ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 7 (542)

УДК 512.628:517.9

Р.Г. АРИПОВ, ДЖ. ХАДЖИЕВ

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ГЛОБАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ КРИВОЙ В ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Введение

Пусть $M(n)$ — группа всех изометрий n-мерного евклидова пространства E_n и $SM(n)$ — группа всех евклидовых движений в E_n (т. е. подгруппа в $M(n)$, порожденная вращениями и параллельными переносами в E_n). Уравнения Френе–Серра для кривой в E_n дают функции кривизны $k_1(s), \dots, k_{n-1}(s)$ кривой ([1], с. 158–160; [2], с. 140–149). Кривизны $k_1(s), \dots, k_{n-2}(s)$ являются $M(n)$-инвариантными. Однако кривизна $k_{n-1}(s)$ является $SM(n)$-инвариантной, но не является $M(n)$-инвариантной. Например, кручение кривой в E_3 является $SM(3)$-инвариантной, но не является $M(3)$-инвариантной. Поэтому система кривизн $k_1(s), \dots, k_{n-1}(s)$ дает решение G-эквивалентности кривых только для группы $G = SM(n)$ ([1], с. 61–64). Кроме того, метод ортогонального репера дает только условия локальной G-эквивалентности кривых.

Классическая теория кривых в евклидовом пространстве изложена в ([1], с. 158–160; [2], с. 140–149; [3], с. 13–15; [4], с. 185–194; [5], с. 61–64). Дифференциальные инварианты, инвариантные параметризации и глобальные свойства кривых и путей в n-мерном евклидовом пространстве рассмотрены в работах [5]–[16] и книгах [2], [17].

Данная работа посвящена изучению глобальной G-эквивалентности кривых для групп $G = M(n)$ и $G = SM(n)$.

Случай кривых в эквиаффинной и центроаффинной геометриях рассматривается в работах Хаджиева Дж. и Пекшена О. [18], [19].

В данной работе все рассматриваемые пути и кривые являются бесконечно дифференцируемыми.

1. Евклидов тип и инвариантная параметризация кривой

Пусть R — поле действительных чисел и $I = (a, b)$ — открытый интервал в R. Реализуем евклидово пространство E_n как n-мерное векторное пространство R^n вместе со скалярным произведением $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Определение 1. C^∞-отображение $x : I \to R^n$ назовем I-путем (путем) в R^n.

Определение 2 (см. [18]). I_1-путь $x(t)$ и I_2-путь $y(r)$ в R^n назовем D-эквивалентными, если существует C^∞-диффеоморфизм $\varphi : I_2 \to I_1$ такой, что $\varphi'(r) > 0$ и $y(r) = x(\varphi(r))$ для всех $r \in I_2$. Класс D-эквивалентных путей в R^n назовем кривой в R^n (см. [17], с. 9). Путь $x \in \alpha$ назовем параметризацией кривой α.

Замечание 1. Существуют другие определения кривой (см. [20]; [1], с. 2; [17], с. 25; [21], с. 20–22).

Пусть $O(n,R)$ означает группу всех действительных ортогональных матриц $n \times n$-порядка. Тогда $M(n)=\{F : R^n \to R^n \mid Fx = gx + b,\, g \in O(n,R),\, b \in R^n\}$ и $SM(n) = \{F \in M(n) : \det g = 1\}$, где gx означает произведение матрицы g на вектор-столбец $x \in R^n$. Пусть $x(t)$ есть I-путь. Тогда $Fx(t)$ есть также I-путь в R^n для любого $F \in M(n)$. Далее везде G означает $M(n)$ или $SM(n)$.

Определение 3. I-пути $x(t)$ и $y(t)$ в R^n называются G-эквивалентными, если $y(t) = Fx(t)$ для некоторого $F \in G$. В этом случае будем писать $x \overset{G}{\sim} y$.

Пусть $\alpha = \{h_\tau,\, \tau \in Q\}$ — кривая в R^n, где h_τ — параметризация кривой α. Тогда $F\alpha = \{Fh_\tau,\, \tau \in Q\}$ есть кривая в R^n для любого $F \in M(n)$.

Определение 4 (см. [18]). Кривые α и β в R^n назовем G-эквивалентными (G-конгруэнтными), если $\beta = F\alpha$ для некоторого $F \in G$. В этом случае будем писать $\alpha \overset{G}{\sim} \beta$.

Замечание 2. Определение конгруэнтности кривых для группы всех изометрий, существенно отличное от определения 4, дано в ([1], с. 21). В силу определения из [1] кривые с различными длинами могут быть конгруэнтными.

Пусть $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ — I-путь в R^n и $x'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$ — производная пути $x(t)$. Для $p, q \in I = (a,b)$, $p < q$, положим

$$l_x(p,q) = \int_p^q \langle x'(t), x'(t)\rangle^{\frac{1}{2}} dt,$$

где $\langle x'(t), x'(t)\rangle$ — скалярный квадрат вектора $x'(t)$. Очевидно, конечные и бесконечные пределы $l_x(a,q) = \lim\limits_{p \to a} l_x(p,q) \le +\infty$ и $l_x(p,b) = \lim\limits_{q \to b} l_x(p,q) \le +\infty$ существуют. Имеются следующие четыре возможности:

$$\begin{array}{llll} \text{(i)} & l_x(a,q) < +\infty, \ \ l_x(p,b) < +\infty; & \text{(ii)} & l_x(a,q) < +\infty, \ \ l_x(p,b) = +\infty; \\ \text{(iii)} & l_x(a,q) = +\infty, \ \ l_x(p,b) < +\infty; & \text{(iv)} & l_x(a,q) = +\infty, \ \ l_x(p,b) = +\infty. \end{array}$$

Предположим, что один из этих случаев имеет место для некоторых $p, q \in I$. Тогда этот случай имеет место также и для любых $p, q \in I$. В случае (i) число $l = l_x(a,q) + l_x(p,b) - l_x(p,q)$ не зависит от $p, q \in I$, и будем говорить, что путь x имеет евклидовый тип $(0,l)$. В случаях (ii), (iii) и (iv) говорим, что путь x имеет евклидов тип $(0,+\infty)$, $(-\infty,0)$ и $(-\infty,+\infty)$ соответственно. Евклидов тип пути x обозначим через $L(x)$. Легко видеть, что существуют пути всех типов $(0,l)$, где $0 < l < +\infty$, $(0,+\infty)$, $(-\infty,0)$ и $(-\infty,+\infty)$.

Предложение 1. (i). *Пусть пути $x(t)$ и $y(t)$ в R^n являются $M(n)$-эквивалентными. Тогда $L(x) = L(y)$.*

(ii). *Пусть α — кривая в R^n и $x, y \in \alpha$. Тогда $L(x) = L(y)$.*

Доказательство очевидно.

Евклидов тип пути x, где $x \in \alpha$, назовем евклидовым типом кривой α. В силу предложения 1 из $\alpha \overset{M(n)}{\sim} \beta$ следует $L(\alpha) = L(\beta)$. Следовательно, $L(\alpha)$ является $M(n)$-инвариантом кривой α.

Определение 5. I-путь $x(t)$ назовем регулярным, если $x'(t) \neq 0$ для всех $t \in I$.

Если x является регулярным путем, а путь y является D-эквивалентным пути x, то y также является регулярным. Кривую α назовем регулярной, если она содержит регулярный путь.

Теперь определим инвариантный параметр регулярного пути в R^n. Пусть $I = (a,b)$ и $x(t)$ — регулярный I-путь в R^n. Определим евклидову длину дуги $s_x(t)$ для пути $x(t)$ в зависимости от его евклидова типа следующим образом. Для случая $L(x) = (0,l)$, где $0 < l \le +\infty$, положим $s_x(t) = l_x(a,t)$. Для случая $L(x) = (-\infty, 0)$ положим $s_x(t) = -l_x(t,b)$. Пусть $L(x) = (-\infty,+\infty)$. В каждом интервале $I = (a,b)$ прямой R выберем фиксированную точку и обозначим ее a_I. Для случая $I = (-\infty,+\infty)$ выберем $a_I = 0$. Положим $s_x(t) = l_x(a_I,t)$. Так как $s_x'(t) > 0$ для всех $t \in I$, то для $s_x(t)$ существует обратная функция. Обозначим ее $t_x(s)$. Область определения функции $t_x(s)$ есть $L(x)$ и $t'_x(s) > 0$ для всех $s \in L(x)$.

Предложение 2. *Пусть $I = (a, b)$ и x — регулярный I-путь в R^n. Тогда*

(i) $s_{Fx}(t) = s_x(t)$ *и* $t_{Fx}(s) = t_x(s)$ *для всех* $F \in M(n)$;

(ii) *для любого C^∞-диффеоморфизма $\varphi : J = (c, d) \to I$, удовлетворяющего условию $\varphi'(r) > 0$ для всех $r \in J$, имеют место равенства $s_{x(\varphi)}(r) = s_x(\varphi(r)) + s_0$ и $\varphi(t_{x(\varphi)}(s + s_0)) = t_x(s)$, где $s_0 = 0$ в случае $L(x) \neq (-\infty, +\infty)$ и $s_0 = l_x(\varphi(a_J), a_I)$ в случае $L(x) = (-\infty, +\infty)$.*

Доказательство утверждения (i) очевидно.

Докажем утверждение (ii). Пусть $L(x) = (-\infty, +\infty)$. Тогда имеем

$$s_{x(\varphi)}(r) = \int_{a_J}^{r} \Big\langle \frac{d}{dr}x(\varphi(r)), \frac{d}{dr}x(\varphi(r)) \Big\rangle^{\frac{1}{2}} dr = \int_{a_J}^{r} \frac{d\varphi}{dr} \Big\langle \frac{d}{d\varphi}x(\varphi(r)), \frac{d}{d\varphi}x(\varphi(r)) \Big\rangle^{\frac{1}{2}} dr =$$
$$= l_x(\varphi(a_J), \varphi(r)) = l_x(a_I, \varphi(r)) + l_x(\varphi(a_J), a_I).$$

Таким образом, $s_{x(\varphi)}(r) = s_x(\varphi(r)) + s_0$, где $s_0 = l_x(\varphi(a_J), a_I)$. Отсюда легко получаем $\varphi(t_{x(\varphi)}(s + s_0)) = t_x(s)$. Для случая $L(x) \neq (-\infty, +\infty)$ легко видеть, что $s_0 = 0$. $\square$

Пусть α — регулярная кривая и $x \in \alpha$. Тогда путь $x(t_x(s))$ является параметризацией кривой α.

Определение 6 (см. [17], [18]). Параметризацию вида $x(t_x(s))$ регулярной кривой α назовем инвариантной параметризацией кривой α.

Обозначим множество всех инвариантных параметризаций кривой α через $\mathrm{Ip}(\alpha)$. Каждое $y \in \mathrm{Ip}(\alpha)$ есть J-путь, где $J = L(\alpha)$.

Предложение 3. *Пусть α — регулярная кривая, $x \in \alpha$ и x — J-путь, где $J = L(\alpha)$. Следующие утверждения эквивалентны*:

(i) *x является инвариантной параметризацией кривой α*;

(ii) $\langle x'(s), x'(s) \rangle = 1$ *для всех* $s \in L(\alpha)$;

(iii) $s_x(s) = s$ *для всех* $s \in L(\alpha)$.

Доказательство. (i) → (ii). Пусть $x \in \mathrm{Ip}(\alpha)$. Тогда существует путь $y \in \alpha$ такой, что $x(s) = y(t_y(s))$. В силу предложения 2 $s_x(s) = s_{y(t_y)}(s) = s_y(t_y(s)) + s_0 = s + s_0$, где s_0 имеет значение, указанное в предложении 2. Так как s_0 не зависит от s, то $\frac{ds_x(s)}{ds} = \langle x'(s), x'(s) \rangle^{\frac{1}{2}} = 1$. Отсюда имеем $\langle x'(s), x'(s) \rangle = 1$ для всех $s \in L(\alpha)$.

(ii) → (iii). Пусть $\langle x'(s), x'(s) \rangle = 1$ для всех $s \in L(\alpha)$. Из определения $s_x(t)$ имеем $\frac{ds_x(s)}{ds} = \langle x'(s), x'(s) \rangle^{\frac{1}{2}} = 1$. Поэтому $s_x(s) = s + c$ для некоторого $c \in R$. В случае $L(x) \neq (-\infty, +\infty)$ из условий $s_x(s) = s + c$ и $s_x(s) \in L(\alpha)$ для всех $s \in L(\alpha)$ получаем $c = 0$. Следовательно, $s_x(s) = s$. В случае $L(\alpha) = (-\infty, +\infty)$ из $J = (-\infty, +\infty)$ и равенств $s_x(s) = l_x(a_J, s) = l_x(0, s) = s + c$ имеем $0 = l_x(0, 0) = c$. Следовательно, $s_x(s) = s$.

(iii) → (i). Из равенства $s_x(s) = s$ следует $t_x(s) = s$. Поэтому $x(s) = x(t_x(s)) \in \mathrm{Ip}(\alpha)$. $\square$

Предложение 4. *Пусть α — регулярная кривая и $L(\alpha) \neq (-\infty, +\infty)$. Тогда существует единственная инвариантная параметризация кривой α.*

Доказательство. Пусть $x, y \in \alpha$, x является J_1-путем и y — J_2-путем. Тогда существует C^∞-диффеоморфизм $\varphi : J_2 \to J_1$ такой, что $\varphi'(r) > 0$ и $y(r) = x(\varphi(r))$ для всех $r \in J_2$. Из предложения 2 и условия $L(\alpha) \neq (-\infty, +\infty)$ получаем $y(t_y(s)) = x(\varphi(t_y(s))) = x(\varphi(t_{x(\varphi)}(s))) = x(t_x(s))$. $\square$

Предложение 5. *Пусть α — регулярная кривая, $L(\alpha) = (-\infty, +\infty)$ и $x \in \mathrm{Ip}(\alpha)$. Тогда $\mathrm{Ip}(\alpha) = \{y : y(s) = x(s + c),\ c \in (-\infty, +\infty)\}$.*

Доказательство. Пусть $x, y \in \mathrm{Ip}(\alpha)$. Тогда существуют параметризации $h, k \in \alpha$ такие, что $x(s) = h(t_h(s))$, $y(s) = k(t_k(s))$, где h — J_1-путь и k — J_2-путь. Так как $h, k \in \alpha$, то существует $\varphi : J_2 \to J_1$ такой, что $\varphi'(r) > 0$ и $k(r) = h(\varphi(r))$ для всех $r \in J_2$. В силу предложения 2 имеем $y(s) = k(t_k(s)) = h(\varphi(t_k(s))) = h(\varphi(t_{h(\varphi)}(s))) = h(t_h(s - s_0)) = x(s - s_0)$.

Пусть $x \in \mathrm{Ip}(\alpha)$ и $c \in (-\infty, +\infty)$. Докажем, что $x(\psi) \in \mathrm{Ip}(\alpha)$, где $\psi(s) = s + c$. В силу предложения 3 $\langle x'(s), x'(s)\rangle = 1$ и $s_x(s) = s$. Положим $z(s) = x(\psi(s))$. Так как ψ — C^∞-диффеоморфизм из $(-\infty, +\infty)$ на $(-\infty, +\infty)$, то $z = x(\psi) \in \alpha$. Используя предложение 2 и $s_x(s) = s$, получаем $s_z(s) = s_{x(\psi)}(s) = s_x(\psi(s)) + s_1 = (s + c) + s_1$, где

$$s_1 = \int_{\psi(0)}^{0} \langle x'(s), x'(s)\rangle^{\frac{1}{2}} ds.$$

Отсюда ввиду $\langle x'(s), x'(s)\rangle = 1$ получаем $s_1 = -\psi(0) = -c$ и $s_z(s) = (s + c) - c = s$. Тогда в силу предложения 3 имеем $z \in \mathrm{Ip}(\alpha)$. $\square$

Так как тип кривой является ее $M(n)$-инвариантом, то кривые с различными типами не могут быть $M(n)$-эквивалентными. Поэтому при изучении $M(n)$-эквивалентности кривых α и β будем предполагать, что $L(\alpha) = L(\beta)$.

Теорема 1. *Пусть $G = M(n)$ или $G = SM(n)$ и α, β — регулярные кривые и $x \in \mathrm{Ip}(\alpha)$, $y \in \mathrm{Ip}(\beta)$. Тогда*

(i) *в случае $L(\alpha) = L(\beta) \neq (-\infty, +\infty)$ $\alpha \overset{G}{\sim} \beta$ тогда и только тогда, когда $x \overset{G}{\sim} y$;*

(ii) *в случае $L(\alpha) = L(\beta) = (-\infty, +\infty)$ $\alpha \overset{G}{\sim} \beta$ тогда и только тогда, когда $x \overset{G}{\sim} y(\psi_c)$ для некоторого $c \in (-\infty, +\infty)$, где $\psi_c(s) = s + c$.*

Доказательство. Докажем теорему для случая $G = M(n)$.

(i). Пусть $\alpha \overset{M(n)}{\sim} \beta$ и $h \in \alpha$. Тогда существует $F \in M(n)$ такое, что $\beta = F\alpha$. Отсюда имеем $Fh \in \beta$. Используя предложения 2 и 4, имеем $x(s) = h(t_h(s))$, $y(s) = (Fh)(t_{Fh}(s))$ и $Fx(s) = F(h(t_h(s))) = (Fh)(t_h(s)) = (Fh)(t_{Fh}(s)) = y(s)$. Таким образом, $x \overset{M(n)}{\sim} y$. Обратно, пусть $x \overset{M(n)}{\sim} y$, т. е. существует $F \in M(n)$ такое, что $Fx = y$. Отсюда $\alpha \overset{M(n)}{\sim} \beta$.

(ii). Пусть $\alpha \overset{M(n)}{\sim} \beta$. Тогда существуют J-пути $h \in \alpha$, $k \in \beta$ и $F \in M(n)$ такие, что $k(t) = Fh(t)$. Имеем $k(t_k(s)) = k(t_{Fh}(s)) = k(t_h(s)) = (Fh)(t_h(s))$. В силу предложения 5 $x(s) = k(t_k(s + s_1))$, $y(s) = h(t_h(s + s_2))$ для некоторых $s_1, s_2 \in (-\infty, +\infty)$. Отсюда $x(s - s_1) = Fy(s - s_2)$ и $x(s) = Fy(s + s_1 - s_2)$. Следовательно, $x \overset{M(n)}{\sim} y(\psi_c)$, где $\psi_c(s) = s + c$ и $c = s_1 - s_2$. Обратно, пусть $x \overset{M(n)}{\sim} y(\psi_c)$ для некоторого $c \in (-\infty, +\infty)$, где $\psi_c = s + c$. Тогда существует $F \in M(n)$ такой, что $y(s + c) = Fx(s)$. В силу предложения 5 имеем $y(\psi_c) \in \beta$. Отсюда $\alpha \overset{M(n)}{\sim} \beta$. Доказательство теоремы для случая $G = SM(n)$ аналогично. $\square$

Теорема 1 сводит проблему G-эквивалентности кривых к проблеме G-эквивалентности путей в случае $L(\alpha) = L(\beta) \neq (-\infty, +\infty)$. Однако этого нельзя сказать для случая $L(\alpha) = L(\beta) = (-\infty, +\infty)$.

Определение 7. I-пути $x(t)$ и $y(t)$ в R^n назовем $(G, (-\infty, +\infty))$-эквивалентными, если существуют $F \in G$ и $c \in (-\infty, +\infty)$ такие, что $y(t) = Fx(t + c)$.

В случае $L(\alpha) = L(\beta) = (-\infty, +\infty)$ теорема 1 сводит проблему G-эквивалентности кривых к проблеме $(G, (-\infty, +\infty))$-эквивалентности путей.

2. Система образующих дифференциального поля G-инвариантных дифференциальных рациональных функций пути

Приведем некоторые обозначения и факты из дифференциальной алгебры (см. [22], [17]) в форме, удобной для использования в дальнейшем. Пусть R — поле действительных чисел. Рассмотрим кольцо $R[x_0, x_1, \dots, x_n, \dots,]$ многочленов от счетного числа неизвестных $x_0, x_1, ..., x_n, ...$, с действительными коэффициентами. Положим $x_0 = x$, $x_1 = x', \dots, x_{m+1} = (x_m)' = x^{m+1}$. Операцию $' : x_m \to x'_m$ назовем дифференцированием элемента x_m. Эту операцию, используя правило Лейбница, можно однозначно распространить на кольцо $R[x_0, x_1, \dots, x_n, \dots]$. В результате получим дифференциальную R-алгебру (d-алгебру), которую обозначим $R\{x\}$. Элементы этой d-алгебры называются дифференциальными многочленами от x с коэффициентами из R и записываются в виде $f\{x\}$. Элемент x называется дифференциальной переменной (неизвестной).

Аналогично определяются дифференциальные многочлены $f\{z_1, \dots, z_n\}$ и d-алгебры $R\{z_1, \dots, z_n\}$ от конечного числа дифференциальных переменных $z_1, \dots, z_n$.

Через $C^\infty(J)$ обозначим множество всех бесконечно дифференцируемых функций на интервале $J = (a, b)$. Пусть $f\{x\}$ является дифференциальным многочленом от дифференциальной переменной и $x(t) \in C^\infty(J)$. В выражении $f\{x\}$ заменим элемент x на $x(t)$ и элемент $x^{(n)}$ — на $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Полученные выражения обозначим через $f\{x(t)\}$. Выражение $f\{x(t)\}$ является многочленом от $x(t)$ и конечного числа производных от $x(t)$. Для $f_1, f_2 \in R\{x\}$ имеем $f_1 = f_2$ тогда и только тогда, когда $f_1\{x(t)\} = f_2\{x(t)\}$ для всех $x(t) \in C^\infty(J)$.

Множество всех выражений $f\{x(t)\}$, где $f \in R\{x\}$, обозначим $R\{x(t)\}$, оно является R-алгеброй относительно стандартных операций сложения и умножения функций, умножения функций на действительное число. $R\{x(t)\}$ превращается в дифференциальную R-алгебру, если в качестве операции дифференцирования возьмем $\frac{d}{dt}$. Легко видеть, что отображение $f\{x\} \to f\{x(t)\}$ является изоморфизмом дифференциальных R-алгебр $R\{x\}$ и $R\{x(t)\}$. Аналогичное имеет место и для дифференциальных многочленов $f\{z_1, \dots, z_n\}$ от нескольких переменных $z_1, \dots, z_n$. Заменим в $f\{z_1, \dots, z_n\}$ элемент z_i $(i = 1, \dots, n)$ элементом $z_i(t) \in C^\infty(J)$ и элемент $z_i^{(m)}$ — функцией $\frac{d^m z_i(t)}{dt^m}$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$. Полученное выражение обозначим $f\{z_1(t), \dots, z_n(t)\}$. Через $R\{z_1(t), \dots, z_n(t)\}$ обозначим множество всех $f\{z_1(t), \dots, z_n(t)\}$, где $f \in R\{z_1, \dots, z_n\}$. $R\{z_1(t), \dots, z_n(t)\}$ является дифференциальной R-алгеброй относительно стандартных операций над функциями и операции $\frac{d}{dt}$. Дифференциальные алгебры $R\{z_1, \dots, z_n\}$ и $R\{z_1(t), \dots, z_n(t)\}$ изоморфны, при этом операции дифференцирования в $R\{z_1, \dots, z_n\}$ соответствует операция $\frac{d}{dt}$ в $R\{z_1(t), \dots, z_n(t)\}$.

Переход от $f\{z_1, \dots, z_n\}$ к $f\{z_1(t), \dots, z_n(t)\}$ назовем параметрическим представлением дифференциального многочлена $f\{z_1, \dots, z_n\}$. Обратный переход назовем абстрактным представлением дифференциального многочлена $f\{z_1(t), \dots, z_n(t)\}$. Упорядоченную систему $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дифференциальных векторов для краткости обозначим через x. Положим $R\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = R\{x\}$. $R\{x\}$ является областью целостности. Ее поле отношений обозначим $R\langle x\rangle$. Дифференцирование в $R\{x\}$ однозначно продолжается до дифференцирования $R\langle x\rangle$, и $R\langle x\rangle$ является дифференциальным полем [22]. Элемент из $R\langle x\rangle$ называется дифференциальной рациональной функцией от x и обозначается через $h\langle x\rangle$.

Пусть G — подгруппа группы $M(n)$.

Определение 8. Дифференциальная рациональная функция $h\langle x\rangle$ называется G-инвариантной, если $h\langle gx\rangle = h\langle x\rangle$ для всех $g \in G$.

Множество всех G-инвариантных дифференциальных рациональных функций пути x образует дифференциальное подполе в $R\langle x\rangle$. Обозначим его через $R\langle x\rangle^G$.

Определение 9. Подмножество S в $R\langle x\rangle^G$ называется системой образующих дифференциального поля $R\langle x\rangle^G$, если наименьшее дифференциальное подполе в $R\langle x\rangle^G$, содержащее S, совпадает с $R\langle x\rangle^G$.

Определение 10. Система дифференциальных полиномов $p_1\{x\}, \dots, p_m\{x\}$ называется дифференциально-алгебраически независимой, если не существует ненулевого дифференциального полинома $f\{y_1, \dots, y_m\}$ такого, что

$$f\{p_1\{x\}, \dots, p_m\{x\}\} = 0 \ \text{ для всех } \ x.$$

Теорема 2. *Пусть $G = M(n)$. Тогда система*

$$\langle x^{(k)}(t), x^{(k)}(t) \rangle, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

является системой образующих в $R\langle x \rangle^G$ и дифференциально-алгебраически независима.

Доказательство см. в ([17], с. 109–112).

Через $(C^\infty(J))^n$ обозначим n-кратное прямое произведение пространства $C^\infty(J)$ на себя.

Следствие 1. Пусть $y_1, y_2, \dots, y_n$ — дифференциальные переменные и $f \in R\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Тогда дифференциальный многочлен $f\{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}$ однозначно определяется своими значениями на функциях $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ вида

$$y_i(t) = \langle x^{(i)}(t), x^{(i)}(t) \rangle, \tag{1}$$

где $x(t)$ пробегает пространство $(C^\infty(J))^n$.

Доказательство. Предположим, что существуют $f_1, f_2 \in R\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ такие, что $f_1 \neq f_2$ и

$$f_1\{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\} = f_2\{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\} \tag{2}$$

для всех функций $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ вида (1). Из (2) получаем равенство

$$f\{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\} = 0 \tag{3}$$

для всех функций $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ вида (1), где $f = f_1 - f_2$ является ненулевым дифференциальным многочленом ввиду $f_1 \neq f_2$. Равенство (3) означает, что дифференциальные многочлены $\langle x^{(1)}(t), x^{(1)}(t) \rangle, \dots, \langle x^{(n)}(t), x^{(n)}(t) \rangle$ являются дифференциально-алгебраически зависимыми. Но это противоречит теореме 2. $\square$

Через $[a_1 a_2 \dots a_n]$ обозначим определитель из векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ в R^n. Тогда $[x' x^{(2)} \dots x^{(n)}]$ есть определитель производных от x.

Теорема 3. *Пусть $G = SM(n)$. Тогда*

$$\langle x^{(k)}(t), x^{(k)}(t) \rangle, \quad [x'(t), \dots, x^{(n)}(t)], \quad k = 1, \dots, n-1,$$

является системой образующих в $R\langle x \rangle^G$ и дифференциально-алгебраически независима.

Доказательство см. в ([17], с. 111–112).

Замечание 3. Между элементами систем в теоремах 2 и 3 имеются соотношения в виде неравенств. Они будут найдены дальше.

Предложение 6. *Пусть $1 \leq i, j, i + j \leq 2n + 1$. Тогда для каждого дифференциального полинома $\langle x^{(i)}, x^{(j)} \rangle$ существует единственный дифференциальный полином $P_{ij}\{y_1, \dots, y_k\}$ такой, что*

$$\langle x^{(i)}, x^{(j)} \rangle = P_{ij}\{\langle x', x' \rangle, \dots, \langle x^{(k)}, x^{(k)} \rangle\},$$

где $k = \left[\frac{i+j}{2}\right]$.

Доказательство. Докажем существование P_{ij} индукцией по числу $q = i + j$. Ввиду $i\geq 1$, $j \geq 1$ имеем $i + j \geq 2$. В случае $i + j = 2$ существование очевидно. Предположим, что дифференциальный полином P_{ij} существует для всех i, j таких, что $i + j < q$. Пусть $i \leq j$ и $q = 2b$, где b целое. Тогда $\langle x^{(i)}, x^{(j)}\rangle = \langle x^{(b-h)}, x^{(b+h)}\rangle$ для некоторого $h \geq 0$. Используя равенство

$$\langle x^{(b-h)}, x^{(b+h)}\rangle = \langle x^{(b-h-1)}, x^{(b+h)}\rangle' - \langle x^{(b-h-1)}, x^{(b+h+1)}\rangle,$$

индукцию по $q = i + j$ и индукцию по h, получаем, что $\langle x^{(i)}, x^{(j)}\rangle$ является дифференциальным полиномом от $\langle x', x'\rangle, \ldots, \langle x^{(k)}, x^{(k)}\rangle$, где $k \leq b$.

Пусть $q = 2b + 1$. Тогда $\langle x^{(b)}, x^{(b)}\rangle' = 2\langle x^{(b)}, x^{(b+1)}\rangle$. Используя равенство

$$\langle x^{(b-h)}, x^{(b+h+1)}\rangle = \langle x^{(b-h-1)}, x^{(b+h+1)}\rangle' - \langle x^{(b-h-1)}, x^{(b+h+2)}\rangle,$$

индукцию по $q = i + j$ и индукцию по h, получаем, что $\langle x^{(i)}, x^{(j)}\rangle$ является дифференциальным полиномом от $\langle x', x'\rangle, \ldots, \langle x^{(k)}, x^{(k)}\rangle$, где $k \leq b$. Единственность дифференциального полинома P_{ij} следует из теоремы 2. $\square$

Приведем примеры дифференциальных полиномов P_{ij}. Так как $P_{ij} = P_{ji}$ для всех i, j, удовлетворяющих условиям $1 \leq i, j, i + j \leq 2n + 1$, то достаточно рассматривать случай $i \leq j$. Простые вычисления показывают, что $P_{11}\{y_1\} = y_1$, $P_{12}\{y_1\} = 0{,}5y_1^{(1)}$, $P_{22}\{y_1, y_2\} = y_2$, $P_{23}\{y_1, y_2\} = 0{,}5y_2^{(1)}$, $P_{13}\{y_1, y_2\} = 0{,}5y_1^{(2)} - y_2$.

Следствие 2. Пусть знак $'$ означает дифференцирование в дифференциальной алгебре $R\{y_1, \ldots, y_n\}$. Тогда

$$(P_{ij}\{y_1, \ldots, y_n\})' = P_{i+1j}\{y_1, \ldots, y_n\} + P_{ij+1}\{y_1, \ldots, y_n\} \tag{4}$$

для всех i, j, удовлетворяющих условиям $1 \leq i, j, i + j \leq 2n$.

Доказательство. Из определения дифференциальных многочленов $P_{ij}\{y_1, \ldots, y_n\}$ имеем равенство

$$\langle x^{(i)}(t), x^{(j)}(t)\rangle = P_{ij}\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\},$$

где $y_k(t) = \langle x^{(k)}(t), x^{(k)}(t)\rangle$, $k = 1, \ldots, n$, $1 \leq i, j, i + j \leq 2n + 1$. Дифференцируя это равенство, получаем

$$\frac{d}{dt}\langle x^{(i)}(t), x^{(j)}(t)\rangle = \frac{d}{dt}P_{ij}\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}.$$

Предположим, что $1 \leq i, j, i + j \leq 2n$. Так как

$$\frac{d}{dt}\langle x^{(i)}(t), x^{(j)}(t)\rangle = \langle x^{(i+1)}(t), x^{(j)}(t)\rangle + \langle x^{(i)}(t), x^{(j+1)}(t)\rangle,$$

имеем

$$\frac{d}{dt}P_{ij}\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\} = P_{i+1j}\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\} + P_{ij+1}\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}. \tag{5}$$

Это равенство имеет место для всех $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ вида (1). Используя следствие 1, получаем, что равенство (5) имеет место для всех $y_1(t), \ldots, y_n(t) \in C^\infty(J)$. Переходя от параметрического представления дифференциальных многочленов в равенстве (5) к их абстрактным дифференциальным полиномам, получаем равенство (4). $\square$

Следствие 3. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — I-пути в R^n такие, что

$$\langle x^{(i)}(t), x^{(i)}(t)\rangle = \langle y^{(i)}(t), y^{(i)}(t)\rangle \tag{6}$$

для всех $t \in I$ и $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\langle x^{(l)}(t), x^{(m)}(t)\rangle = \langle y^{(l)}(t), y^{(m)}(t)\rangle$$

для всех $l, m = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющих условию $l + m \leq 2n + 1$.

Доказательство. Пусть l, m такие, что $l+m \leq 2n+1$. Тогда в силу предложения 6 и условия (6) имеем

$$\langle x^{(l)}, x^{(m)}\rangle = P_{lm}\{\langle x', x'\rangle, \ldots, \langle x^{(k)}, x^{(k)}\rangle\} = P_{lm}\{\langle y', y'\rangle, \ldots, \langle y^{(k)}, y^{(k)}\rangle\} = \langle y^{(l)}, y^{(m)}\rangle. \quad \square$$

3. Условия G-эквивалентности путей и кривых

Определение 11. I-путь $x(t)$ в R^n назовем невырожденным, если $[x'(t)\ldots x^{(n)}(t)] \neq 0$ для всех $t \in I$. Кривую α назовем невырожденной, если она содержит невырожденный путь.

Лемма 1 ([17], с. 72). *Для любых векторов $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n$ в R^n верно равенство*

$$[y_1 \ldots y_n][z_1 \ldots z_n] = \det \|\langle y_i, z_j\rangle\|.$$

Теорема 4. *Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — невырожденные I-пути в R^n и выполнены равенства* (6) *для всех $t \in I$ и $i = 1, \ldots, n$. Тогда $x \overset{M(n)}{\sim} y$.*

Доказательство. Применяя лемму 1 к векторам $y_i = x^{(i)}(t)$, $z_j = x^{(j)}(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$, получаем

$$[x'(t)\ldots x^{(n)}(t)]^2 = \det \|\langle x^{(i)}(t), x^{(j)}(t)\rangle\|. \tag{7}$$

Снова применяя лемму 1 к векторам $x', \ldots, x^{(i-1)}, x^{(n+1)}, x^{(i+1)}, \ldots, x^{(n)}, x', \ldots, x^{(n)}$, получаем

$$[x' \ldots x^{(i-1)} x^{(n+1)} x^{(i+1)} \ldots x^{(n)}][x' \ldots x^{(n)}] = \det \|\langle x^{(k)}, x^{(l)}\rangle\|, \tag{8}$$

где $k = 1, \ldots, i-1, n+1, i+1, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots, n$. Из (6)–(8) и равенства

$$\frac{[x' \ldots x^{(i-1)} x^{(n+1)} x^{(i+1)} \ldots x^{(n)}]}{[x' \ldots x^{(n)}]} = \frac{[x' \ldots x^{(i-1)} x^{(n+1)} x^{(i+1)} \ldots x^{(n)}][x' \ldots x^{(n)}]}{[x' \ldots x^{(n)}]^2}$$

получаем

$$\frac{[x' \ldots x^{(i-1)} x^{(n+1)} x^{(i+1)} \ldots x^{(n)}]}{[x' \ldots x^{(n)}]} = \frac{[y' \ldots y^{(i-1)} y^{(n+1)} y^{(i+1)} \ldots y^{(n)}]}{[y' \ldots y^{(n)}]} \tag{9}$$

для всех $i = 1, \ldots, n$. Пусть $A_x(t) = \|x' \ldots x^{(n)}\|$. В силу невырожденности пути $x(t)$ $\det A_x(t) = [x' \ldots x^{(n)}] \neq 0$. Поэтому существует обратная матрица $A_x^{-1}(t)$ для всех $t \in I$.

Рассмотрим произведение $A_x^{-1}(t)A_x'(t) = \|c_{ij}^x(t)\|$, где A_x' — производная матрицы $A_x(t)$. Легко видеть, что

(i) $c_{j+1j}^x(t) = 1$ для всех $t \in I$ и $1 \leq j \leq n-1$;

(ii) $c_{ij}^x(t) = 0$ для всех $t \in I$ и $j \neq n$, $i \neq j+1$, $1 \leq i \leq n$;

(iii) $c_{in}^x(t) = \frac{[x'(t)\ldots x^{(i-1)}(t) x^{(n+1)}(t) x^{(i+1)}(t) \ldots x^{(n)}(t)]}{[x'(t)\ldots x^{(n)}(t)]}$ для всех $t \in I$ и $1 \leq i \leq n$.

Из равенства (9) получаем $c_{ij}^x(t) = c_{ij}^y(t)$ для всех $t \in I$ и $i, j = 1, \ldots, n$. Поэтому $A_x^{-1}(t)A_x'(t) = A_y^{-1}(t)A_y'(t)$. Тогда имеем $(A_y A_x^{-1})' = A_y' A_x^{-1} + A_y (A_x^{-1})' = A_y' A_x^{-1} + A_y(-A_x^{-1} A_x' A_x^{-1}) = A_y(A_y^{-1}A_y' - A_x^{-1}A_x')A_x^{-1} = 0$.

Таким образом, $A_y(t)A_x^{-1}(t)$ не зависит от t. Положим $g = A_y(t)A_x^{-1}(t)$. Из невырожденности путей $x(t)$ и $y(t)$ имеем $\det A_x(t) \neq 0$ и $\det A_y(t) \neq 0$ для всех $t \in I$. Отсюда получаем $\det g \neq 0$ и $A_y(t) = gA_x(t)$. Из этого матричного равенства, в частности, получаем $y'(t) = gx'(t)$.

Докажем, что $g \in O(n)$. Пусть здесь и далее знак $\star$ означает операцию транспонирования. Имеем $A_x^\star(t)A_x(t) = \|\langle x^{(i)}(t), x^{(j)}(t)\rangle\| = \|\langle y^{(i)}(t), y^{(j)}(t)\rangle\| = A_y^\star(t)A_y(t)$. Из этого равенства и равенства $A_y(t) = gA_x(t)$ получаем $g^\star g = e$, где e — единичная матрица. Таким образом, $g \in O(n)$. Из $y'(t) = gx'(t)$ имеем $y(t) = gx(t) + b$ для некоторого $b \in R^n$. $\square$

Следствие 4. Пусть α, β — невырожденные кривые в R^n и $x \in \mathrm{Ip}(\alpha), y \in \mathrm{Ip}(\beta)$. Тогда

(i) в случае $L(\alpha) = L(\beta) \neq (-\infty, +\infty)$, $\alpha \overset{M(n)}{\sim} \beta$ тогда и только тогда, когда

$$\langle x^{(i)}(s), x^{(i)}(s)\rangle = \langle y^{(i)}(s), y^{(i)}(s)\rangle \tag{10}$$

для всех $s \in L(\alpha)$ и $i = 2, \dots, n$;

(ii) в случае $L(\alpha) = L(\beta) = (-\infty, +\infty)$, $\alpha \overset{M(n)}{\sim} \beta$ тогда и только тогда, когда

$$\langle x^{(i)}(s), x^{(i)}(s)\rangle = \langle y^{(i)}(s + s_1), y^{(i)}(s + s_1)\rangle$$

для некоторого $s_1 \in (-\infty, +\infty)$, всех $s \in L(\alpha)$ и $i = 2, \dots, n$.

Доказательство. (i). Пусть $\alpha \overset{M(n)}{\sim} \beta$. Тогда в силу теоремы 1 $x \overset{M(n)}{\sim} y$ и выполнение равенств (10) очевидно. Обратно, пусть равенства (10) выполнены. Из предложения 3 имеем $\langle x'(s), x'(s)\rangle = \langle y'(s), y'(s)\rangle = 1$ для $s \in L(\alpha)$. Отсюда получаем, что равенства (10) выполнены для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда в силу теоремы 4 $x \overset{M(n)}{\sim} y$. Используя теорему 1, имеем $\alpha \overset{M(n)}{\sim} \beta$. Доказательство утверждения (ii) получается аналогичным образом из утверждения (ii) теоремы 1. $\square$

Замечание 4. В силу утверждения (i) следствия 4 функции $\langle x^{(2)}(s), x^{(2)}(s)\rangle, ..., \langle x^{(n)}(s), x^{(n)}(s)\rangle$ являются $M(n)$-инвариантами кривой α в случае $L(\alpha) \neq (-\infty, +\infty)$. Однако они таковыми не являются в случае $L(\alpha) = (-\infty, +\infty)$ и зависят от параметризации кривой.

Теорема 5. *Пусть α, β — невырожденные кривые в R^n и $x \in \mathrm{Ip}(\alpha)$, $y \in \mathrm{Ip}(\beta)$. Тогда*

(i) *в случае $L(\alpha) = L(\beta) \neq (-\infty, +\infty)$ $\alpha \overset{SM(n)}{\sim} \beta$ тогда и только тогда, когда*

$$[x'(s) \dots x^{(n)}(s)] = [y'(s) \dots y^{(n)}(s)], \tag{11}$$

$$\langle x^{(i)}(s), x^{(i)}(s)\rangle = \langle y^{(i)}(s), y^{(i)}(s)\rangle \tag{12}$$

для всех $s \in L(\alpha)$ и $i = 2, \dots, n-1$;

(ii) *в случае $L(\alpha) = L(\beta) = (-\infty, +\infty)$ $\alpha \overset{SM(n)}{\sim} \beta$ тогда и только тогда, когда существует $s_1 \in (-\infty, +\infty)$ такое, что*

$$[x'(s) \dots x^{(n)}(s)] = [y'(s + s_1) \dots y^{(n)}(s + s_1)],$$
$$\langle x^{(i)}(s), x^{(i)}(s)\rangle = \langle y^{(i)}(s + s_1), y^{(i)}(s + s_1)\rangle$$

для всех $s \in L(\alpha)$ и $i = 2, \dots, n-1$.

Доказательство. (i). Пусть $\alpha \overset{SM(n)}{\sim} \beta$. Тогда легко видеть, что равенства (11) и (12) выполнены. Обратно, предположим, что равенства (11) и (12) имеют место. Из леммы 1 имеем

$$[x'(s) \dots x^{(n)}(s)]^2 = \det \|\langle x^{(i)}(s), x^{(j)}(s)\rangle\|_{i,j=1,\dots,n}.$$

Обозначим алгебраическое дополнение элемента $\langle x^{(i)}, x^{(j)}\rangle$ в матрице $\|\langle x^{(i)}, x^{(j)}\rangle\|_{i,j=1,\dots,n}$ через $A_{ij}(x)$. Тогда имеем

$$[x' \dots x^{(n)}]^2 = \langle x^{(n)}, x'\rangle A_{n1}(x) + \dots + \langle x^{(n)}, x^{(n)}\rangle A_{nn}(x). \tag{13}$$

Так как α — невырожденная кривая, то векторы $x'(s), \dots, x^{(n)}(s)$ линейно независимы для любого $s \in L(\alpha)$. В частности, векторы $x'(s), \dots, x^{(n-1)}(s)$ линейно независимы для любого $s \in L(\alpha)$. Отсюда имеем

$$A_{nn}(x) = \det \|\langle x^{(i)}(s), x^{(j)}(s)\rangle\|_{i,j=1,\dots,n-1} \neq 0$$

для всех $s \in L(\alpha)$. Из равенства (13) получаем

$$\langle x^{(n)}, x^{(n)}\rangle = \frac{[x' \dots, x^{(n)}]^2 - \langle x^{(n)}, x'\rangle A_{n1}(x) - \dots - \langle x^{(n)}, x^{(n-1)}\rangle A_{nn-1}(x)}{A_{nn}(x)}. \tag{14}$$

Аналогично, получаем для пути y

$$\langle y^{(n)}, y^{(n)}\rangle = \frac{[y'\dots y^{(n)}]^2 - \langle y^{(n)}, y'\rangle A_{n1}(y) - \dots - \langle y^{(n)}, y^{(n-1)}\rangle A_{nn-1}(y)}{A_{nn}(y)}, \tag{15}$$

$A_{nj}(x)$ является полиномом от $\langle x^{(i)}(s), x^{(j)}(s)\rangle$, где $i+j<2n$. Используя предложение 6, получаем, что $A_{nj}(x)$ является дифференциальным полиномом от $\langle x'(s), x'(s)\rangle, ..., \langle x^{(n-1)}(s), x^{(n-1)}(s)\rangle$. Аналогично, $A_{nj}(y)$ является дифференциальным полиномом от

$$\langle y'(s), y'(s)\rangle, \dots, \langle y^{(n-1)}(s), y^{(n-1)}(s)\rangle.$$

В силу предложения 3 $\langle x'(s), x'(s)\rangle = \langle y'(s), y'(s)\rangle = 1$ для всех $s \in L(\alpha)$. Отсюда и из равенств (12) получаем $A_{nj}(x) = A_{nj}(y)$ для всех $j = 1, \dots, n$. Используя это равенство и равенства (12)–(15), получаем $\langle x^{(n)}(s), x^{(n)}(s)\rangle = \langle y^{(n)}(s), y^{(n)}(s)\rangle$. Из последнего и (12) в силу теоремы 4 следует существование $F \in M(n)$ такого, что $y(s) = Fx(s) = gx(s) + b$. Из $[x'(s)\dots x^{(n)}(s)] = [y'(s)\dots y^{(n)}(s)]$ следует

$$[x'(s)\dots x^{(n)}(s)] = [(Fx(s))'\dots (Fx(s))^{(n)}] = [gx'(s)\dots gx^{(n)}(s)] = \det g[x'(s)\dots, x^{(n)}(s)].$$

Ввиду $[x'(s)\dots x^{(n)}(s)] \neq 0$ для всех $s \in L(\alpha)$ получаем $\det g = 1$, т.е. $F \in SM(n)$. Это доказывает утверждение (i) теоремы. Утверждение (ii) теоремы аналогично следует из утверждения (ii) теоремы 1. $\square$

Пусть α — кривая и $x \in \mathrm{Ip}(\alpha)$.

Замечание 5. Система $\langle x^{(2)}(s), x^{(2)}(s)\rangle, \dots, \langle x^{(n-1)}(s), x^{(n-1)}(s)\rangle, [x'(s)\dots, x^{(n)}(s)]$ и система кривизн $k_1(s), \dots, k_{n-1}(s)$ (см. [2], с. 140–149) выражаются друг через друга. В силу теоремы 5 эти системы действительно являются $SM(n)$-инвариантами кривой α в случае $L(\alpha) \neq (-\infty, +\infty)$. Однако это не так в случае $L(\alpha) = (-\infty, +\infty)$.

Замечание 6. Известна теорема Ю.Ф. Борисова (см. [23], с. 17) о том, что кривизна k_{n-1} является инвариантом относительно замены параметра длины дуги в евклидовом пространстве E_n только при n, сравнимым с 0 или 3 $\pmod 4$.

В силу теоремы 1 проблема G-эквивалентности ($G = SM(n)$) кривых типов $L(\alpha) \neq (-\infty, +\infty)$ сведена к проблеме G-эквивалентности путей. В связи с этим в теоремах G-эквивалентности кривых типа теоремы 5 важна только G-инвариантность функций k_i, инвариантность или неинвариантность их относительно замены параметра не существенна. G-инвариантность функций k_i следует из их явного вида (см. [2], с. 147–149).

Определение 12. Систему $\langle x', x'\rangle, \dots, \langle x^{(n)}, x^{(n)}\rangle$ назовем полной системой $M(n)$-инвариантов пути; систему $L(\alpha)$, $\langle x^{(2)}, x^{(2)}\rangle, \dots, \langle x^{(n)}, x^{(n)}\rangle$, где $x \in \mathrm{Ip}(\alpha)$, — полной системой $M(n)$-инвариантов кривой; систему $\langle x', x'\rangle, \dots, \langle x^{(n-1)}, x^{(n-1)}\rangle$, $[x'\dots, x^{(n)}]$ — полной системой $SM(n)$-инвариантов пути; систему $L(\alpha)$, $\langle x^{(2)}, x^{(2)}\rangle, \dots, \langle x^{(n-1)}, x^{(n-1)}\rangle$, $[x'\dots, x^{(n)}]$, где $x \in \mathrm{Ip}(\alpha)$, — полной системой $SM(n)$-инвариантов кривой.

4. Соотношения между элементами полной системы инвариантов пути и кривой

Для невырожденного пути $x(t)$ матрица $A_x^{\star}(t)A_x(t)$ является положительно-определенной. Это дает некоторую систему соотношений (неравенств) между $\langle x'(t), x'(t)\rangle, \dots, \langle x^{(n)}(t), x^{(n)}(t)\rangle$ и их производными. Дальше докажем, что произвольное соотношение между $\langle x'(t), x'(t)\rangle, \dots,$ $\langle x^{(n)}(t), x^{(n)}(t)\rangle$ и их производными является следствием этих соотношений. Пусть $f_1(t), \dots, f_n(t)$ — произвольные бесконечно дифференцируемые функции на $I = (a, b)$. Для удобства индексы этих функций запишем в виде $f_i(t) = f_{ii}(t)$. Пусть $P_{ij}\{z_1, \dots, z_k\}$ — дифференциальный полином из предложения 6. С помощью функций $f_{ii}(t)$, $i = 1, \dots, n$, определим функции

$$f_{ij}(t) = P_{ij}\{f_{11}(t), \dots, f_{kk}(t)\}, \quad 1 \le i, j \le n, \quad k = [\tfrac{i+j}{2}]. \tag{16}$$

Предложение 7. *Для любых $1 \le i, j \le n-1$ имеет место равенство*

$$f'_{ij}(t) = f_{i+1j}(t) + f_{ij+1}(t).$$

Доказательство. Полагая в следствии 2 $y_1 = f_{11}(t), \dots, y_n = f_{nn}(t)$ получаем нужное равенство. □

Теорема 6. *Пусть $f_{11}(t), \dots, f_{nn}(t)$ — бесконечно дифференцируемые функции на I такие, что*

(i) $\det \|f_{ij}(t)\| \ne 0$ *для всех $t \in I$, где $f_{ij}(t)$ определены формулой* (16);
(ii) *матрица $\|f_{ij}(t)\|$ положительно определена для некоторого $t_0 \in I$.*

Тогда существует невырожденный путь $x(t)$ в R^n такой, что $\langle x^{(i)}(t), x^{(i)}(t)\rangle = f_{ii}(t)$ для всех $t \in I$ и $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Определим $n \times n$-матричную функцию $Q(t) = \|f_{ij}(t)\|$, где $\|f_{ij}(t)\|$ определены формулой (16). Из свойства $P_{ij} = P_{ji}$ дифференциальных полиномов P_{ij} получаем $Q^\star(t) = Q(t)$.

Лемма 2. *Существует единственное решение $B(t) = \|b_{ij}(t)\|$ матричного уравнения*

$$Q'(t) = B^\star(t)Q(t) + Q(t)B(t), \tag{17}$$

удовлетворяющее условиям

(γ_1) $b_{j+1j}(t) = 1$ *для всех $t \in I$ и $1 \le j \le n-1$;*
(γ_2) $b_{ij}(t) = 0$ *для всех $t \in I$ и $j \ne n, i \ne j+1$, $1 \le i \le n$.*

Доказательство. В силу предположений (γ_1) и (γ_2) неизвестными являются только элементы $b_{1n}(t), \dots, b_{nn}(t)$ матрицы $B(t)$. Из (17) и $Q^\star(t) = Q(t)$, используя условия (γ_1) и (γ_2), получаем

$$f'_{ij}(t) = f_{i+1j}(t) + f_{ij+1}(t)$$

для $1 \le i, j \le n-1$ и

$$f'_{ni}(t) = f'_{in}(t) = f_{i+1n}(t) + \sum_{k=1}^{n} f_{ik}(t)b_{kn}(t)$$

для $1 \le i \le n-1$,

$$f'_{nn}(t) = \sum_{k=1}^{n} b_{kn}(t)f_{kn}(t) + \sum_{k=1}^{n} f_{nk}(t)b_{kn}(t) = 2\sum_{k=1}^{n} f_{nk}(t)b_{kn}(t).$$

Отсюда для элементов $b_{1n}(t), \dots, b_{nn}(t)$ получаем следующую систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} f_{ik}(t)b_{kn}(t) = f'_{ni}(t) - f_{i+1n}(t), \quad 1 \le i \le n-1, \\ &\sum_{k=1}^{n} f_{nk}(t)b_{kn}(t) = 0{,}5 f'_{nn}(t). \end{aligned} \tag{18}$$

Определитель этой системы $\det Q(t) = \det \|f_{ij}(t)\|$, и по предположению (i) теоремы отличен от нуля для всех $t \in I$. Следовательно, система (18) имеет единственное решение $(b_{1n}(t), \dots, b_{nn}(t))$. □

Лемма 3. *Пусть $B(t)$ есть решение уравнения* (17). *Тогда существует бесконечно дифференцируемая $n \times n$-матричная функция $A(t)$ на I такая, что*

(δ_1) $A(t) = \|a(t)a'(t)\dots,a^{(n-1)}(t)\|$ *для некоторого I-пути $a(t)$ в R^n,*
(δ_2) $\det A(t) \neq 0$ *для всех $t \in I$,*
(δ_3) $A'(t) = A(t)B(t)$ *для всех $t \in I$,*
(δ_4) $A^\star(t)A(t) = Q(t)$ *для всех $t \in I$.*

Доказательство. Из предположений (γ_1) и (γ_2) леммы 2 и из теории линейных дифференциальных уравнений получаем существование решения уравнения (δ_3) такого, что $\det A(t) \neq 0$ для всех $t \in I$. Из свойств (γ_1) и (γ_2) матрицы $B(t)$ следует, что матрица $A(t)$ имеет вид $A(t) = \|a(t)a'(t)\dots,a^{(n-1)}(t)\|$ для некоторого пути $a(t)$ в R^n. Имеем $\det(A^\star(t)A(t)) \neq 0$ для всех $t \in I$. Пусть $t_0 \in I$ такое, что $\det Q(t_0) \neq 0$ и матрица $Q(t_0)$ положительно определена. Из $\det Q(t_0) \neq 0$ и положительной определенности $Q(t_0)$, $\det(A^\star(t)A(t)) \neq 0$ и $Q^\star(t) = Q(t)$ для всех $t \in I$, следует существование невырожденной $n \times n$-матрицы $g \in GL(n,R)$ такой, что

$$(g^\star)^{-1}(A^\star(t_0))^{-1}Q(t_0)A^{-1}(t_0)g^{-1} = E,$$

где E — единичная матрица. Отсюда имеем $A^\star(t_0)g^\star gA(t_0) = Q(t_0)$. Матричная функция $gA(t)$ также является решением уравнения (δ_3). Матричная функция $H(t) = A^\star(t)g^\star gA(t)$ удовлетворяет следующим условиям: $H^\star(t) = H(t)$, $H'(t) = B^\star(t)H(t) + H(t)B(t)$ для всех $t \in I$. Однако эти условия выполнены и для функции $Q(t)$. Отсюда и из равенства $H(t_0) = Q(t_0)$, используя теорему существования и единственности решения системы линейных дифференциальных уравнений, получаем равенство $H(t) = Q(t)$ для всех $t \in I$. $\square$

Продолжим доказательство теоремы. В силу леммы 3 существует матрица

$$A(t) = \|a(t)\dots a^{(n-1)}(t)\|$$

такая, что $A'(t) = A(t)B(t)$, $A^\star(t)A(t) = Q(t)$. Используя $A^\star(t)A(t) = \|\langle a^{(i)}(t), a^{(j)}(t)\rangle\|$, получаем $\langle a^{(i)}(t), a^{(j)}(t)\rangle = f_{i+1j+1}(t)$ для всех $i,j = 0,\dots,n-1$. Положим $x(t) = \int\limits_{t_0}^{t} a(t)dt$. Тогда $\langle x^{(i)}(t), x^{(i)}(t)\rangle = f_{ii}(t)$, $i = 1,\dots,n$. Так как $[x'(t)\dots,x^{(n)}(t)]^2 = \det A^\star(t)A(t) = \det Q(t) \neq 0$ для всех $t \in I$, то путь $x(t)$ является невырожденным. $\square$

Замечание 7. Отметим, что условие (ii) теоремы 6 относится только к одной точке. В силу равенства

$$\langle x^{(i)}(t), x^{(i)}(t)\rangle = f_{ii}(t)$$

из теоремы 6 следует положительность функций $f_{ii}(t)$ для всех $t \in I$ и всех $i = 1,2,\dots,n$. Это свойство является следствием условий (i) и (ii) теоремы 6, вместе взятых.

Пусть I есть один из интервалов $(0,l)$, $0 < l \leq +\infty$, $(-\infty,0)$, $(-\infty,+\infty)$.

Следствие 5. Пусть $f_{11}(s),\dots,f_{nn}(s)$ — бесконечно дифференцируемые функции на I такие, что

(i) $f_{11}(s) = 1$ для всех $s \in I$;
(ii) $\det\|f_{ij}(s)\| \neq 0$ для всех $s \in I$, где функция $f_{ij}(s)$ определена формулой (16);
(iii) матрица $\|f_{ij}(s_0)\|$ положительно определена для некоторого $s_0 \in I$.

Тогда существует невырожденная кривая α типа $L(\alpha) = I$ такая, что $\langle x^{(i)}(s), x^{(i)}(s)\rangle = f_{ii}(s)$ для некоторого $x \in \mathrm{Ip}(\alpha)$ и для всех $s \in I$, $i = 2,\dots,n$.

Это утверждение есть частный случай теоремы 6.

Пусть I — произвольный интервал в R.

Теорема 7. *Пусть $f_{11}(t),\dots,f_{n-1n-1}(t)$ и $d(t)$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями на I такими, что*

(γ_1) $\det\|f_{ij}(t)\| \neq 0$ *для всех* $t \in I$, *где функция* $f_{ij}(t)$ *определена формулой* (16);

(γ_2) *матрица* $\|f_{ij}(t)\|_{i,j=1,\dots,n-1}$ *является положительно-определенной для всех* $t \in I$;

(γ_3) $d(t) \neq 0$ *для всех* $t \in I$.

Тогда существует невырожденный путь $x(t)$ *в* R^n *такой, что*

$$\langle x^{(i)}(t), x^{(i)}(t)\rangle = f_{ii}(t), \quad [x'(t)\dots x^{(n)}(t)] = d(t)$$

для всех $t \in I$ *и* $i = 1, \dots, n-1$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $F_n = \|f_{ij}(t)\|_{i,j=1,\dots,n}$, где функции $f_{ij}(t)$, $i + j < 2n$, определены согласно предложению 6 с помощью функций $f_{11}, \dots, f_{n-1n-1}$ формулой (16). Функцию f_{nn} определим ниже. Пусть A_{ni} — алгебраическое дополнение элемента f_{ni} в матрице F_n. Оно вычисляется с помощью элементов f_{pq} таких, что $p+q < 2n$. Поэтому в силу предложения 6 A_{ni} можно выразить как дифференциальный многочлен от $f_{11}, \dots, f_{n-1n-1}$. По предположению ($\gamma_2$) теоремы $A_{nn} = \det F_{n-1} = \det\|f_{ij}(t)\|_{i,j=1,\dots,n-1} \neq 0$ для всех $t \in I$.

Положим

$$f_{nn} = \frac{d^2(t) - f_{n1}(t)A_{n1} - \dots - f_{nn-1}(t)A_{nn-1}}{A_{nn}}. \tag{19}$$

Таким образом, все элементы матрицы F_n определены. Докажем, что матрица F_n положительно определена для всех $t \in I$. По предположению (γ_2) теоремы матрица F_{n-1} положительно определена для всех $t \in I$. Поэтому для доказательства положительной определенности матрицы F_n осталось доказать, что $\det F_n > 0$ для всех $t \in I$. Из равенства (19) и $d(t) \neq 0$ для всех $t \in I$ получаем $\det F_n = f_{n1}(t)A_{n1} + \dots + f_{nn-1}(t)A_{nn-1} + f_{nn}(t)A_{nn} = d^2(t) > 0$ для всех $t{\in}I$. Таким образом, матрица F_n положительно определена для всех $t \in I$. В силу теоремы 6 существует невырожденный путь $x(t)$ в R^n такой, что $\langle x^{(i)}(t), x^{(i)}(t)\rangle = f_{ii}(t)$ для всех $t \in I$ и $i = 1, \dots, n$. Используя равенство (19) и равенство (7), получаем $[x'(t)\dots x^{(n)}(t)]^2 = d^2(t)$. Так как $[x'(t)\dots x^{(n)}(t)] \neq 0$ и $d(t) \neq 0$ для всех $t \in I$, то $[x'(t)\dots x^{(n)}(t)] = d(t)$ для всех $t \in I$ или $[x'(t)\dots x^{(n)}(t)] = -d(t)$ для всех $t \in I$. В первом случае доказательство теоремы заканчивается. Во втором случае рассмотрим $g \in O(n)$ такое, что $\det g = -1$. Положим $y(t) = gx(t)$. Тогда имеем $\langle y^{(i)}(t), y^{(i)}(t)\rangle = \langle gx^{(i)}(t), gx^{(i)}(t)\rangle = \langle x^{(i)}(t), x^{(i)}(t)\rangle = f_{ii}(t,)$ и $[y'(t)\dots y^{(n)}(t) \neq 0] = [gx'(t)\dots gx^{(n)}(t)] = d(t)$. Это показывает, что путь $y(t)$ удовлетворяет условиям нашей теоремы. □

Литература

1. Guggenheimer H.W. *Differential geometry.* – New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1963.
2. Аминов Ю.А. *Дифференциальная геометрия и топология кривых.* – М.: Наука, 1987. – 160 с.
3. Klingenberg W. *A course in differential geometry.* – New York: Springer-Verlag, 1978.
4. Nevanlinna F., Nevanlinna R. *Absolute analysis.* – Berlin: Springer-Verlag, 1959. – 259 S.
5. Spivak M. *A comprehensive introduction to differential geometry.* V. 2. – Publ. of Perish. Inc., Berkeley, CA, 1979.
6. Арипов Р.Г. *Эквивалентность путей в n-мерном комплексном векторном пространстве относительно действия группы $SO(n,R)$* // Докл. АН УзССР. – 1986. – Т. 6. – С. 8–10.
7. Арипов Р.Г. *Критерий G-эквивалентности конечных систем регулярных путей в C^n для действительных ортогональных групп G* // Узб. матем. журн. – 1992. – № 5–6. – С. 17–22.
8. Арипов Р.Г. *Алгебраическая структура дифференциального поля G-инвариантных дифференциальных рациональных функций путей в пространстве C^n для комплексных ортогональных групп G* // Узб. матем. журн. – 1997. – № 1. – С. 3–11.
9. Арипов Р.Г. *Теорема о существовании и единственности системы регулярных путей для действий комплексных ортогональных групп в C^n* // Узб. матем. журн. – 2001. – № 2. – С. 6–12.

10. Chern S.S. *Curves and surfaces in Euclidean space* // Global Diff. Geom. – 1989 . – V. 27. – P. 99–139.
11. Farris F. *Classifying curves in space and space-time* // Exp. Math. – 1988. – V. 6. – P. 81–89.
12. Хаджиев Дж. *Об инвариантном параметре для кривых* // Докл. АН УзССР. – 1986. – № 7. – С. 5.
13. Kosters M. *Curvature-dependent parametrization of curves and surfaces* // Comput. Sci. Notes, Univ. Groningen, Dep. Math. and Comput. Sci. – 1989. – 8915. – P. 1–20.
14. Molnar G.S. *On some questions concerning the differential geometry of curves in n-dimensional Euclidean spaces* // Publ. Math. – 1983. – V. 30. – № 1–2. – P. 57–73.
15. Wegner B. *Some new dewelopments in the global theory of curves.* In: Albu Adrian C. (Ed.) et al. Proceedings of the 24th national conference of geometry and topology, Timisoara, Romania, July 5–9, 1994. Part 1. Lectures. Timisoara; Editora Mirton. – 1996. – P. 275–283.
16. Weiner J.L. *An inequality involving the length, curvature and torsions of a curve in euclidean n-space* // Pacific J. Math. – 1978. – V. 74. – № 2. – P. 531–534.
17. Хаджиев Дж. *Приложение теории инвариантов к дифференциальной геометрии кривых.* – Ташкент, 1988. – 136 с.
18. Khadjiev Dj., Peksen O. *The complete system of global differential and integral invariants of equiaffine curves* // Diff. Geom. And Appl. – 2004. – V. 20. – P. 168–175.
19. Peksen O., Khadjiev Dj. *On invariants of curves in centro-affine geometry* // J. math. Kyoto. Univ. (JMKYAZ). – 2004. – V. 44. – № 3. – P. 603–613.
20. Alexandrov A.D., Reshetnyak Yu.G. *General theory of irregular curves.* – Kluwer Acad. Publ., 1989.
21. Kreyszig E. *Introduction to differential geometry and Riemannian geometry.* – Univ. of Toronto Press, 1968.
22. Капланский И. *Введение в дифференциальную алгебру.* – М.: Ин. лит., 1959. – 88 с.
23. Aminov Y.A. *The geometry of submanifolds.* – London–Amsterdam: Gordon and Breach Sciences Publishers, 2001.

Национальный университет Узбекистана (*Ташкент*)
Босфорский технический университет (*Трабзон, Турция*)

Поступили
первый вариант 15.08.2005
окончательный вариант 02.04.2007