ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 8 (531)

УДК 539.3:517.958

В.Н. ПАЙМУШИН

ТОЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПЛОСКИХ ФОРМАХ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ

1. Постановка задачи для пластины с незакрепленными краями

Точные аналитические решения тех или иных задач механики тонкостенных элементов конструкций в виде пластин и оболочек известны лишь для некоторых частных видов граничных условий, соответствующих определенным способам закрепления кромок (напр., при шарнирном их опирании). Таких решений для элементов конструкций со свободными и незакрепленными краями, для которых при постановке двумерных задач формулируются статические граничные условия, в литературе, по-видимому, не имеется. Считается, что при таких граничных условиях невозможно построить двумерные базисные функции, которые одновременно точно удовлетворяли бы как соответствующим уравнениям, так и граничным условиям задачи.

Предметом исследования данной статьи является линейная задача о плоских формах свободных колебаний прямоугольной ортотропной пластины с незакрепленными краями, свободными от усилий. Будем считать, что пластина имеет толщину h, длину a, ширину b и выполнена из упругого ортотропного материала с характеристиками E_1 E_2, G_{12}, ν_{12}, ν_{21}. Для нее уравнения движения в прямоугольной декартовой системе координат x, y представимы в виде (ρ — плотность материала)

$$\begin{aligned} f_1 &= g_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+\nu_{21}g_1)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \rho_*\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ f_2 &= g_2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (1+\nu_{12}g_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho_*\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $g_1 = B_{11}/B_{12}$, $g_2 = B_{22}/B_{12}$, $\rho_* = h\rho/B_{12}$, $B_{11} = \frac{E_1 h}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$, $B_{22} = \frac{E_2 h}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$, $B_{12} = hG_{12}$, $E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12}$. Если края пластины свободны, то для уравнений (1.1) должны быть сформулированы граничные условия

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \nu_{21}\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \ \text{ при } \ x = 0,\, a; \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \nu_{12}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \ \text{ при } \ y = 0,\, b. \tag{1.3}$$

Для задач о свободных колебаниях пластины уравнения (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned} f_1 &= g_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+\nu_{21}g_1)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Omega^2 u = 0, \\ f_2 &= g_2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (1+\nu_{12}g_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \Omega^2 v = 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\Omega^2 = \rho_*\omega^2$, ω^2 — квадрат круговой частоты свободных колебаний.

Поставив задачу построения точных аналитических решений уравнений (1.4) при граничных условиях (1.2), (1.3), приведем сначала решение простейшей одномерной по пространственным координатам задачи

$$f_1 = g_1 \frac{d^2 u}{dx^2} + \Omega^2 u = 0 \quad (x \in (0, a)), \tag{1.5}$$

$$\frac{du}{dx}\Big|_{x=0,\, a} = 0, \tag{1.6}$$

которое можно найти в учебной литературе.

Представим входящую в (1.5), (1.6) функцию $u(x)$ в виде

$$u = u_n \cos \lambda_n x + \widetilde{u}_n \sin \lambda_n x + u_0, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.7}$$

Подчинив (1.7) условиям (1.6), получим очевидное равенство $\widetilde{u}_n = 0$ и решение

$$u(x) = u_n \cos \lambda_n x + u_0. \tag{1.7a}$$

В соответствии с (1.7a) левая часть уравнения (1.5) примет вид

$$f_1 = -g_1 \lambda_n^2 u_n \cos nx - \rho_* (u_n \cos \lambda_n x + u_0). \tag{1.8}$$

По структуре (1.7a) видно, что для интегрирования (1.5) по координате x необходимо составить два уравнения метода Бубнова:

$$\int_0^a f_1 \cos \lambda_n x \, dx = 0, \tag{1.9}$$

$$\int_0^a f_1 dx = 0. \tag{1.10}$$

Как и следовало ожидать, из (1.10) при подстановке (1.8) следует очевидное равенство $u_0 = 0$, т. к. обобщенным перемещением $u_0 = \text{const}$ описывается жесткое смещение пластины, а из (1.9) при использовании (1.8) получим формулу для параметра круговой частоты свободных колебаний

$$\Omega^2 = g_1 \lambda_n^2 \quad \left(\rho\omega^2 = E_1 \lambda_{n^2} / (1 - \nu_{12}\nu_{21})\right), \tag{1.11}$$

имеющих форму

$$u = u_n \cos \lambda_n x. \tag{1.12}$$

Изложенный алгоритм решения простейшей задачи легко обобщается на решение и двумерной задачи, сформулированной в виде уравнений (1.4) при граничных условиях (1.2), (1.3). Прежде чем перейти к такому обобщению, заметим, что при введении предположения о нулевой изменяемости u и v по координате y, когда $\partial(\ldots)/\partial y \equiv 0$, функция (1.12) и соответствующая ей частота свободных колебаний (1.11) являются решением первого уравнения системы (1.1), а функция

$$v = v_n \cos \lambda_n x \tag{1.13}$$

и частота чисто сдвиговых форм колебаний

$$\Omega^2 = \lambda_n^2 \quad (\omega^2 = G_{12} \lambda_n^2 / \rho) \tag{1.14}$$

— решением второго уравнения системы (1.1), которые на кромках $x = 0,\ a$ удовлетворяют граничным условиям (1.2) при любых целочисленных значениях n, а на кромках $y = 0,\ b$

удовлетворяют граничным условиям (1.3) только при $n = 0$ (т. е. при $\lambda_n = 0$). Аналогичным образом, полагая $\partial(\dots)/\partial x = 0$, из (1.1) находим частоты

$$\Omega^2 = \lambda_k^2 \quad (\omega^2 = G_{12}\lambda_k^2/\rho), \quad \lambda_k = k\pi/b, \tag{1.15}$$

$$\Omega^2 = g_2\lambda_k^2 \quad (\rho\omega^2 = E_2\lambda_k^2/(1-\nu_{12}\nu_{21})) \tag{1.16}$$

и соответствующие им формы колебаний

$$u = u_0 \cos\lambda_k y, \tag{1.17}$$

$$v = v_0 \cos\lambda_k y. \tag{1.18}$$

Функции (1.17), (1.18), удовлетворяющие граничным условиям (1.3) при любых k, граничным условиям (1.2) удовлетворяют только при $k = 0$. Следовательно, из составленных решений для пластин конечных размеров нетривиальными являются лишь решения (1.12) и (1.18), которыми описываются не сдвиговые формы колебаний с частотами (1.11) и (1.16), а частоты (1.14) и (1.15) соответствуют чисто сдвиговым формам колебаний бесконечно длинной (форма (1.13)) и бесконечно широкой (форма (1.17)) пластин, у которых края $y, x = \mathrm{const}$ отсутствуют.

2. Точные аналитические решения задачи в классе двойных тригонометрических базисных функций

Положим

$$u = u_n(y)\cos\lambda_n x + \widetilde{u}_n \sin\lambda_n x + U(y), \quad v = v_n \sin\lambda_n x + \widetilde{v}_n \cos\lambda_n x + V(y), \tag{2.1}$$

где $u_n(y), \dots, V(y)$ — подлежащие определению одномерные функции от y. Считая, что входящие в (2.1) числа n являются нечетными, подчиним (2.1) граничным условиям (1.2). В результате получим равенства

$$\begin{aligned} \lambda_n\widetilde{u}_n + \nu_{21}\widetilde{v}_n' + V' = 0, \quad & -\lambda_n\widetilde{u}_n - \nu_{21}\widetilde{v}_n' + V' = 0, \\ u_n' + U' + \lambda_n v_n = 0, \quad & -u_n' + U' - \lambda_n v_n = 0, \end{aligned}$$

из которых следует

$$V = \widetilde{C}_1 = \mathrm{const}, \quad U = \widetilde{C}_2 = \mathrm{const}, \tag{2.2}$$

а также устанавливаются зависимости

$$\widetilde{u}_n = -\frac{\nu_{21}}{\lambda_n}\widetilde{v}_n', \quad v_n = -\frac{1}{\lambda_n}u_n'. \tag{2.3}$$

Записав выражения (2.1) в силу (2.2) и (2.3) в виде

$$u = u_n\cos\lambda_n x - \frac{\nu_{21}}{\lambda_n}\widetilde{v}_n'\sin\lambda_n x + \widetilde{C}_2, \quad v = -\frac{u_n'}{\lambda_n}\sin\lambda_n x + \widetilde{v}_n\cos\lambda_n x + \widetilde{C}_1, \tag{2.4}$$

примем для входящих в (2.4) одномерных функций от y представления

$$u_n = u_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{u}_{nk}\cos\lambda_k y + C_1, \quad \widetilde{v}_n = V_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{V}_{nk}\cos\lambda_k y + C_2, \tag{2.5}$$

где C_1, C_2, как и амплитудные значения u_{nk}, $\widetilde{u}_{nk}$, V_{nk}, $\widetilde{V}_{nk}$, — постоянные величины, а k принимает только нечетные значения. В результате при подстановке (2.5) в (2.4) получим

$$\begin{aligned} u &= (u_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{u}_{nk}\cos\lambda_k y + C_1)\cos\lambda_n x - \frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}(V_{nk}\cos\lambda_k y - \widetilde{V}_{nk}\sin\lambda_k y)\sin\lambda_n x + \widetilde{C}_2, \\ v &= -\frac{\lambda_k}{\lambda_n}(u_{nk}\cos\lambda_k y - \widetilde{u}_{nk}\sin\lambda_k y)\sin\lambda_n x + (V_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{V}_{nk}\cos\lambda_k y + C_2)\cos\lambda_n x + \widetilde{C}_1. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Внесем теперь построенные функции (2.6) в граничные условия (1.3) и приравняем нулю коэффициенты при $\sin\lambda_n x$ и $\cos\lambda_n x$ в силу их линейной независимости. В результате получим равенства

$$C_1 = C_2 = 0,$$

а также условия

$$\widetilde{u}_{nk} \neq 0, \quad \text{если} \quad \lambda_k^2 - \nu_{12}\lambda_n^2 = 0; \tag{2.7}$$

$$V_{nk} \neq 0, \quad \text{если} \quad \lambda_k = 0; \tag{2.8}$$

$$\widetilde{V}_{nk} \neq 0, \quad \text{если} \quad \lambda_n^2 - \nu_{21}\lambda_k^2 = 0. \tag{2.9}$$

Таким образом, общее решение изучаемой задачи, удовлетворяющее всем граничным условиям (1.2) и (1.3), при отбрасывании компонент жестких смещений $\widetilde{C}_1$ и $\widetilde{C}_2$ для нечетных значений n и k будет иметь вид

$$\begin{aligned} u &= (u_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{u}_{nk}\cos\lambda_k y)\cos\lambda_n x - \frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}(V_{nk}\cos\lambda_k y - \widetilde{V}_{nk}\sin\lambda_k y)\sin\lambda_n x, \\ v &= -\frac{\lambda_k}{\lambda_n}(u_{nk}\cos\lambda_k y - \widetilde{u}_{nk}\sin\lambda_k y)\sin\lambda_n x + (V_{nk}\sin\lambda_k y + \widetilde{V}_{nk}\cos\lambda_k y)\cos\lambda_n x, \end{aligned} \tag{2.10}$$

которое, как нетрудно убедиться, является справедливым и при четных значениях n и k, если в исходных представлениях (2.1) принимаются равенства $U = V = 0$.

Построенные функции перемещений (2.10) содержат в себе четыре линейно независимых частных решения, из которых три решения являются таковыми только при выполнении установленных условий (2.7)–(2.9), причем можно убедиться, что при всех содержащихся в (2.10) решениях сдвиговая деформация равна нулю не только на краях, но и во всех внутренних точках пластины.

Дальнейшее решение изучаемой задачи может быть осуществлено двумя методами. Первый из них является вариационным и требует формулировки задачи в виде вариационного уравнения, соответствующего использованию принципа возможных перемещений. Такое вариационное уравнение при условии предварительного удовлетворения всем статическим граничным условиям задачи запишется в виде

$$\int_0^a \int_0^b (f_1\delta u + f_2\delta v)dx\,dy = 0, \tag{2.11}$$

где f_1 и f_2 — левые части уравнений (1.4). Если в уравнении (2.11) вариации δu и δv считать абсолютно произвольными, то из него и следуют дифференциальные уравнения свободных колебаний (1.4). Однако, в силу структуры построенных функций (2.10) они являются произвольными только в силу произвольности в (2.10) обобщенных перемещений δu_{nk}, $\delta\widetilde{u}_{nk}$, $\delta\widetilde{V}_{nk}$, δV_{nk}. Следовательно, в силу вариационного уравнения Лагранжа (2.11) и структуры построенных функций (2.10) для дальнейшего решения задачи необходимо составить уравнения метода Бубнова следующих видов:

$$\int_0^a \int_0^b \left(f_1\sin\lambda_k y\cos\lambda_n x - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}f_2\cos\lambda_k y\sin\lambda_n x\right)dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad u_{nk} \neq 0,$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(f_1\cos\lambda_k y\cos\lambda_n x + \frac{\lambda_k}{\lambda_n}f_2\sin\lambda_k y\sin\lambda_n x\right)dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad \widetilde{u}_{nk} \neq 0,$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(-\frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}f_1\cos\lambda_k y\sin\lambda_n x + f_2\sin\lambda_k y\cos\lambda_n x\right)dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad V_{nk} \neq 0,$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}f_1\sin\lambda_k y\sin\lambda_n x + f_2\cos\lambda_k y\cos\lambda_n x\right)dx\,dy = 0 \quad \text{при} \quad \widetilde{V}_{nk} \neq 0,$$

в которых в соответствии с (1.4) и (2.10)

$$f_1 = [-g_1\lambda_n^2 + \nu_{21}g_1\lambda_k^2 + \Omega^2](u_{nk}\sin\lambda_k y\cos\lambda_n x + \widetilde{u}_{nk}\cos\lambda_k y\cos\lambda_n x) +$$
$$+\left[\frac{\nu_{21}\lambda_k^3}{\lambda_n} - \lambda_n\lambda_k - \frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}\Omega^2\right](V_{nk}\cos\lambda_k y\sin\lambda_n x - \widetilde{V}_{nk}\sin\lambda_k y\sin\lambda_n x), \tag{2.12}$$

$$f_2 = \left[g_2\frac{\lambda_k^3}{\lambda_n} - \nu_{12}g_2\lambda_n\lambda_k - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\Omega^2\right](u_{nk}\cos\lambda_k y\sin\lambda_n x - \widetilde{u}_{nk}\sin\lambda_k y\sin\lambda_n x) +$$
$$+[-g_2\lambda_k^2 - \lambda_n^2 + (1+\nu_{12}g_2)\nu_{21}\lambda_k^2 + \Omega^2](V_{nk}\sin\lambda_k y\cos\lambda_n x + \widetilde{V}_{nk}\cos\lambda_k y\cos\lambda_n x). \tag{2.13}$$

После подстановки (2.12) и (2.13) в (2.11) в силу $u_{nk} \neq 0$ приходим к формуле

$$\Omega^2 = \frac{1}{\lambda_n^2 + \lambda_k^2}[g_1\lambda_n^4 + g_2\lambda_k^4 - 2\nu_{12}g_2\lambda_k^2\lambda_n^2], \tag{2.14}$$

соответствующей одному из частных решений изучаемой задачи в виде

$$u = u_{nk}\sin\lambda_k y\cos\lambda_n x, \quad v = -\frac{\lambda_k}{\lambda_n}u_{nk}\cos\lambda_k y\sin\lambda_n x, \tag{2.15}$$

автономно удовлетворяющему граничным условиям (1.2), (1.3) без наложения каких-либо условий.

Формула (2.14) при $\lambda_k = 0$ сводится к (1.10), а при $\lambda_n = 0$ — к (1.16). Однако при $\lambda_k = 0$ из (2.10) не следует решение (1.12). При $\lambda_n = 0$ из (2.15) следует решение $u = u_{nk}\sin\lambda_k y$, $v = -\lambda_k u_{nk} x\cos\lambda_k y$, также не совпадающее с (1.18).

Внесем теперь (2.12) и (2.13) в (2.11) и потребуем выполнения условия (2.7). В результате в силу $\widetilde{u}_{nk} \neq 0$ для Ω^2 получим ту же формулу (2.14). Однако в данном случае она должна быть преобразована путем использования условия $\lambda_k^2 = \nu_{12}\lambda_n^2$, что приводит к формуле

$$\Omega^2 = \widetilde{g}_1\frac{\lambda_n^2}{1+\nu_{12}}, \tag{2.16}$$

где $\widetilde{g}_1 = g_1(1-\nu_{12}\nu_{21}) = E_1/G_{12}$.

Заметим, что выведенная формула (2.16) соответствует еще одному частному решению задачи

$$u = \widetilde{u}_{nk}\cos\lambda_k y\cos\lambda_n x, \quad v = \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\widetilde{u}_{nk}\sin\lambda_k y\sin\lambda_n x, \tag{2.17}$$

на которое наложено условие $\lambda_k^2 = \nu_{12}\lambda_n^2$, позволяющее точно удовлетворить граничным условиям (1.2), (1.3). При этом $\sigma_y = 0$ не только на краях пластины, но и во всех ее внутренних точках, а функциями (2.17) описывается ее чистое изгибное состояние без появления касательных напряжений τ_{xy}, когда $\sigma_x \neq 0$.

При подстановке (2.12) и (2.13) в (2.11) и учете условия $\lambda_k = 0$ в силу $V_{nk} \neq 0$ приходим к формуле

$$\Omega^2 = \lambda_n^2, \tag{2.18}$$

соответствующей решению

$$u = -\frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}V_{nk}\cos\lambda_k y\sin\lambda_n x, \quad v = V_{nk}\sin\lambda_k y\cos\lambda_n x. \tag{2.19}$$

Данное решение удовлетворяет всем граничным условиям только при $\lambda_k = 0$, что приводит в классе изучаемых функций только к тривиальному решению $u \equiv 0$, $v \equiv 0$, в то время как Ω^2 по (2.18) является частотой чисто сдвиговых форм колебаний, реализация которых возможна только у бесконечно широкой пластины.

И, наконец, при подстановке (2.12) и (2.13) в (2.11) с учетом условия $\lambda_n^2 = \nu_{12}\lambda_k^2$ в силу $\widetilde{V}_{nk} \neq 0$ приходим к формуле

$$\Omega^2 = \widetilde{g}_2 \frac{\lambda_k^2}{1+\nu_{21}}, \tag{2.20}$$

где $\widetilde{g}_2 = g_2(1-\nu_{12}\nu_{21}) = E_2/G_{12}$. Данной формуле соответствует решение вида

$$u = \frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}\widetilde{V}_{nk}\sin\lambda_k y \sin\lambda_n x, \quad v = \widetilde{V}_{nk}\cos\lambda_k y\cos\lambda_n x, \tag{2.21}$$

на которое должно быть наложено условие (2.9) для удовлетворения сформулированным граничным условиям. При выполнении условия (2.9) $\sigma_x = 0$ не только на краях пластины, но и во всех ее внутренних точках, а функциями (2.21) по аналогии с (2.17) описывается ее чистое изгибное состояние с $\sigma_y \neq 0$.

Заметим, что формула (2.20), как и (2.16), также может быть получена путем преобразования формулы (2.14), но в данном случае с использованием условия $\lambda_n^2 = \nu_{12}\lambda_k^2$. Следовательно, основные частоты бессдвиговых форм колебаний определяются по формуле (2.14) при значениях $n = 0$, $k = 0$, а также при $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$ Из нее при выполнении условий

$$\frac{k^2}{n^2} = \nu_{12}\frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{n^2}{k^2} = \nu_{21}\frac{a^2}{b^2}$$

следуют формулы (2.16) и (2.20).

В соответствии со вторым методом, считающимся в литературе точным, подставляя в уравнения (1.4) функции (2.15), (2.17), (2.19) и (2.21), получим равенства

$$\begin{gathered}(-g_1\lambda_n^2 + \nu_{21}g_1\lambda_k^2 + \Omega^2)u_{nk}\sin\lambda_k y\cos\lambda_n x = 0,\\ \left(g_2\frac{\lambda_k^3}{\lambda_n} - \nu_{12}g_2\lambda_n\lambda_k - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\Omega^2\right)u_{nk}\cos\lambda_k y\sin\lambda_n x = 0;\end{gathered} \tag{2.22}$$

$$\begin{gathered}(-g_1\lambda_n^2 + \nu_{21}g_1\lambda_k^2 + \Omega^2)\widetilde{u}_{nk}\cos\lambda_k y\cos\lambda_n x = 0,\\ \left(g_2\frac{\lambda_k^3}{\lambda_n} - \nu_{12}g_2\lambda_n\lambda_k - \frac{\lambda_k}{\lambda_n}\Omega^2\right)\widetilde{u}_{nk}\sin\lambda_k y\sin\lambda_n x = 0;\end{gathered} \tag{2.23}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{\nu_{21}\lambda_k^3}{\lambda_n} - \lambda_n\lambda_k - \frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}\Omega^2\right)V_{nk}\cos\lambda_k y\sin\lambda_n x = 0,\\ (-\widetilde{g}_2\lambda_k^2 - \lambda_n^2 + \nu_{21}\lambda_k^2 + \Omega^2)V_{nk}\sin\lambda_k y\cos\lambda_n x = 0;\end{gathered} \tag{2.24}$$

$$\begin{gathered}\left(\frac{\nu_{21}\lambda_k^3}{\lambda_n} - \lambda_n\lambda_k - \frac{\nu_{21}\lambda_k}{\lambda_n}\Omega^2\right)\widetilde{V}_{nk}\sin\lambda_k y\sin\lambda_n x = 0,\\ (-\widetilde{g}_2\lambda_k^2 - \lambda_n^2 - \nu_{21}\lambda_k^2 + \Omega^2)\widetilde{V}_{nk}\cos\lambda_k y\cos\lambda_n x = 0,\end{gathered} \tag{2.25}$$

из которых равенства (2.23)–(2.25) при наложении условий (2.7)–(2.9) принимают вид

$$(-\widetilde{g}_1\lambda_n^2 + \Omega^2)\widetilde{u}_{nk}\cos\lambda_k y\cos\lambda_n x = 0, \tag{2.26}$$

$$\lambda_k\Omega^2\widetilde{u}_{nk}\sin\lambda_k y\sin\lambda_n x = 0, \tag{2.27}$$

$$(\Omega^2 - \lambda_n^2)V_{nk}\sin\lambda_k y\cos\lambda_n x = 0, \tag{2.28}$$

$$\nu_{21}\lambda_k\Omega^2\widetilde{V}_{nk}\sin\lambda_k y\sin\lambda_n x = 0, \tag{2.29}$$

$$(-\widetilde{g}_2\lambda_k^2 + \Omega^2)\widetilde{V}_{nk}\cos\lambda_k y\cos\lambda_n x = 0. \tag{2.30}$$

Из (2.22) при условии $u_{nk} \neq 0$ следуют две формулы для определения Ω^2:

$$\Omega^2 = g_1(\lambda_n^2 - \nu_{21}\lambda_k^2), \quad \Omega^2 = g_2(\lambda_k^2 - \nu_{12}\lambda_n^2), \tag{2.31}$$

поэтому справедливо равенство

$$g_1(\lambda_n^2 - \nu_{21}\lambda_k^2) = g_2(\lambda_k^2 - \nu_{12}\lambda_n^2), \tag{2.32}$$

при использовании которого из (2.31) следуют как формула (2.16), так и формула (2.20).

При условиях $\Omega^2 \neq 0$, $\widetilde{u}_{nk} \neq 0$ равенство (2.27) может быть выполнено только при выполнении равенства $\lambda_k = 0$, что не противоречит выполнению другого равенства (2.26). Из него при условии $\widetilde{u}_{nk} \neq 0$ следует формула

$$\Omega^2 = \widetilde{g}_1\lambda_n^2. \tag{2.33}$$

Еще одна формула

$$\Omega^2 = \lambda_n^2 \tag{2.34}$$

следует из (2.28) при условии $V_{nk} \neq 0$, а два равенства (2.29) и (2.30), которые должны выполняться только при их совместном рассмотрении, требуют выполнения равенства $\widetilde{V}_{nk} = 0$.

Формулой (2.33) определяются частоты продольных колебаний в направлении оси x, которые соответствуют использованию одномерного уравнения, полученного предварительным редуцированием исходных уравнений к стержневой модели на базе предположения $\sigma_{yy} = 0$. А формула (2.34), как было отмечено ранее, соответствует чисто сдвиговой форме колебаний лишь бесконечно широкой пластины, у которой края $y = 0$, b отсутствуют.

Появление в формулах (2.16) (по сравнению с (2.33)) и (2.20) знаменателей $(1+\nu_{12})$ и $(1+\nu_{21})$ имеет вполне объяснимый физический смысл. Можно убедиться в том, что оно связано с учетом перемещений от связей $\varepsilon_y = -\nu_{12}\varepsilon_x$, $\varepsilon_x = -\nu_{21}\varepsilon_y$ и соответствующих им инерционных сил в первом случае в направлении оси y, когда пластина совершает изгибные колебания по форме (2.17), а во втором случае в направлении оси x, когда изгибные колебания имеют форму (2.21).

Сравнивая результаты, полученные разными методами, можно убедиться лишь в их частичном совпадении, что на первый взгляд является неожиданным. Объяснение выявленному парадоксу следует из вариационного уравнения (2.11). В силу того, что вариации δu и δv не являются абсолютно независимыми, а в данном случае связаны зависимостями видов

$$u = A\psi(x,\, y), \quad v = cA\varphi(x,\, y), \tag{2.35}$$

в которых A — некоторое обобщенное перемещение, использование уравнений колебаний

$$f_1 = L_1(u, v) = 0, \quad f_2 = L_2(u, v) = 0 \tag{2.36}$$

в рамках второго метода решения задачи является некорректным. Для получения корректного решения в соответствии с (2.35) вместо уравнений (2.36), очевидно, должно быть составлено уравнение вида

$$[L_1(\psi, c\varphi) + cL_2(\psi, c\varphi)]A = 0,$$

использование которого в рамках второго метода и приводит к результатам, полученным при использовании вариационного метода.

Необходимо отметить, что получение формул (2.16) и (2.20) из равенств (2.31), (2.32), т.е. из уравнений (2.22), является случайным, т. к. колебаниям с частотами (2.16) соответствует форма (2.17). На самом деле совместное корректное решение уравнений (2.22) должно быть выполнено только по методу Бубнова с использованием вариационного уравнения (2.11), результатом которого и является формула (2.14), а не формула (2.16). Данное замечание относится к совместному решению и остальных составленных уравнений (2.23)–(2.25).

3. Построение точного решения задачи при $n = 0$ и произвольных целочисленных значениях k (бессдвиговые изгибные формы колебаний)

Если принять $n = 0$, то в силу $\lim\limits_{\lambda_n \to 0} \frac{\sin \lambda_n x}{\lambda_n} = x$ функции (2.10) принимают вид

$$\begin{aligned} u &= u_{0k} \sin \lambda_k y + \widetilde{u}_{0k} \cos \lambda_k y - \nu_{21} \lambda_k x (V_{0k} \cos \lambda_k y - \widetilde{V}_{0k} \sin \lambda_k y), \\ v &= -\lambda_k x (u_{0k} \cos \lambda_k y - \widetilde{u}_{0k} \sin \lambda_k y) + V_{0k} \sin \lambda_k y - \widetilde{V}_{0k} \cos \lambda_k y. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Эти функции будут удовлетворять граничным условиям (1.2), (1.3), как легко можно убедиться, лишь при удовлетворении равенствам

$$a\nu_{21}\lambda_k^2 \widetilde{u}_{0k} = 0, \; a\nu_{21}\lambda_k^2 u_{0k} = 0, \;\; a\nu_{21}\lambda_k^2 V_{0k} = 0, \;\; a\nu_{21}\lambda_k^2 \widetilde{V}_{0k} = 0. \tag{3.2}$$

Предполагая, что условия (3.2) выполняются, подстановкой функций (3.1) в (1.4) получим выражения

$$\begin{aligned} f_1 &= (\nu_{21} g_1 \lambda_k^2 + \Omega^2)(u_{0k} \sin \lambda_k y + \widetilde{u}_{0k} \cos \lambda_k y) - \Omega^2 \nu_{21} \lambda_k x (V_{0k} \cos \lambda_k y - \widetilde{V}_{0k} \sin \lambda_k y), \\ f_2 &= [(-\widetilde{g}_2 + \nu_{21})\lambda_k^2 + \Omega^2](V_{0k} \sin \lambda_k y + \widetilde{V}_{0k} \cos \lambda_k y) + g_2 \lambda_k^3 x (u_{0k} \cos \lambda_k y - \widetilde{u}_{0k} \sin \lambda_k y), \end{aligned} \tag{3.3}$$

из которых видно, что построенные функции (3.1) содержат в себе четыре частных решения:

$$\begin{aligned} &u = u_{0k} \sin \lambda_k y, && v = -\lambda_k x \, u_{0k} \cos \lambda_k y; \\ &u = \widetilde{u}_{0k} \cos \lambda_k y, && v = \lambda_k x \, \widetilde{u}_{0k} \sin \lambda_k y; \\ &u = -\nu_{21} \lambda_k x V_{0k} \cos \lambda_k y, && v = V_{0k} \sin \lambda_k y; \\ &u = \nu_{21} \lambda_k x \widetilde{V}_{0k} \sin \lambda_k y, && v = \widetilde{V}_{0k} \cos \lambda_k y. \end{aligned}$$

Эти решения удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.4) и по принятому определению являются точными. Но их подчинение граничным условиям (1.2), (1.3), требующее выполнения равенств (3.2), в случае $\lambda_k = 0$ приводит к решению, описывающему только жесткие смещения. Поэтому нетривиальное решение изучаемой задачи, когда $\lambda_k \neq 0$, $u \neq 0$, $v \neq 0$, может существовать лишь в том случае, когда $\nu_{21} = 0$.

Данное условие эквивалентно введению предположения $\sigma_x = 0$, когда $g_2 = \widetilde{g}_2$, $\sigma_y = E_2 \varepsilon_y$. При его выполнении общее решение (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} u &= u_{0k} \sin \lambda_k y + \widetilde{u}_{0k} \cos \lambda_k y = u_0(y), \\ v &= -\lambda_k x (u_{0k} \cos \lambda_k y - \widetilde{u}_{0k} \sin \lambda_k y) + V_{0k} \sin \lambda_k y - \widetilde{V}_{0k} \cos \lambda_k y = V_0(y) - x \frac{du_0}{dy}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

для вычисления f_1 и f_2 из (3.3) получим выражения

$$\begin{aligned} f_1 &= \Omega^2 (u_{0k} \sin \lambda_k y + \widetilde{u}_{0k} \cos \lambda_k y), \\ f_2 &= (-\widetilde{g}_2 \lambda_k^2 + \Omega^2)(V_{0k} \sin \lambda_k y + \widetilde{V}_{0k} \cos \lambda_k y) + \widetilde{g}_2 \lambda_k^3 x (u_{0k} \cos \lambda_k y - \widetilde{u}_{0k} \sin \lambda_k y). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Функции (3.4) в рассматриваемом случае требуют составления уравнений метода Бубнова следующих видов:

$$\int_0^a \int_0^b f_2 \sin \lambda_k y \, dx \, dy = 0 \;\; \text{при} \;\; V_{0k} \neq 0, \qquad \int_0^a \int_0^b f_2 \cos \lambda_k y \, dx \, dy = 0 \;\; \text{при} \;\; \widetilde{V}_{0k} \neq 0, \tag{3.6}$$

$$\int_0^a \int_0^b (f_1 \sin \lambda_k y - \lambda_k f_2 x \cos \lambda_k y) dx \, dy = 0 \;\; \text{при} \;\; u_{0k} \neq 0, \tag{3.7}$$

$$\int_0^a \int_0^b (f_1 \cos \lambda_k y + \lambda_k f_2 x \sin \lambda_k y) dx \, dy = 0 \;\; \text{при} \;\; \widetilde{u}_{0k} \neq 0. \tag{3.8}$$

При использовании выражений для f_2 из (3.5) уравнения (3.6) приводят к зависимостям

$$\widetilde{u}_{0k} = \frac{2(-\widetilde{g}_2\lambda_k^2 + \Omega^2)}{\widetilde{g}_2\lambda_k^3 a} V_{0k}, \quad u_{0k} = -\frac{2(-\widetilde{g}_2\lambda_k^2 + \Omega^2)}{\widetilde{g}_2\lambda_k^3 a} \widetilde{V}_{0k}, \tag{3.9}$$

а уравнения (3.7), (3.8) при использовании (3.5) принимают вид

$$\left(\Omega^2 - \widetilde{g}_2\lambda_k^4 \frac{a^2}{3}\right) u_{0k} + (-\Omega^2 + \widetilde{g}_2\lambda_k^2)\frac{\lambda_k a}{2}\widetilde{V}_{0k} = 0, \tag{3.10}$$

$$\left(\Omega^2 - \widetilde{g}_2\lambda_k^4 \frac{a^2}{3}\right) \widetilde{u}_{0k} - (\Omega^2 - \widetilde{g}_2\lambda_k^2)\frac{\lambda_k a}{2} V_{0k} = 0. \tag{3.11}$$

При использовании зависимостей (3.9) уравнения (3.10), (3.11) приводят к одному и тому же характеристическому уравнению

$$\Omega^4 - \widetilde{g}_2\lambda_k^2\left(1 + \frac{\lambda_k^2 a^2}{12}\right)\Omega^2 + \frac{\widetilde{g}_2^2\lambda_k^6 a^2}{12} = 0,$$

корни которого равны

$$\Omega^2_{(1,2)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda_k^2 a^2}{12}\right)\widetilde{g}_2\lambda_k^2\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{48\lambda_k^2 a^2}{(12 + \lambda_k^2 a^2)^2}}\right).$$

Из (3.4) видно, что построенное решение эквивалентно использованию в направлении оси x для аппроксимации искомых функций задачи классической модели (гипотезы о прямой нормали Кирхгофа–Лява) в теории стержней, пластин и оболочек. Этим решением в плоскости $x0y$ описываются бессдвиговые изгибные формы колебаний пластины, частоты которых являются наименьшими в случае $a/b \ll 1$. При таких колебаниях напряженное состояние пластины в силу $\sigma_x = 0$ является одноосным.

Подведем итоги. Для решения линейной задачи о плоских формах свободных колебаний прямоугольной ортотропной пластины с незакрепленными краями, свободными от усилий, предложена методика построения функций перемещений, точно удовлетворяющих граничным условиям свободного края, которая основана на использовании двойных тригонометрических функций в качестве базисных. На их основе найдены точные аналитические решения сформулированной задачи, которыми описываются бессдвиговые плоские формы свободных колебаний пластины в классе указанных функций. Установлено, что вариации искомых функций необходимо считать не только произвольными, но и независимыми друг от друга. Поэтому построенные решения приводят к физически достоверным результатам по определению частот и форм свободных колебаний только при формулировке задачи в виде вариационных уравнений метода Бубнова, структура которых зависит от структуры построенных функций перемещений.

Показано, что из найденных решений можно выделить решения, которые соответствуют тригонометрическим функциям с нулевой гармоникой в одном из направлений. Ими описываются чисто плоские изгибные формы колебаний пластины, а соответствующие им результаты эквивалентны использованию при постановке изучаемой задачи классической модели Кирхгофа-Лява, известной в теории стержней, пластин и оболочек.

Научно-технический центр
проблем динамики и прочности
Казанского государственного
технического университета

Поступили
первый вариант 10.12.2004
окончательный вариант 13.10.2005