаточно гладкой на $\overset{\circ}{\Gamma}$ и, кроме того, $\inf_{\Gamma} p(\cdot) > 0$. Нетрудно показать, что в $E(\Gamma)$ линейное многообразие решений уравнения (1) имеет размерность, совпадающую с удвоенным количеством $|\partial\Gamma|$ граничных вершин Γ, т. е. точек из $|\partial\Gamma|$. Если окажется, что $|\partial\Gamma| \neq 2$, то задача Коши для уравнения (1) лишена смысла. Именно поэтому нас интересуют лишь краевые задачи с условиями на $|\partial\Gamma|$. В каждой из вершин $b \in |\partial\Gamma|$ будем рассматривать условия следующего вида

$$\begin{aligned} u(b) - \alpha(pu'')'(b-0) = 0, \\ \beta u'(b-0) + \delta u''(b) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\alpha, \beta, \delta \geq 0$; $\beta + \delta > 0$. Здесь символами $u'(b-0)$ и $(pu'')'(b-0)$ обозначаются производные, вычисленные в точке b при локальной ориентации окрестности b в направлении "к b". Это позволит в дальнейшем при необходимости ориентировать примыкающие к b ребра вида (a, b) (при $a \in J(\Gamma)$) в направлении от a к b, не меняя при этом знаков коэффициентов как в условиях (3), так и в (4). Заметим, что условия (4) охватывают все известные случаи закрепления концов стержней (балок).

Теорема 1. *Задача* (1)–(4) *невырождена, т. е. однозначно разрешима при любой суммируемой на* $\overset{\circ}{\Gamma}$ *правой части* $f(x)$. *Функция Грина* $G(x, s)$ *этой задачи строго положительна на* $\Gamma \times \Gamma$ *и удовлетворяет неравенству*

$$u_0(x)h_1(s) \leq G(x, s) \leq u_0(x)h_2(s), \tag{5}$$

где $h_1(s)$, $h_2(s)$ *— строго положительные и суммируемые на* Γ *функции, а* $u_0(x)$ *— строго положительное решение задачи* (1)–(4) *при* $f(x) \equiv 1$.

Доказательство этой теоремы приводится далее в пп. 2-5. В п. 2 показывается невырожденность задачи, в п. 3 устанавливается позитивная разрешимость задачи (1)–(4), т. е. соизмеримость любых двух решений $u(x)$, $v(x)$ из $E(\Gamma)$ неравенства

$$(pu'')'' \geq 0, \tag{6}$$

удовлетворяющих краевым условиям (4). Напомним, что согласно [1] функции $u(x)$, $v(x)$ соизмеримы на Γ, если их отношение $\frac{u(x)}{v(x)}$ определено и ограничено на Γ сверху и снизу положительными константами. В качестве одной из функций естественно взять решение задачи (1)–(4) при $f(x) \equiv 1$, что и приведет в п. 5 от позитивной разрешимости задачи к оценкам вида (5). Предварительно в п. 4 будет показано существование функции Грина задачи (1)–(4) и изучены некоторые ее основные свойства.

2. Докажем невырожденность задачи (1)–(4). Для этого достаточно показать, что однородное уравнение

$$(pu'')'' = 0 \tag{7}$$

имеет в $E(\Gamma)$ при условиях (4) только тривиальное решение. Предполагая задачу (1)–(4) вырожденной, обозначим через $u(x)$ нетривиальное решение (7) в $E(\Gamma)$ при условиях (4).

Напомним, что ребро $\gamma = (a, b)$ графа Γ называется внутренним, если a и b принадлежат $J(\Gamma)$, а если либо a, либо b принадлежит $\partial\Gamma$, то γ называется тупиковым (граничным) ребром.

Лемма 1. *Пусть* $\gamma = (a, b)$ *— произвольное тупиковое ребро* Γ, *причем* $a \in J(\Gamma)$ *и* $b \in \partial\Gamma$. *Пусть* $q(a) > 0$. *Тогда если* $u(a) \neq 0$, *то числа* $u(a)$ *и* $[(pu'')' - qu'](a+0)$ *имеют одинаковый знак.*

Доказательство. Зададим на $\gamma = (a, b)$ ориентацию в направлении “от a”. Пусть сначала $(pu'')'(x) \equiv c > 0$ $(x \in \Gamma)$. Тогда в силу положительности $p(\cdot)$ и условия (2) имеем $u''(x) > 0$ $(x \in \gamma)$. Поэтому $u'(x) < 0$ и следует, что $u(x)$ является убывающей функцией. Кроме того, в силу первого условия (4) имеем $u(b) > 0$. Поэтому $u(a) > 0$. Аналогично показывается, что при $c < 0$ числа $u(a)$ и $[(pu'')' - qu'](a+0)$ являются отрицательными.

Рассмотрим теперь случай, когда $c = 0$. Тогда $(pu'')(x) \equiv 0$ $(x \in \gamma)$ и в силу второго условия (4) имеем $\beta u'(b-0) = 0$. Отсюда следует, что если $\beta \neq 0$, то $u'(b-0) = 0$, следовательно, $u'(x) \equiv 0$ $(x \in \gamma)$, т. е. $u(x) = \mathrm{const}$. Так как из первого условия (4) следует, что $u(b) = 0$, то $u(x) \equiv 0$ $(x \in \gamma)$, что противоречит условию. Поэтому $\beta = 0$, но тогда $u(x)$ оказывается линейной на γ функцией, причем $u(b) = 0$. Это означает, что при $u(a) < 0$ должно быть $u'(a+0) < 0$, поэтому $[(pu'')' - qu'](a+0) > 0$, а при $u(a) < 0$ — соответственно $[(pu'')' - qu'](a+0) < 0$. □

Докажем теперь невырожденность задачи (1)–(4). Рассмотрим вначале случай, когда граф $\Gamma = \Gamma_0$ имеет только одну внутреннюю вершину a, т. е. является пучком. Из леммы 1 следует, что при $u(a) \neq 0$ все слагаемые в сумме (3) имеют одинаковый знак, чего не может быть. Поэтому $u(a) = 0$ и $u(x) \equiv 0$ на каждом ребре γ_i пучка Γ_0.

Рассмотрим далее общий случай, когда множество внутренних вершин $J(\Gamma)$ состоит из более чем двух точек. Тогда на каждом внутреннем ребре γ_i решение $u(x)$ уравнения (7) имеет в концах нулевые вторые производные. Припишем каждой граничной вершине графа Γ нулевой ранг. Скажем, что внутренняя вершина a имеет ранг 1, если к ней примыкает хотя бы одно граничное ребро. Остальным вершинам графа Γ припишем ранг 2.

Пусть a — вершина ранга 1 и $u(a) > 0$. Тогда в силу леммы 1 имеем, что вдоль каждого граничного ребра γ_i, примыкающего к a, справедливо неравенство $[(p_i u_i'')' - q_i u_i'](a+0) > 0$.

Обозначим через M подмножество Γ, получающееся выбрасыванием из Γ всех его граничных ребер вместе с вершинами единичного ранга. Пусть M_0 — произвольная компонента связности M. Очевидно, M_0 является подграфом Γ, его граница ∂M_0 состоит из вершин единичного ранга Γ, а внутренними вершинами M_0 являются вершины Γ ранга 2. Как легко видеть, $u''(x) \equiv 0$ на M_0. Поэтому в каждой внутренней для M_0 вершине a условие (3) имеет вид

$$\sum_{i \in I(a)} q u_i'(a+0) = 0 \quad (q_i > 0) \tag{8}$$

и $u(x)$ оказывается на M_0 решением уравнения $u''(x) \equiv 0$ в смысле работы [3]. Поэтому или $u(x) \equiv \mathrm{const}$ на M_0, или $u(x)$ принимает свои экстремальные значения только на границе ∂M_0. В обоих случаях если $u(x) \not\equiv 0$ на M_0, то в одной из граничных для M_0 вершин a_0 функция $u(x)$ имеет положительный максимум или отрицательный минимум. Пусть $u(a_0) > 0$ (если $u(a_0) < 0$, то перейдем к $-u(x)$). Ввиду справедливости предыдущего рассуждения для каждой компоненты связности M и конечности числа этих компонент мы можем считать, что a_0 — точка положительного максимума относительно всего M. Вдоль каждого внутреннего ребра γ_i, примыкающего к этой вершине, должно выполняться неравенство $u_i'(a_0+0) \leq 0$, причем $(p_i u_i'')'(a_0+0) = 0$. Это противоречит (3) в точке a_0, т. к. для каждого граничного ребра γ_i, примыкающего к a_0, в силу леммы 1 $[(p_j u_j'')' - q_j u_j'](a+0) > 0$. Полученное противоречие означает, что $u(a) = 0$ для любой вершины a ранга 1 графа Γ. Отсюда следует, что $u(x) \equiv 0$ на M. Следовательно, для каждой вершины a единичного ранга исходная задача без изменений сужается на задачу прежнего типа для пучка Γ_0, образованного всеми тупиковыми ребрами и примыкающего к a. По доказанному выше каждая такая задача для каждой вершины a из ∂M невырождена, а поэтому $u(x) \equiv 0$ на всем Γ. Этим завершается доказательство невырожденности задачи (1)–(4).

3. Докажем теперь позитивную разрешимость задачи (1)–(4). Скажем, что точка $x_0 \in \Gamma$ является точкой полустрогого минимума непрерывной на Γ функции $u(x)$, если $u(x_0) \leq u(x)$ в некоторой окрестности x_0, причем $u(x) \not\equiv \mathrm{const}$ вблизи x_0.

Лемма 2. *Любое решение $u(x)$ задачи (1)–(4) при $f(x) \geq 0$ не может иметь внутри Γ точек полустрогого минимума.*

Доказательство. В предположении противного для некоторого решения $u(x)$ имеем точку полустрогого минимума x_0 внутри Γ. Рассмотрим сначала случай, когда $x_0 \in J(\Gamma)$. Так как $u(x_0) \leq u(x)$ вблизи от x_0, то вдоль любого ребра γ_i, примыкающего к x_0, имеем $u_i'(x_0+0) > 0$. Тогда из условия гладкости (3) вытекает, что существует примыкающее к x_0 граничное ребро γ_{i_0}, вдоль которого $(p_{i_0}u_{i_0}'')'(x_0+0) > 0$. Так как функция $(pu'')'(x)$ не убывает на ребре γ_{i_0} при ориентации его "от x_0", то $(p_{i_0}u_{i_0}'')'(x) > 0$ при всех $x \in \gamma_{i_0}$. Отсюда в силу положительности $p(\cdot)$ $u_{i_0}''(x)$ является строго монотонной на γ_{i_0} функцией. Тогда в силу условий (2) имеем $u_{i_0}''(x) > 0$ при $x \in \gamma_{i_0}$. Поэтому $u_{i_0}'(x)$ не убывает в γ_{i_0} и в силу второго уравнения (4) имеем $u_{i_0}'(b-0) \leq 0$, где b — другой конец γ_{i_0}. Следовательно, $u_{i_0}'(x) \leq 0$ $(x \in \gamma_{i_0})$. Но тогда $u_{i_0}(x)$ не возрастает в направлении "от x_0", не являясь константой вблизи справа от точки x_0, что противоречит предположению о полустрогом минимуме.

Пусть теперь x_0 лежит внутри одного из ребер γ графа Γ. Тогда в этой точке $u''(x_0) > 0$. Но функция $v(x) = (pu'')(x)$, удовлетворяя на γ неравенству $v'' \geq 0$ и имея на концах γ условия вида (2) (если γ — внутреннее ребро) или (2) и второе условие (4) (если γ — граничное ребро), строго отрицательна внутри γ. Полученное противоречие означает, что $u''(x) \equiv 0$ на γ, а т. к. $u'(x_0) = 0$, то $u'(x) \equiv 0$, что противоречит определению полустрогого минимума. $\square$

Вернемся к вопросу о позитивной разрешимости задачи (1)–(4). Пусть $u(x)$ — решение задачи (1) – (4) при $f(x) \geq 0$ $(f(x) \not\equiv 0)$. Аналогично лемме 1 легко установить, что $u(x) \geq 0$ на $\partial\Gamma$. Покажем, что $u(x) > 0$ на Γ. В предположении противного рассмотрим множество Ω точек из Γ, на которых достигается нижняя грань функции $u(x)$ на Γ. По предположению Ω не пусто. Если $\Omega = \Gamma$, то $u(x) \equiv 0$ на Γ, если же $\Omega \neq \Gamma$, то любая компонента связности Ω является подграфом Γ и любая граничная для этого подграфа вершина, не лежащая в $\partial\Gamma$, оказывается точкой полустрогого минимума $u(x)$, причем внутренней для Γ. Это противоречие с леммой 2 доказывает неравенство $u(x) > 0$ на Γ.

Исследуем теперь поведение $u(x)$ в окрестности точек из $\partial\Gamma$. Пусть b — некоторая точка из $\partial\Gamma$ и γ – примыкающее к ней ребро, причем a — другой конец γ. Обозначим через E_0 подмножество функций из $E(\Gamma)$, удовлетворяющих неравенству $(pu'')''(x) \geq 0$ и условиям (4) на $\partial\Gamma$. Для любой нетривиальной $u(x) \in E_0$ имеем $u(x) > 0$ при $x \in (a,b)$, в точке a — условия $u(a) > 0$, $u''(a) = 0$, а в точке b — условие (4). Предположим вначале, что для какой-либо $u(\cdot) \in E_0$ имеет место $u(b) = 0$. Если в (4) коэффициент $\alpha \neq 0$, то $(pu'')'(b) = 0$. Отсюда в силу неубывания функции $(pu'')'(x)$ на (a,b) имеем $(pu'')'(x) \leq 0$. Поэтому $u''(x)$ не возрастает на (a,b) и в силу $u''(a) = 0$ выполняется неравенство $u''(x) < 0$ при $x \in (a,b)$. Следовательно, из второго условия (4) получаем $u'(x) \geq 0$ при $x \in (a,b)$. Отсюда следует, что $u(x)$ не убывает на (a,b) и, т. к. $u(b) = 0$, то $u(x) \leq 0$ при $x \in (a,b)$, что невозможно. Полученное противоречие означает, что $\alpha = 0$ и для всех остальных функций $u(\cdot) \in E_0$ также имеет место $u(b) = 0$.

Допустим теперь, что для какой-либо $u(\cdot) \in E_0$ при $\alpha = 0$ имеет место $u(b) = u'(b) = 0$. Тогда из второго условия (4) имеем $\delta u''(b) = 0$. Отсюда, если $\delta > 0$, то $u''(b) = 0$, следовательно, в силу неубывания $(pu'')'(x)$ на (a,b) имеем $u''(x) \leq 0$. Поэтому $u'(x)$ убывает и, т. к. $u'(b) = 0$, то $u'(x) \geq 0$ при $x \in (a,b)$. Отсюда следует, что $u(x)$ не убывает на (a,b), чего быть не может. Поэтому $\delta = 0$, и при всех $u(\cdot) \in E_0$ имеет место $u(b) = u'(b) = 0$.

Таким образом, любые две нетривиальные функции $u(x)$, $v(x)$ из E_0 одновременно либо не обращаются в точке $x = b$ в нуль, либо имеют в этой точке нуль одной и той же кратности. Это означает, что отношение $\frac{u(x)}{v(x)}$ ограничено на Γ сверху и снизу положительными константами, т. е. задача (1)–(4) позитивно разрешима.

4. Перейдем теперь к изучению функции Грина задачи (1)–(4). Под функцией Грина краевой задачи (1)–(4) понимаем функцию двух переменных $G(x,s)$, заданную на $\Gamma \times \mathring{\Gamma}$ и такую, что

для каждой непрерывной на Γ функции $f(x)$ решение задачи (1)–(4) может быть представлено в виде

$$u(x) = \int_\Gamma G(x,s)f(s)ds. \tag{9}$$

Для доказательства существования функции Грина воспользуемся следующим приемом. Рассмотрим уравнение (1) и соответствующее однородное уравнение (7) на объединении всех ребер γ_i (т. е. на $\mathring{\Gamma}$), считая теперь все условия (2), (3) и (4) краевыми. Запишем все эти условия в виде набора равенств $l_i(u) = 0$ при произвольной нумерации функционалов l_i. Можно показать, что число этих скалярных условий совпадает с порядком $k = 4m$ системы уравнений на ребрах графа Γ.

Пусть $Q_i(x,s)$ — функция Грина для уравнения (1) на ребре γ_i при каких-то краевых условиях. Функция $Q_i(x,s)$ задана на $\gamma_{ij} = \gamma_i \times \gamma_j$. Очевидно,

$$Q(x,s) = \begin{cases} Q_i(x,s), & (x,s) \in \gamma_{ii}; \\ 0, & (x,s) \in \gamma_{ij} \quad (i \neq j), \end{cases}$$

является фундаментальным решением уравнения (7) на множестве $\mathring{\Gamma} \times \mathring{\Gamma}$. Пусть $\{\varphi_i(x)\}_1^k$ — произвольная фундаментальная система решений однородного уравнения (7) на $\mathring{\Gamma}$. Функцию Грина $\Gamma(x,s)$ краевой задачи (1)–(4) будем искать в виде

$$G(x,s) = Q(x,s) + \sum_{j=1}^{k} c_j(s)\varphi_j(x). \tag{10}$$

При подстановке $G(x,s)$ по переменной x в краевые условия $l_i(u) = 0$ для значений s, отличных от концов ребер γ_i, получаем систему уравнений относительно $c_i(\cdot)$ с ненулевым определителем (в силу невырожденности задачи). Выразив $c_j(\cdot)$ по формуле Крамера и подставив в (10), имеем для функции Грина формулу

$$G(x,s) = \frac{1}{\Delta} \begin{Vmatrix} Q(x,s) & \varphi_1(x) & \dots & \varphi_k(x) \\ l_1(Q(\cdot,s)) & l_1(\varphi_1) & \dots & l_1(\varphi_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_k(Q(\cdot,s)) & l_k(\varphi_1) & \dots & l_k(\varphi_k) \end{Vmatrix}, \tag{11}$$

где $\Delta = \det \|l_i(\varphi_j)\|$ есть определитель системы. В силу невырожденности краевой задачи (1)–(4) можем считать, что фундаментальная система $\{\varphi_i(x)\}$ выбрана так, чтобы $l_i(\varphi_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Тогда из (11) имеем

$$G(x,s) = Q(x,s) - \sum_{i=1}^{k} l_i(Q(\cdot,s))\varphi_i(x). \tag{12}$$

Функция $G(x,y)$ по формуле (12) определена и непрерывна на множестве $\mathring{\Gamma} \times \mathring{\Gamma}$. Ее можно доопределить до непрерывной на $\Gamma \times \mathring{\Gamma}$ функции, полагая $G(a,s) = \lim\limits_{\xi \to a} G(\xi,s)$, где $a \in J(\Gamma)$. С помощью представления (12) для функции Грина $G(x,y)$ можно получить все ее основные свойства, аналогичные свойствам функции Грина скалярной задачи, а именно: при каждом фиксированном $s_0 \in \mathring{\Gamma}$ функция $g(x) = G(x,s_0)$ удовлетворяет однородному уравнению (7) внутри каждого ребра γ_i при $x \neq s_0$, условиям связи (2), (3) во внутренних вершинах $a \in J(\Gamma)$, краевым условиям (4) в граничных вершинах $b \in \partial\Gamma$ и сумма квазипроизводных третьего порядка $(pg'')'(x)$ в точке $x = s_0$ (посчитанных в обоих направлениях от s_0) равна 1.

При исследовании знакоопределенности функции $G(x,y)$ оказывается важным анализ предельных срезок, определяемых равенствами

$$g^i(x) = \lim_{s\to a,\ s\in\gamma_i} G(x,s). \tag{13}$$

По отношению к обычной срезке $g(x) = G(x,s_0)$ при $s_0 \notin J(\Gamma)$ у предельной срезки меняется лишь поведение на "диагонали". Если для обычной срезки сумма третьих квазипроизводных $(pg'')'(x)$, посчитанных в точке $x = s_0$ в обоих направлениях от s_0, равна единице, то для предельной срезки $g^i(x)$ аналогичная формула примет вид (ср. с [4])

$$\sum_{j\in I(a)} [(p_j(g^i)''_j)' - q_j(g^i)'_j](s_0+0) = 1 \quad (i \in I(a)). \tag{14}$$

5. В этом пункте проведем анализ свойства позитивности функции Грина задачи (1)–(4) . Отметим, что в силу позитивной разрешимости задачи (1)–(4) и формулы (9) для $G(x,s)$ справедливо неравенство $G(x,s) \geq 0$ $(G(x,s) \not\equiv 0)$ на $\Gamma\times\Gamma$. Поэтому для доказательства строгой положительности $G(x,s)$ достаточно показать, что $G(x,s)$ не имеет нулей на $\Gamma\times\Gamma$.

Пусть $g(x) = G(x,s_0)$, где $s_0 \in \gamma_0 = (a_0,b_0)$ и γ_0 — некоторое ребро графа Γ. Покажем, что $g(s_0) > 0$. В силу свойств функции Грина, приведенных в предыдущем пункте, $g(x)$ удовлетворяет на γ_0 однородному уравнению (7) при $x \neq s_0$, в точках a_0 и b_0 — условиям вида (2) (если γ_0 — внутреннее ребро) или условию (2) в точке a_0 и второму условию (4) в точке b_0 (если γ_0 — граничное ребро), а при $x = s_0$ — условиям $g^i(s_0+0) = g^i(s_0-0)$ $(i = 0,1,2)$ и

$$(pg'')'(s_0+0) - (pg'')'(s_0-0) = 1 \tag{15}$$

(предполагаем, что $\gamma_0 = (a_0,b_0)$ ориентировано от a_0 к b_0).

Предположим, что $g(s_0) = 0$. Тогда в силу неотрицательности $g(x)$ точка $x = s_0$ является точкой минимума $g(x)$ на γ_0. Отсюда следует, что $g'(\cdot) \leq 0$ слева вблизи от s_0 и $g'(\cdot) \geq 0$ справа вблизи от s_0, т. е. $g'(\cdot)$ не убывает в точке s_0, следовательно, $g''(\cdot) \leq 0$ в этой точке. Так как $g''(a_0) = 0$ и $g''(b_0) \leq 0$ (последнее следует из второго условия (4) в силу $g'(b_0-0) \geq 0$), то $(pg'')(x)$ является линейно возрастающей в (a_0,s_0) и линейно убывающей в (s_0,b_0). Это означает, что $(pg'')'(s_0-0) \geq 0$ и $(pg'')'(s_0+0) \leq 0$, что противоречит равенству (15). Поэтому $g(s_0) > 0$ для любого $s_0 \in \mathring{\Gamma}$.

Покажем теперь, что $g(x) \neq 0$ при $x \neq s_0$. Множество $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \{s_0\}$, получающееся выбрасыванием из Γ точки s_0, состоит из не более двух компонент связности Γ_1 и Γ_2, каждая из них является подграфом Γ. На каждой из этих компонент функция $g(x)$ является решением однородного уравнения (7). Пусть $g(x_0) = 0$ при некотором x_0, принадлежащем, например, Γ_1. Тогда x_0 (т.к. $g(x) \geq 0$ в Γ) является точкой минимума $g(x)$ на Γ_1. Если $x_0 \in \gamma_1 = (a_1,b_1)$, то $g(x)$, являясь на Γ_1 решением однородного уравнения (7) и удовлетворяя на границах этого отрезка условиям $g''(a_1) = 0$, $\beta g'(b_1) + \delta g''(b_1) = 0$ (в случае, когда одна из точек a_1 или b_1 совпадает с s_0, соответствующее условие заменяется на $g(s_0) > 0$), не может иметь точек экстремума во внутренних точках этого отрезка. Поэтому $x_0 \in J(\Gamma_1)$, т. е. x_0 является одной из внутренних вершин графа Γ_1. Тогда для каждого примыкающего к x_0 ребра γ_i $(i \in I(x_0))$ имеем $g'(x_0+0) \geq 0$ (здесь каждое γ_i параметризовано "от x_0"). Отсюда и из условия связи (3) вытекает, что при некотором $i_0 \in I(x_0)$ имеет место $(p_{i_0}g''_{i_0})'(x_0+0) > 0$. Это означает, что $g''_{i_0}(x)$ возрастает и в силу (2) на ребре γ_{i_0} имеет место $g''_{i_0}(x) > 0$. Поэтому $g'_{i_0}(x)$ возрастает на γ_{i_0} и, т. к. из второго условия (4) имеем $g'_{i_0}(b-0) \leq 0$, где b — другой конец ребра γ_{i_0}, то $g'_{i_0}(x_0+0) < 0$, что противоречит предположению о минимуме в точке x_0. Полученное противоречие означает, что $g'_{i_0}(x_0+0) = 0$ вдоль каждого ребра γ_i $(i \in I(x_0))$. Поэтому из (3) в силу $g(x_0) = 0$ следует, что $g(x) \equiv 0$ на всех γ_i $(i \in I(x_0))$. Но тогда в силу непрерывности $g(x)$ на Γ_i имеем $g(x) \equiv 0$ во всех других вершинах Γ_1, к которым примыкают рассмотренные ребра. Продвигаясь далее по еще не рассмотренным ребрам подграфа Γ_1, получим в силу его связности, что $g(x) \equiv 0$ на всей компоненте Γ_1. Отсюда в силу непрерывности $g(x)$ на Γ, в том числе в точке $x = s_0$, получаем

$g(s_0)$=0, что противоречит полученному выше неравенству $g(x) > 0$. Поэтому $g(x) > 0$ при всех $x \neq s_0$ и этим доказана строгая положительность $G(x,s)$ на множестве $\Gamma \times \overset{\circ}{\Gamma}$.

Пусть теперь $s_0 \in J(\Gamma)$ и γ_i — одно из ребер, примыкающих к s_0. Предельная срезка $g^i(x)$ функции Грина, определенная равенством (13), при $x \neq s_0$ удовлетворяет однородному уравнению (7), во внутренних вершинах Γ удовлетворяет условиям связи (2) и (3), в граничных вершинах Γ — условиям (4). Условия, определяющие $g^i(x)$, меняются по отношению к $g(x)$ лишь на диагонали, т. е. при $x = s_0$ аналог условия (15) для $g^i(x)$ имеет вид (14). Поэтому аналогично предыдущему случаю доказывается, что $g^i(x)$ не имеет нулей в Γ. Таким образом, $G(x,s)$ не имеет нулей на $\Gamma \times \Gamma$.

Анализ поведения срезки функции Грина $g(x)$ в окрестности точек из $\partial\Gamma$ почти не отличается от проведенных в п. 3 рассуждений при доказательстве позитивной обратимости задачи, т. е. аналогичными рассуждениями показывается, что $G(x,s)$ для любого $s \in \Gamma$ либо не обращается в нуль в точках $b \in \partial\Gamma$, либо имеет в этих точках нуль одной и той же кратности при всех значениях $s \in \Gamma$. Этими же свойствами обладает, очевидно, и функция $u_0 = \int\limits_{\Gamma} G(x,s)ds$. Поэтому $g(x)$ при любом $s \in \Gamma$ соизмерима с $u_0(x)$, т. е. отношение $\frac{g(x)}{u_0(x)}$ ограничено снизу и сверху положительными суммируемыми функциями $0 < h_1(s) \leq \frac{g(x)}{u_0(x)} \leq h_2(s) < +\infty$. Отсюда следует справедливость оценки (5). Теорема 1 доказана.

6. Остановимся еще на одном свойстве решений задачи (1)–(4), имеющем интересную физическую интерпретацию.

Пусть b_0 — некоторая граничная вершина графа Γ. Обозначим через $N(b_0)$ множество решений однородного уравнения (7) в $E(\Gamma)$, удовлетворяющих условиям (4) на $\partial\Gamma \setminus \{b_0\}$, а в точке b_0 — только одному условию: $u''(b_0) = 0$. Следующая лемма является обобщением леммы 1.

Лемма 3. *Для любой ненулевой $u(x) \in N(b_0)$ существует число $\mu_0 > 0$ такое, что*

$$u(b_0) + \mu_0 u'(b_0 + 0) = 0. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть a — внутренняя вершина графа Γ, соединенная ребром γ_{i_0} с граничной вершиной b_0. Пусть $u(x)$ — ненулевое решение задачи (7)–(4) из $N(b_0)$. Из условия $u''(b_0) = 0$ вытекает, что $u''(x) \equiv 0$, функция $u(x)$ на ребре γ_{i_0} является линейной, т. е. $u(x) = u(a) + (x-a)u'(b_0+0)$ на γ_{i_0}, ориентированном в направлении "от b_0".

Допустим сначала, что $u(a) = 0$. Тогда как при $u_{i_0}(b_0) = 0$, так и при $u'_{i_0}(b_0+0) = 0$ в силу теоремы 1 должно быть $u(x) \equiv 0$ на Γ. Поэтому $u_{i_0}(b_0) \neq 0$, $u'_{i_0}(b_0+0) \neq 0$, причем $\frac{u'_{i_0}(b_0+0)}{u_{i_0}(b_0)} < 0$.

Пусть теперь $u(a) \neq 0$. Условие (3) для вершины a перепишем в виде

$$\sum_{i \in I(a),\ i \neq i_0} [(p_i u_i'')' - q_i u_i'](a+0) - q_{i_0} u'_{i_0}(a+0) = 0.$$

Здесь каждое из слагаемых под знаком суммы имеет в силу леммы 1 одинаковый с $u(a)$ знак. Поэтому $u(a)$ и $u'_{i_0}(a+0)$ также имеют одинаковые знаки. Отсюда в силу линейности $u(x)$ на γ_{i_0} следует, что $u'_{i_0} \equiv \mathrm{const} = u'_{i_0}(a+0)$ на γ_{i_0}, причем $u(x)$ имеет одинаковый с $u(a)$ знак. Следовательно, $\frac{u'_{i_0}(b_0+0)}{u_{i_0}(b_0)} < 0$.

Очевидно, пространство $N(b_0)$ одномерно. Поэтому для любых двух ненулевых $u(x)$, $v(x) \in N(b_0)$ должно быть $u(x) = \lambda v(x)$ при некотором λ. Но тогда $u'(x) = \lambda v'(x)$, откуда $\frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{u(x)}{v(x)} = \lambda = \frac{u'(b_0)}{v'(b_0)} = \frac{u(b_0)}{v(b_0)}$. Поэтому $\frac{u'(b_0)}{u(b_0)} = \frac{v'(b_0)}{v(b_0)} = \lambda_0 < 0$ для любой $u(x) \in N(b_0)$. Следовательно, $u(b_0) + \mu_0 u'(b_0) = 0$, где $\mu_0 = -\frac{1}{\lambda_0} > 0$. $\square$

Назовем ребро γ_{i_0} графа Γ перемычкой, если его выбрасывание из Γ влечет нарушение связности Γ, т. е. $\Gamma \setminus \gamma_{i_0}$ — не связное множество. Пусть a_0 — внутренняя вершина Γ и γ_{i_0} — примыкающая к a_0 перемычка. Обозначим через Γ_1 содержащую a_0 компоненту связности множества, получающегося из Γ выбрасыванием γ_{i_0}.

Рассмотрим на Γ_1 уравнение (1) при условии (4) на $\partial\Gamma_1$ и условиях (2),(3) на $J(\Gamma_1)$, исключая вершину a_0. В этой вершине условие (3) заменяется следующим

$$\sum_{i\in I(a_0),\ i\neq i_0} [(p_i u_i'')' - q_i u_i'](a+0) + \tau_0 u_{i_0}(a) = 0 \quad (\tau_0 > 0). \tag{17}$$

Обозначим решение этой задачи через $u_0(x)$.

Теорема 2. *Решение* $u(x)$ *задачи* (1)–(4) *совпадает на* Γ_1 *с* $u_0(x)$.

Доказательство. Пусть Γ_2 — примыкающий к a_0 подграф, содержащий перемычку γ_{i_0}, т. е. $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$. В силу леммы 3 любое ненулевое решение $u(\cdot)$ задачи (1)–(4) при $f(x) = 0$ на Γ_2 удовлетворяет в точке $x = a_0$ равенству (16). Кроме того, очевидно, $(p_{i_0} u_{i_0}'')'(a_0 + 0) = 0$. Обозначим через $u(x)$ решение задачи (1)–(4) на графе Γ при $f(x) = 0$ на множестве Γ_2. Тогда для $u(x)$ в условии (3) при $a = a_0$ соответствующее слагаемое $[(p_{i_0} u_{i_0}'')' - q_{i_0} u_{i_0}'](a + 0)$ можно заменить на $\tau_0 u_{i_0}(a_0)$, где $\tau_0 = \lambda_0 q_{i_0}$, что приводит к (17). $\square$

Переход к описанию задач Γ_1 означает для плоской решетки стержней, что при отсутствии нагрузки $f(\cdot)$ на ее части, примыкающей к вершине a_0 через перемычку γ_{i_0}, воздействие этой части на деформацию остальной решетки эквивалентно пружине, подставленной в точке a_0. То есть ненагруженную часть можно заменить пружиной.

Если функция $f(\cdot)$ отлична от нуля только на некотором пути из Γ, не примыкающем к циклам, т. е. состоящем из перемычек, то в силу теоремы 2 задача (1)–(4) допускает скаляризацию: заменяя влияние каждого подграфа, примыкающего к этому пути, условием (16), получим задачу для цепочки шарнирно сочлененных стержней, у которой некоторые из шарниров упруго подперты. Это обстоятельство оказывается полезным при изучении упругих колебаний в случае линейного распределения масс.

Литература

1. Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа.* – М.: Наука, 1975. – 511 с.
2. Пенкин О.М., Покорный Ю.В. *О краевой задаче на графе* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 4. – С. 701–703.
3. Покорный Ю.В., Пенкин О.М. *Теоремы Штурма для уравнений в графах* // ДАН СССР. – 1989. – Т. 309. – № 6. – С. 1306–1308.
4. Покорный Ю.В., Карелина И.Г. *О функции Грина задачи Дирихле на графе* // ДАН СССР. – 1991. – Т. 318. – № 3. – С. 542–544.

Научно-исследовательский институт математики Воронежского государственного университета

Таджикский государственный университет

Поступила
03.03.1998