ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 9 (448)

УДК 514.764

З.Х. ЗАКИРОВА

ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ H-ПРОСТРАНСТВ ТИПА [411]

Статья посвящена нахождению 6-мерных h-пространств типа [411] и первых интегралов уравнений геодезических, порождаемых проективными преобразованиями этих пространств. Общая схема определения (псевдо)римановых пространств, допускающих негомотетическую проективную группу G_r, разработанная А.В. Аминовой [1], была подробно изложена в [2] применительно к случаю h-пространства типа [51].

Для соответствующего канонического репера $\{\underset{p}{\xi^i}\}$ уравнения Эйзенхарта в случае h-пространства типа [411] сводятся к системе уравнений

$$
\begin{gathered}
X_r\lambda_4 = 0 \ \text{ при } \ r \neq 4, \quad X_r\lambda_\sigma = 0 \ \text{ при } \ r \neq \sigma, \quad X_4(2\lambda_4 - \phi) = X_\sigma(\lambda_\sigma - 2\phi) = 0,\\
\gamma_{314} = \frac{1}{2}e_4X_4\phi, \quad \gamma_{413} = \gamma_{431} = \gamma_{422} = -e_4X_4\phi, \quad \gamma_{1\sigma4} = \gamma_{2\sigma3} = \gamma_{3\sigma2} = \gamma_{4\sigma1} = \frac{e_4X_\sigma\phi}{\lambda_4 - \lambda_\sigma},\\
\gamma_{2\sigma4} = \gamma_{3\sigma3} = \gamma_{4\sigma2} = -\frac{e_4X_\sigma\phi}{(\lambda_4 - \lambda_\sigma)^2}, \quad \gamma_{3\sigma4} = \gamma_{4\sigma3} = \frac{e_4X_\sigma\phi}{(\lambda_4 - \lambda_\sigma)^3},\\
\gamma_{4\sigma4} = -\frac{e_4X_\sigma\phi}{(\lambda_4 - \lambda_\sigma)^4}, \quad \gamma_{4\sigma\sigma} = \frac{e_\sigma X_4\phi}{\lambda_4 - \lambda_\sigma}, \quad \gamma_{\sigma\tau\sigma} = \frac{e_\sigma X_\tau\phi}{\lambda_\sigma - \lambda_\tau};
\end{gathered}
\tag{1}
$$

здесь $X_p\phi = \underset{p}{\xi^i}\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$, $\gamma_{pqr} = -\gamma_{qpr} = \underset{p}{\xi_{i,j}}\underset{q}{\xi^i}\underset{r}{\xi^j}$ — инварианты, играющие роль коэффициентов вращения Риччи, ϕ — определяющая функция проективного движения, λ_4, λ_5, λ_6 — инварианты, причем $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ при $\alpha, \beta = 4, 5, 6$; $e_\alpha = \pm1$; $\sigma, \tau = 5, 6$.

Условия интегрируемости системы уравнений (1) записываются в виде

$$
\begin{gathered}
(X_1, X_2) = 0, \ (X_1, X_3) = 0, \ (X_2, X_3) = 0, \ (X_1, X_4) = e_3(\gamma_{314} - \gamma_{341})X_2,\\
(X_2, X_4) = -e_2\gamma_{242}X_3, \ (X_3, X_4) = e_3(\gamma_{134} - \gamma_{143})X_4, \ (X_1, X_\sigma) = -e_4\gamma_{4\sigma1}X_1,\\
(X_2, X_\sigma) = -e_3\gamma_{3\sigma2}X_2 - e_4\gamma_{4\sigma2}X_1, \ (X_3, X_\sigma) = -e_2\gamma_{2\sigma3}X_3 - e_3\gamma_{3\sigma3}X_2 - e_4\gamma_{4\sigma3}X_1,\\
(X_4, X_\sigma) = -e_1\gamma_{1\sigma4}X_4 - e_2\gamma_{2\sigma4}X_3 - e_3\gamma_{3\sigma4}X_2 - e_4\gamma_{4\sigma4}X_1 + e_\sigma\gamma_{\sigma4\sigma}X_\sigma,\\
(X_\sigma, X_\tau) = -e_\sigma\gamma_{\sigma\tau\sigma}X_\sigma + e_\tau\gamma_{\tau\sigma\tau}X_\tau.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых производных $\frac{\partial}{\partial x^i}$ в правых и левых частях равенств (2), получим систему дифференциальных уравнений с частными производными, интегрирование которой даст компоненты $\underset{p}{\xi^i}$ векторов канонического репера. Используя эти результаты, по соответствующим формулам (см. [2]) можно найти контравариантные компоненты метрического тензора рассматриваемого h-пространства, а также его ковариантные компоненты при $\varepsilon = 1$

$$
\begin{aligned}
g_{ij}dx^idx^j = e_4\Pi_\sigma(f_\sigma - x^4)\{&6Adx^1dx^4 + 2dx^2dx^3 + 2(2x^2 - 3A\Sigma)dx^2dx^4 -\\
&- \Sigma(dx^3)^2 + 2(x^1 - 2x^2\Sigma)dx^3dx^4 - 4((x^2)^2\Sigma - x^1x^2 + \tfrac{3}{2}x^1A\Sigma)(dx^4)^2\} +\\
&+ 3Adx^3dx^4 + 12x^2A(dx^4)^2 + \sum_\sigma e_\sigma\Pi'_i(f_i - f_\sigma)(dx^\sigma)^2,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

при $\varepsilon = 0$

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_4\Pi_\sigma f_\sigma\{6\theta dx^1dx^4 + 2dx^2dx^3 - (\tfrac{1}{f_5}+\tfrac{1}{f_6})(6\theta dx^2dx^4 - (dx^3)^2)\} + \\ + e_4\tfrac{6\theta}{f_5f_6}dx^3dx^4 + \sum_\sigma e_\sigma \Pi'_i(f_i - f_\sigma)(dx^\sigma)^2, \quad (4)$$

где

$$A = x^3 + \theta(x^4), \quad \Sigma = (f_5 - x^4)^{-1} + (f_6 - x^4)^{-1},$$

$f_k = \varepsilon x^4$, f_σ — функция x^σ, θ — функция x^4, отличная от нуля при $\varepsilon = 0$, $k = 1,\dots,4$.

Тензор h_{ij} имеет вид

$$h_{ij} = a_{ij} + 2\phi g_{ij}, \quad (5)$$

где

$$a_{ij}dx^idx^j = \varepsilon x^4 g_{kl}dx^kdx^l + 2g_{14}dx^2dx^4 + 2g_{24}dx^3dx^4 + g_{23}(dx^3)^2 + \\ +3g_{23}(3A^2\Sigma_4 - 4\varepsilon x^2A\Sigma_1 + 2\varepsilon x^1A + \tfrac{4}{3}(\varepsilon x^2)^2)(dx^4)^2 + f_5g_{55}(dx^5)^2 + f_6g_{66}(dx^6)^2, \quad (6)$$

$$2\phi = 4f_4 + f_5 + f_6 + c, \quad c = \mathrm{const}, \quad k,l = 1,2,3,4. \quad (7)$$

Из предыдущего следует, что уравнения геодезических 6-мерных пространств с метриками (3) и (4) допускают соответственно квадратичные первые интегралы, приведенные ниже,

$$(x^4 - 2\phi)g_{kl}\dot x^k\dot x^l + (f_\sigma - 2\phi)g_{\sigma\sigma}(\dot x^\sigma)^2 + e_4\Pi_\sigma(f_\sigma - x^4)\{6A\dot x^2\dot x^4 + \\ +(\dot x^3)^2 + 2(2x^2 + 3A\Sigma_1)\dot x^3\dot x^4 + 3(3A^2\Sigma_4 - 4x^2A\Sigma_1 + 2x^1A + \tfrac{4}{3}(x^2)^2)(\dot x^4)^2\} = \mathrm{const}, \quad (8)$$

$$-2\phi g_{kl}\dot x^k\dot x^l + (f_\sigma - 2\phi)g_{\sigma\sigma}(\dot x^\sigma)^2 + e_4\Pi_\sigma f_\sigma\{6\theta\dot x^2\dot x^4 + (\dot x^3)^2 + 6\theta(\tfrac{1}{f_5}+\tfrac{1}{f_6})\dot x^3\dot x^4 + \tfrac{9\theta^2}{f_5f_6}(\dot x^4)^2\} = \mathrm{const}. \quad (9)$$

Полученные результаты сформулированы в следующей теореме.

Теорема. *Если симметрический тензор* h_{ij} *типа* [411] *и скаляр* ϕ *удовлетворяют в* V_6 *с метрическим тензором* g_{ij} *уравнениям Эйзенхарта, то существует голономная система координат, в которой* g_{ij}, h_{ij} *и* ϕ *определяются формулами* (3)–(7). *Уравнения геодезических метрик* (3) *и* (4) *допускают первые квадратичные интегралы, определяемые формулами* (8) *и* (9).

Автор благодарит А.В. Аминову за постановку задачи.

Литература

1. Аминова А.В. *Алгебры Ли инфинитезимальных преобразований лоренцевых многообразий* // УМН. – 1995. – Т. 50. – Вып. 1. – С. 69–142.
2. Закирова З.Х. *Первые интегралы уравнений геодезических H-пространств типа* [51] // Тр. Геометрич. семин. – Казань, 1997. – Вып. 23. – С. 57–64.

Казанский государственный университет

Поступили
полный текст 18.12.1996
краткое сообщение 10.03.1999