ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 9 (448)

УДК 514.762

А.Я. СУЛТАНОВ

ПРОДОЛЖЕНИЯ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ И СВЯЗНОСТЕЙ В РАССЛОЕНИЯ ВЕЙЛЯ

Расслоения $\mathbb{A}$-близких точек над дифференцируемым многообразием M_n были введены А. Вейлем [1]. А. Моримото построил лифты тензорных полей типа (p,q) $(p,q = 0$ или $1)$ из M_n в расслоение Вейля $M_n^{\mathbb{A}}$ над произвольной локальной алгеброй $\mathbb{A}$ [2]. В этой же работе им построен полный лифт ∇^C линейной связности ∇, заданной на M_n. Многообразия над локальными алгебрами и связности на них изучались в [3]–[5].

В данной работе построены лифты функций и тензорных полей из M_n в $M_n^{\mathbb{A}}$ и синектический в смысле А.П. Широкова лифт линейной связности. В результате изучения голоморфных связностей на $M_n^{\mathbb{A}}$, установлено, что всякий синектический лифт линейной связности является вещественной реализацией некоторой голоморфной линейной связности на $M_n^{\mathbb{A}}$.

1. Пространство $\mathbb{A}$-близких точек над $\mathbb{R}^n$

Пусть $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — алгебра гладких функций класса C^∞, заданных на $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{A}$ — локальная алгебра. Напомним, что локальной алгеброй над $\mathbb{R}$ называется коммутативная, ассоциативная алгебра $\mathbb{A}$ с единицей, обладающая нильпотентным идеалом $\mathbb{I}$ таким, что факторалгебра $\mathbb{A}/\mathbb{I}$ изоморфна полю действительных чисел $\mathbb{R}$ ([6], с. 146).

Наименьшее натуральное число r, удовлетворяющее условию $\mathbb{I}^{r+1} = 0$, называется высотой, а размерность факторалгебры $\mathbb{I}/\mathbb{I}^2$ — шириной локальной алгебры $\mathbb{A}$. Алгебра $\mathbb{A}$ как векторное пространство может быть представлена в виде прямой суммы $\mathbb{R} \oplus \mathbb{I}$.

Определение 1.1 ([7]). Точкой, $\mathbb{A}$-близкой к точке $x \in \mathbb{R}^n$, называется гомоморфизм $x' : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{A}$, удовлетворяющий условию $x'(f) \equiv f(x) \operatorname{mod} \mathbb{I}$ для любой функции $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Множество точек x', $\mathbb{A}$-близких к точке $x \in \mathbb{R}^n$, обозначим через $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{A}}_x$ и положим $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{A}} = \bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{A}}_x$. Из определения $\mathbb{A}$-близких точек и свойств алгебры $\mathbb{A}$ следует, что $x'(c) = c$ для любой постоянной функции $c \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Остановимся на локальном представлении гомоморфизма $x' \in (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{A}}$. Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$. Существует окрестность точки x_0, в которой имеет место равенство

$$f = f(x_0) + \sum_{|p|=1}^{r} \frac{1}{p!} D_p f(x_0)(x - x_0)^p + \sum_{|p|=r+1} \frac{1}{p!} (D_p f \circ \xi)(x - x_0)^p. \tag{1.1}$$

Здесь $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ — мультииндекс, p_i — целые неотрицательные числа, $|p| = p_1 + p_2 + \dots + p_n$, $p! = p_1! p_2! \dots p_n!$, $(x - x_0)^p = (x^1 - x_0^1)^{p_1}(x^2 - x_0^2)^{p_2} \dots (x^n - x_0^n)^{p_n}$, x^i — координатные функции, $\xi = x + \theta(x - x_0)$, причем $0 < \theta < 1$;

$$D_p f(x_0) = \frac{\partial^{|p|} f}{(\partial x^1)^{p_1} \dots (\partial x^n)^{p_n}}(x_0).$$

Используя разложение (1.1), для всякой точки x_0' $\mathbb{A}$-близкой к точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ получим

$$x_0'(f) = f(x_0) + \sum_{|p|=1}^{r} \frac{1}{p!} D_p f(x_0)(x_0'(x) - x_0)^p + \sum_{|p'|=r+1} \frac{1}{p'!} x_0'(D_{p'} f \circ \xi)(x_0'(x) - x_0)^{p'}.$$

В этом равенстве

$$(x'_0(x)-x_0)^p=(x'_0(x^1)-x_0^1)^{p_1}\dots(x'_0(x^n)-x_0^n)^{p_n}=$$
$$=(x^1(x_0)+X_1^1-x_0^1)^{p_1}\dots(x^n(x_0)+X_1^n-x_0^n)^{p_n}=(X_1^1)^{p_1}\dots(X_1^n)^{p_n}=X_1^p,$$

где $X_1^i\in\mathbb{I}$. Аналогично

$$(x'_0(x)-x_0)^{p'}=X_1^{p'}.$$

Так как $|p'|=r+1$, $X_1^i\in\mathbb{I}$, то $X_1^{p'}\in\mathbb{I}^{r+1}$. Следовательно, $X_1^{p'}=0$. Тогда

$$x'_0=f(x_0)+\sum_{|p|=1}^{r}\frac{1}{p!}D_pf(x_0)X_1^p. \tag{1.2}$$

Применив формулу (1.2) для координатных функций x^i, получим

$$x'_0(x^i)=x_0^i+x_{0\alpha}^i\varepsilon^\alpha,\quad \alpha\neq 0.$$

Гомоморфизмы $x'\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{A}}$ позволяют ввести понятие естественного продолжения гладких функций, заданных на $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.2 ([7]). Функция $f^{\mathbb{A}}:(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{A}}\to\mathbb{A}$, удовлетворяющая условию $f^{\mathbb{A}}(x')=x'(f)$ для всех $x'\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{A}}$, называется естественным продолжением функции $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

В силу равенства (1.2) имеем

$$f^{\mathbb{A}}(x')=f(x)+\sum_{|p|=1}^{r}\frac{1}{p!}D_pf(x)X_1^p.$$

Из определения продолжения $f^{\mathbb{A}}$ следует, что

$$(f+g)^{\mathbb{A}}=f^{\mathbb{A}}+g^{\mathbb{A}},\quad (cf)^{\mathbb{A}}=cf^{\mathbb{A}}\ \ (c\in\mathbb{R}),\quad (fg)^{\mathbb{A}}=f^{\mathbb{A}}g^{\mathbb{A}}.$$

Каждой точке x', $\mathbb{A}$-близкой к x, можно поставить в соответствие n координат из $\mathbb{A}$ по правилу $x'\mapsto(x^i)^{\mathbb{A}}(x')$, а также nN вещественных координат x_α^i, которые можно определить в виде

$$x_\alpha^i(x')=\varepsilon_\alpha((x^i)^{\mathbb{A}}(x')),$$

где ε_α — векторы дуального базиса к базису (ε^α), $N=\dim\mathbb{A}$.

Пусть $\mathbb{A}^*$ — пространство линейных форм, заданных на $\mathbb{A}$ и $a^*\in\mathbb{A}^*$. Для каждой функции $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ построим функцию $f_{(a^*)}:(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{A}}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющую условию

$$f_{(a^*)}(x')=a^*(f^{\mathbb{A}}(x'))$$

для всех $x'\in(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{A}}$. В случае, когда a^* является базисным вектором ε_α, $f_{(\varepsilon_\alpha)}$ обозначим через $f_{(\alpha)}$. Из сказанного следует, что $x_\alpha^i=(x^i)_{(\alpha)}$ и

$$f^{\mathbb{A}}=f_{(\alpha)}\varepsilon^\alpha.$$

Всякая линейная форма $a^*\in\mathbb{A}^*$ и элемент b алгебры $\mathbb{A}$ порождают линейную форму $a^*\cdot b\in\mathbb{A}^*$ по закону

$$a^*\cdot b(c)=a^*(bc)$$

для любых $c\in\mathbb{A}$. Функцию $f_{(a^*\cdot b)}$ будем обозначать через $f_{(a^*)}^{(b)}$. В частности, через $f_{(\beta)}^{(\alpha)}$ будет обозначаться функция $f_{(\varepsilon_\beta)}^{(\varepsilon^\alpha)}$. Отметим некоторые свойства введенных функций.

Предложение 1.1. *Для любых функций $f,g\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеют место равенства*

$$f_{(\beta)}^{(0)}=f_{(\beta)},\qquad f_{(0)}^{(\alpha)}=\delta_0^\alpha f_{(0)},$$
$$f_{(\beta)}^{(\alpha)}=c_\beta^{\alpha\sigma}f_{(\sigma)},\quad (fg)_{(a^*)}^{(b)}=f_{(a^*)}^{(\sigma)}g_{(\sigma)}^{(b)},$$

где $c_\beta^{\alpha\sigma}$ — структурные постоянные алгебры $\mathbb{A}$ относительно базиса (ε^α).

Эти тождества доказываются непосредственными вычислениями с использованием свойств $\mathbb{A}$-продолжений функций.

Предложение 1.2. *Для любых функций* $f_1, f_2, \ldots, f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *элементов* $b_1, b_2, \ldots, b_k \in \mathbb{A}$ *и* $a^* \in \mathbb{A}^*$ *имеет место равенство*

$$(f_1 f_1 \ldots f_k)^{(b_1 b_2 \ldots b_k)}_{(a^*)} = a^*(\varepsilon^{\sigma_1}\varepsilon^{\sigma_2}\ldots\varepsilon^{\sigma_k})(f_1)^{(b_1)}_{(\sigma_1)}(f_2)^{(b_2)}_{(\sigma_2)}\ldots(f_k)^{(b_k)}_{(\sigma_k)},$$

где (ε^λ) — *базис алгебры* $\mathbb{A}$, *причем* $\varepsilon^0 = 1$, $\lambda = 0, 1, \ldots, N-1$.

Доказательство. При $k = 1$ имеем

$$(f_1)^{(b_1)}_{(a^*)} = a^\sigma (f_1)^{(b_1)}_{(\sigma)} = a^*(\varepsilon^\sigma)(f_1)^{(b_1)}_{(\sigma)}.$$

Предположим, что утверждение верно при всех $k < s$. Докажем справедливость утверждения при $k = s$.

$$\begin{aligned}(f_1 f_2 \ldots f_s)^{b_1 b_2 \ldots b_s}_{(a^*)} &= ((f_1 f_2 \ldots f_{s-1}) f_s)^{(b_1 b_2 \ldots b_s)}_{(a^*)} = a^*(\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta)(f_1 f_2 \ldots f_{s-1})^{b_1 b_2 \ldots b_{s-1}}_{(\alpha)} (f_s)^{(b_s)}_{(\beta)} = \\ &= a^*(\varepsilon^\alpha\varepsilon^\beta)\varepsilon_\alpha(\varepsilon^{\sigma_1}\varepsilon^{\sigma_2}\ldots\varepsilon^{\sigma_{s-1}})(f_1)^{(b_1)}_{(\sigma_2)}(f_2)^{(b_2)}_{(\sigma_2)}\ldots(f_{s-1})^{(b_{s-1})}_{(\sigma_{s-1})} f^{(b_k)}_{(\beta)} = \\ &= a^*(\varepsilon^{\sigma_1}\ldots\varepsilon^{\sigma_{s-1}}\varepsilon^\beta)(f_1)^{(b_1)}_{(\sigma_1)}\ldots(f_{s-1})^{(b_{s-1})}_{(\sigma_{s-1})}(f_s)^{(b_s)}_{(\sigma_s)}. \quad \Box\end{aligned}$$

Используя это предложение, можно доказать следующее

Предложение 1.3. *Для любых* $f, f_1, f_2, \ldots, f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $b_1, b_2, \ldots, b_k \in \mathbb{A}$, $a^* \in \mathbb{A}^*$ *имеет место равенство*

$$(f f_1 \ldots f_k)^{(b_1 b_2 \ldots b_k)}_{(a^*)} = f^{(\varepsilon^{\sigma_1}\varepsilon^{\sigma_2}\ldots\varepsilon^{\sigma_k})}_{(a^*)}(f_1)^{(b_1)}_{(\sigma_1)}(f_2)^{(b_2)}_{(\sigma_2)}\ldots(f_k)^{(b_k)}_{(\sigma_k)}.$$

Предложение 1.4. *Для любой функции* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *имеет место тождество* $\partial^\alpha_i f_{(\tau)} = (\partial_i f)^{(\alpha)}_{(\tau)}$, *где* ∂^α_i — *оператор частного дифференцирования по переменной* x^i_α.

Доказательство. Поскольку $f_{(\tau)} = \varepsilon_\tau \circ f^{\mathbb{A}}$, то $\partial^\alpha_i f_{(\tau)} = \varepsilon_\tau \circ \partial^\alpha_i f^{\mathbb{A}}$. Если $\alpha = 0$, то

$$\partial^0_i f_{(\tau)} = \varepsilon_\tau \circ \Big(\partial^0_i \sum_{|s|=0}^{r} \frac{1}{s!} D_s f X^s_1\Big) = \varepsilon_\tau \circ \Big(\sum_{|s|=0}^{r} D_s(\partial_i f) X^s_1\Big) = \varepsilon_\tau \circ (\partial_i f)^{\mathbb{A}} = (\partial_i f)^{(0)}_{(\tau)}.$$

Пусть $\alpha \neq 0$, тогда

$$\begin{aligned}&\partial^\alpha_i f_{(\tau)} = \varepsilon_\tau \circ \Big(\partial^0_i \sum_{|s|=0}^{r} \frac{1}{s!} D_s f X^s_1\Big) = \varepsilon_\tau \circ \Big(\sum_{|s|=1}^{r} \frac{1}{s!} D_s f \partial^\alpha_i X^s_1\Big) = \\ &= \varepsilon_\tau \circ \Big(\sum_{|s|=1}^{r} \frac{1}{s!} D_s f (s_1 (X^1_1)^{s_1 - 1}(X^2_1)^{s_2}\ldots(X^n_1)^{s_n}\delta^1_i\varepsilon^\alpha + \cdots + s_n (X_1)^{s_1}(X^2_1)^{s_2}\ldots(X^n_1)^{s_n - 1}\delta^n_i\varepsilon^\alpha)\Big) = \\ &= \varepsilon_\tau \circ \Big(\sum_{|s'|=0}^{r-1} \frac{1}{s'!} D_{s'}(\partial_1 f)(X^1_1)^{\overline{s}_1}\ldots(X^n_1)^{s_n}\delta^1_i\varepsilon^\alpha + \cdots + \sum_{|s'|=0}^{r-1} \frac{1}{s'!} D_{s'}(\partial_n f)(X^1_1)^{s_1}\ldots(X^n_1)^{\overline{s}_n}\delta^n_i\varepsilon^\alpha\Big) = \\ &= \varepsilon_\tau \circ (\varepsilon^\alpha (\partial_i f)^{\mathbb{A}}) = (\partial_i f)^{(\alpha)}_{(\tau)}. \quad \Box\end{aligned}$$

Рассмотрим функции, заданные на $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{A}}$ (или на некотором открытом множестве этого пространства) со значениями в $\mathbb{A}$. Среди таких функций можно выделить голоморфные функции в смысле Шефферса.

Определение 1.3 ([6]). Функция $F : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{A}$, где $\pi : (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{A}} \to \mathbb{R}^n$ — каноническая проекция, $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, называется голоморфной в смысле Шефферса, если $dF = \Phi_i dX^i$, где dF — дифференциал функции $F = F_\alpha \varepsilon^\alpha : dF = dF_\alpha \varepsilon^\alpha$, а $X^i = (x^i)^{\mathbb{A}} = x^i_\alpha \varepsilon^\alpha$, $dX^i = dx^i_\alpha \varepsilon^\alpha$.

Функции Φ_i, входящие в представление dF, называются частными производными функции F по переменным X^i и обозначаются $\Phi_i = \frac{\partial F}{\partial X^i}$.

Выше мы рассматривали естественные продолжения функций из $\mathbb{R}^n$ в $(\mathbb{R}^n)^{\mathbb{A}}$. Естественное продолжение $f^{\mathbb{A}}$ функции f является голоморфной функцией над $\mathbb{A}$. Действительно,

$$df^{\mathbb{A}} = d(f_{(\alpha)}\varepsilon^\alpha) = df_{(\alpha)}\varepsilon^\alpha = (\partial_i^\sigma f_{(\alpha)} dx_\sigma^i \varepsilon^\alpha).$$

Отсюда в силу предложения 1.4 имеем

$$df^{\mathbb{A}} = (\partial_i f)_{(\alpha)}^{(\sigma)} dx_\sigma^i \varepsilon^\alpha.$$

Из последнего равенства получим

$$df^{\mathbb{A}} = c_\alpha^{\sigma\tau}(\partial_i f)_{(\tau)} dx_\sigma^i \varepsilon^\alpha = (\partial_i f)_{(\tau)}\varepsilon^\tau dx_\sigma^i \varepsilon^\sigma = (\partial_i f)^{\mathbb{A}} dX^i,$$

т. е. $f^{\mathbb{A}}$ — голоморфная над алгеброй $\mathbb{A}$ функция. Из равенства $df^{\mathbb{A}} = (\partial_i f)^{\mathbb{A}} dX^i$ следует

$$\frac{\partial f^{\mathbb{A}}}{\partial X^i} = (\partial_i f)^{\mathbb{A}}.$$

В [4] доказано, что произвольная голоморфная функция F, определенная на множестве $\pi^{-1}(U)$, где U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, и принимающая значения в $\mathbb{A}$, имеет вид $F = f_\alpha^{\mathbb{A}}\varepsilon^\alpha$.

2. Расслоения Вейля. Лифты

Пусть M_n — дифференцируемое многообразие класса C^∞, $\mathbb{A}$ — локальная алгебра высоты r и ширины m. Алгебру гладких функций (класса C^∞), заданных на M_n, обозначим через $C^\infty(M_n)$.

Определение 2.1. Гомоморфизм $x' : C^\infty(M_n) \to \mathbb{A}$, удовлетворяющий условию $x'(f) \equiv f(x) \operatorname{mod} \mathbb{I}$ для всех $f \in C^\infty(M_n)$, называется $\mathbb{A}$-близкой точкой к точке $x \in M_n$.

Множество всех точек x', $\mathbb{A}$-близких к $x \in M_n$, обозначим через $M_x^{\mathbb{A}}$ и построим объединение $M_n^{\mathbb{A}} = \bigcup\limits_{x \in M_n} M_x^{\mathbb{A}}$. Каноническая проекция $\pi : M_n^{\mathbb{A}} \to M_n$ определяется условием $x'(f) = f(\pi(x')) \operatorname{mod} \mathbb{I}$ для всех $f \in C^\infty(M_n)$. Расслоение $(M_n^{\mathbb{A}}, \pi, M_n)$ называется расслоением Вейля. Дифференцируемая структура многообразия M_n индуцирует структуру дифференцируемого многообразия на $M_n^{\mathbb{A}}$. Для описания этой струкутуры выберем атлас многообразия M_n, в алгебре $\mathbb{A}$ — некоторый базис $(1 = \varepsilon^0, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^{N-1})$, где $N = \dim \mathbb{A}$. Пусть (U, x^i) — карта из этого атласа. Для каждой точки $x' \in \pi^{-1}(U)$ имеем $x'(x^i) = x_\alpha^i(x')\varepsilon^\alpha$. Функции x_α^i можно принять в качестве координатных функций в $\pi^{-1}(U)$. Используя эти функции на $M_n^{\mathbb{A}}$, получим базу естественной топологии, а совокупность окрестностей $(\pi^{-1}(U), x_\alpha^i)$ будет являться атласом на $M_n^{\mathbb{A}}$ дифференцируемой структуры.

Пусть f — гладкая функция на M_n. Определения функций $f^{\mathbb{A}}$, $f_{(a^*)}$, $f_{(a^*)}^{(b)}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$ аналогичны соответствующим определениям, данным в § 1.

Для каждого векторного поля $X \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$ и каждого элемента $a \in \mathbb{A}$ существует единственное векторное поле $X^{(a)}$, удовлетворяющее условию $X^{(a)} f_{(b^*)} = (Xf)_{(b^*)}^{(a)}$ для любых $f \in C^\infty(M_n)$ и $b^* \in \mathbb{A}^*$. Векторное поле $X^{(a)}$ называется (a)-лифтом векторного поля X. В случае $a = \varepsilon^\alpha$ векторное поле $X^{(\varepsilon^\alpha)}$ обозначим $X^{(\alpha)}$.

Легко установить следующие свойства введенных векторных полей

$$(X+Y)^{(a)} = X^{(A)} + Y^{(a)}, \quad (cX)^{(a)} = cX^{(a)} \ \ (c \in \mathbb{R}), \quad [X^{(a)}, Y^{(b)}] = [X, Y]^{(ab)}.$$

Предложение 2.1. *Для любых $f \in C^\infty(M_n)$, $X \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$, $a \in \mathbb{A}$ имеет место соотношение*

$$(fX)^{(a)} = f_{(\tau)}^{(a)} X^{(\tau)}.$$

Доказательство. Пусть g — произвольная функция из $C^\infty(M_n)$. Тогда $(fX)^{(a)} g_{(\alpha)} = ((fX)g)_{(\alpha)}^{(a)} = (f(Xg))_{(\alpha)}^{(a)} = f_{(\tau)}^{(a)} (Xg)_{(\alpha)}^{(\tau)} = f_{(\tau)}^{(a)} X^{(\tau)} g_{(\alpha)}$. Отсюда следует интересующее нас равенство. □

Пусть (U, x^i) — координатная окрестность на M_n, $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ — векторные поля соответствующего натурального репера. Рассмотрим продолжения $(\partial_i)^{(\alpha)}$. Для координатных функций x^i_σ на $\pi^{-1}(U)$ имеем

$$(\partial_i)^{(\alpha)} x^i_\sigma = (\partial_i)^{(\alpha)} (x^j)_{(\sigma)} = (\partial_i x^j)^{(\alpha)}_{(\sigma)} = \delta^j_i \delta^\alpha_\sigma = \frac{\partial}{\partial x^i_\alpha}(x^j_\sigma).$$

Отсюда следует $(\partial_i)^{(\alpha)} = \partial^\alpha_i$.

Предложение 2.2. *Если $\widetilde{\omega}$ — q-форма, заданная на $M^{\mathbb{A}}_n$, и*

$$\widetilde{\omega}(X_1^{(\alpha_1)}, X_2^{(\alpha_2)}, \ldots, X_q^{(\alpha_q)}) = 0$$

для произвольных векторных полей $X_1, X_2, \ldots, X_q$, заданных на M_n, и любых индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, то $\widetilde{\omega} = 0$.

Доказательство. Пусть x' — произвольная точка пространства $M^{\mathbb{A}}_n$ и $(\pi^{-1}(U), x^i_\alpha)$ — координатная окрестность, содержащая эту точку. Возьмем в качестве векторных полей $X_1, X_2, \ldots, X_q$ векторные поля $\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \ldots, \partial_{i_q}$ натурального репера в окрестности U. Тогда $\widetilde{\omega}(\partial^{\alpha_1}_{i_1}, \ldots, \partial^{\alpha_q}_{i_q}) = 0$, т. е. $\widetilde{\omega} = 0$. $\square$

Предложение 2.3. *Пусть $a^* \in \mathbb{A}^*$, $\omega \in \mathcal{T}^0_q(M_n)$. Существует единственная q-форма $\widetilde{\omega}$ на $M^{\mathbb{A}}_n$, удовлетворяющая условию*

$$\widetilde{\omega}(X_1^{(\alpha_1)}, X_2^{(\alpha_2)}, \ldots, X_1^{(\alpha_q)}) = (\omega(X_1, X_2, \ldots, X_q))^{(\varepsilon^{\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_2}\ldots\varepsilon^{\alpha_q})}_{(a^*)} \tag{2.1}$$

для любых $X_1, X_2, \ldots, X_q \in \mathcal{T}^1_0(M_n)$.

Доказательство. Единственность $\widetilde{\omega}$ следует из предложения 2.2. Докажем существование этой формы. Пусть (U, x^i) — координатная окрестность на M_n и $\omega = \omega_{i_1 i_2 \ldots i_q} dx^{i_1} \otimes dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_q}$ — локальное представление ω в этой окрестности. Зададим в карте $(\pi^{-1}(U), x^i_\alpha)$ q-форму $\widetilde{\omega}$ на $\pi^{-1}(U)$ следующим образом:

$$\widetilde{\omega} = (\omega_{i_1 i_2 \ldots i_q})^{(\varepsilon^{\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_2}\ldots\varepsilon^{\alpha_q})}_{(a^*)} dx^{i_1}_{\alpha_1} \otimes dx^{i_2}_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes dx^{i_q}_{\alpha_q}. \tag{2.2}$$

Пусть, далее, (V, y^i) — другая карта на M_n такая, что $U \cap V \neq 0$, $\psi_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ — компоненты q-формы в карте (V, y^i) и $\widetilde{\psi}$ — q-форма на $\pi^{-1}(V)$, определяемая формулой

$$\widetilde{\psi} = (\psi_{j_1 j_2 \ldots j_q})^{(\varepsilon^{\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_2}\ldots\varepsilon^{\alpha_q})}_{(a^*)} dy^{j_1}_{\alpha_1} \otimes dy^{j_2}_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes dy^{j_q}_{\alpha_q}.$$

Имеем

$$\omega_{i_1 i_2 \ldots i_q} = \psi_{j_1 j_2 \ldots j_q} \partial_{i_1} y^{j_1} \partial_{i_2} y^{j_2} \ldots \partial_{i_q} y^{j_q}.$$

Поскольку $y^i_\alpha = (y^i)_{(\alpha)}$, то $dy^i_\alpha = \partial^\sigma_j (y^i)_{(\alpha)} dx^j_\sigma = (\partial_j y^i)^{(\sigma)}_{(\alpha)} dx^j_\sigma$. Используя это, получим

$$\widetilde{\psi} = (\psi_{j_1 j_2 \ldots j_q})^{(\varepsilon^{\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_2}\ldots\varepsilon^{\alpha_q})}_{(a^*)} (\partial_{k_1} y^{j_1})^{(\sigma_1)}_{(\alpha_1)} (\partial_{k_2} y^{j_2})^{(\sigma_2)}_{(\alpha_2)} \ldots (\partial_{k_q} y^{j_q})^{(\sigma_q)}_{(\alpha_q)} dx^{k_1}_{\sigma_1} \otimes dx^{k_2}_{\sigma_2} \otimes \cdots \otimes dx^{k_q}_{\sigma_q}.$$

В силу предложения 1.3 последнее соотношение примет следующий вид:

$$\widetilde{\psi} = (\psi_{j_1 j_2 \ldots j_q} \partial_{k_1} y^{j_1} \partial_{k_2} y^{j_2} \ldots \partial_{k_q} y^{j_q})^{(\varepsilon^{\sigma_1}\varepsilon^{\sigma_2}\ldots\varepsilon^{\sigma_q})}_{(a^*)} dx^{k_1}_{\sigma_1} \otimes dx^{k_2}_{\sigma_2} \otimes \cdots \otimes dx^{k_q}_{\sigma_q} = \widetilde{\omega}.$$

Отсюда следует, что соответствие $x' \mapsto \widetilde{\omega}_{x'}$, где $\widetilde{\omega}_{x'}$ определены по формуле (2.2), является q-формой на $M^{\mathbb{A}}_n$. Покажем, что построенная q-форма $\widetilde{\omega}$ удовлетворяет соотношению (2.1). Пусть $X_s = \xi^j_s \partial_j$ — локальное представление векторных полей X_s $(s = \overline{1, q})$. Тогда $X^{(\alpha)}_s = (\xi^j_s)^{(\alpha)}_{(\tau)} \partial^\tau_j$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}(X_1^{(\alpha_1)}, X_2^{(\alpha_2)}, \ldots, X_q^{(\alpha_q)}) &= (\omega_{i_1 i_2 \ldots i_q})^{(\varepsilon^{\sigma_1}\varepsilon^{\sigma_2}\ldots\varepsilon^{\sigma_q})}_{(a^*)} dx^{i_1}_{\sigma_1}(X_1^{(\alpha_1)}) \ldots dx^{i_q}_{\sigma_q}(X_q^{(\alpha_q)}) = \\
&= (\omega_{i_1 i_2 \ldots i_q})^{(\varepsilon^{\sigma_1}\varepsilon^{\sigma_2}\ldots\varepsilon^{\sigma_q})}_{(a^*)} (\xi^{i_1}_1)^{(\alpha_1)}_{(\sigma_1)} (\xi^{i_2}_2)^{(\alpha_2)}_{(\sigma_2)} \ldots (\xi^{i_q}_q)^{(\alpha_q)}_{(\sigma_q)} = \\
&= (\omega_{i_1 i_2 \ldots i_q} \xi^{i_1}_1 \xi^{i_2}_2 \ldots \xi^{i_q}_q)^{(\varepsilon^{\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_2}\ldots\varepsilon^{\alpha_q})}_{(a^*)} = (\omega(X_1, X_2, \ldots, X_q))^{(\varepsilon^{\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_2}\ldots\varepsilon^{\alpha_q})}_{(a^*)}. \quad \square
\end{aligned}$$

Доказанное предложение позволяет ввести следующее

Определение 2.2. Будем называть (a^*)-лифтом q-формы ω, заданной на M_n, единственную q-форму $w_{(a^*)}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$, удовлетворяющую условию

$$\omega_{(a^*)}(X_1^{(\alpha_1)}, X_2^{(\alpha_2)}, \ldots, X_q^{(\alpha_q)}) = (\omega(X_1, X_2, \ldots, X_q))_{(a^*)}^{(\varepsilon^{\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_2}\ldots\varepsilon^{\alpha_q})}$$

для любых $X_1, X_2, \ldots, X_q \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$.

В указанном соотношении $\varepsilon^{\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_2}\ldots\varepsilon^{\alpha_q}$ означает произведение базисных векторов ε^{α} алгебры $\mathbb{A}$.

Если θ — 1-форма, заданная на M_n, то (a^*)-лифт этой формы определяется условием $\theta_{(a^*)}(X^{(b)}) = (\theta(X))_{(a^*)}^{(b)}$. Можно убедиться, что для любой функции $f \in C^{\infty}(M_n)$ $(df)_{(a^*)} = df_{(a^*)}$. В частности, $dx_{\alpha}^i = (dx^i)_{(\alpha)}$.

Предложение 2.4. *Если* $\omega_1 \in \mathcal{T}_p^0(M_n)$, $\omega_2 \in \mathcal{T}_q^0(M_n)$, *то*

$$(\omega_1 \otimes \omega_2)_{(a^*)} = a^*(\varepsilon^{\sigma_1}\varepsilon^{\sigma_2})(\omega_1)_{(\sigma_1)} \otimes (\omega_2)_{(\sigma_2)}.$$

Доказательство. Для произвольных векторных полей $X_1, X_2, \ldots, X_p$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_q$ на M_n имеем

$$(\omega_1 \otimes \omega_2)_{(a^*)}(X_1^{(\alpha_1)}, \ldots, X_p^{(\alpha_p)},\ Y_1^{(\beta_1)}, \ldots, Y_q^{(\beta_q)}) = (\omega_1(X_1, \ldots, X_p)\omega_2(Y_1, \ldots, Y_q))_{(a^*)}^{(bc)},$$

где $b = \varepsilon^{\alpha_1}\varepsilon^{\alpha_2}\ldots\varepsilon^{\alpha_p}$, $c = \varepsilon^{\beta_1}\varepsilon^{\beta_2}\ldots\varepsilon^{\beta_q}$. Учитывая предложение 1.2, получим

$$\begin{aligned}(\omega_1(X_1, X_2, \ldots, X_p)\omega_2(Y_1, Y_2, \ldots, Y_q))_{(a^*)}^{(bc)} &= a^*(\varepsilon^{\sigma_1}\varepsilon^{\sigma_2})(\omega_1(X_1, \ldots, X_p))_{(\sigma_1)}^{(b)}(\omega_2(Y_1, \ldots, Y_q))_{(\sigma_2)}^{(c)} = \\ &= a^*(\varepsilon^{\sigma_1}\varepsilon^{\sigma_2})(\omega_1)_{(\sigma_1)}(X_1^{(\alpha_1)}, \ldots, X_p^{(\alpha_p)})(\omega_2)_{(\sigma_2)}(Y_1^{(\beta_1)}, \ldots, Y_q^{(\beta_q)}) = \\ &= a^*(\varepsilon^{\sigma_1}\varepsilon^{\sigma_2})(\omega_1)_{(\sigma_1)} \otimes (\omega_2)_{(\sigma_2)}(X_1^{(\alpha_1)}, \ldots, X_p^{(\alpha_p)}, Y_1^{(\beta_1)}, \ldots, Y_q^{(\beta_q)}).\end{aligned}$$

Из полученных соотношений следует справедливость утверждения.

Предложение 2.5. *Для любых* $X \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$, $\omega \in \mathcal{T}_q^0(M_n)$, $a^* \in \mathbb{A}^*$, $b \in \mathbb{A}$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{L}_{X^{(b)}}\omega_{(a^*)} = (\mathcal{L}_X\omega)_{(a^*\cdot b)},$$

где $\mathcal{L}_X$ *— символ производной Ли вдоль векторного поля* X.

Доказательство этого предложения можно провести, используя свойства производной Ли, (b)-лифтов векторных полей и (a^*)-лифтов q-форм. Можно доказать также следующее

Предложение 2.6. *Пусть* K *— тензорное поле типа* $(1, q)$ *на* M_n, $a \in \mathbb{A}$. *На* $M_n^{\mathbb{A}}$ *существует единственное тензорное поле* $K^{(a)}$, *удовлетворяющее условию*

$$K^{(a)}(X_1^{(b_1)}, X_2^{(b_2)}, \ldots, X_q^{(b_q)}) = (K(X_1, X_2, \ldots, X_q))^{(ab_1b_2\ldots b_q)}$$

для любых векторных полей $X_1, X_2, \ldots, X_q$ *на* M_n *и любых* $b_1, b_2, \ldots, b_q \in \mathbb{A}$.

Тензорное поле $K^{(a)}$ называется (a)-лифтом тензорного поля K.

3. Синектический лифт в смысле А.П. Широкова линейной связности

Пусть ∇ — линейная связность, заданная на M_n. А. Моримото доказал, что на $M_n^{\mathbb{A}}$ существует единственная линейная связность ∇^C, удовлетворяющая условию

$$\nabla_{X^{(a)}}^C Y^{(b)} = (\nabla_X Y)^{(ab)}$$

для всех $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$ и $a, b \in \mathbb{A}$ [2]. Связность ∇^C называется полным лифтом связности ∇. Полный лифт линейной связности является частным случаем синектического лифта связности в смысле А.П. Широкова.

Предложение 3.1. *Пусть $\nabla = \Gamma_0$ — линейная связность на M_n, (ε^α), $\alpha \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, — базис алгебры $\mathbb{A}$, причем $\varepsilon^0 = 1$, Γ_λ $(\lambda \neq 0)$ — тензорные поля типа (1.2) на M_n. Тогда на $M_n^{\mathbb{A}}$ существует и притом единственная линейная связность ∇^{Sh}, удовлетворяющая условию*

$$\nabla^{\mathrm{Sh}}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\Gamma_\alpha(X, Y))^{(\varepsilon^\alpha ab)} \tag{3.1}$$

для любых $X, Y \in \mathcal{T}^1_0(M_n)$, $a, b \in \mathbb{A}$.

Доказательство. Рассмотрим на $M_n^{\mathbb{A}}$ линейную связность $\nabla^{\mathrm{Sh}} = \nabla^C + \Gamma_\lambda^{(\lambda)}$ (по λ ведется суммирование при условии $\lambda \neq 0$). Для любых векторных полей $X, Y \in \mathcal{T}^1_0(M_n)$ и любых элементов a и b алгебры $\mathbb{A}$ имеем

$$\nabla^{\mathrm{Sh}}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = \nabla^C_{X^{(a)}} Y^{(b)} + \Gamma^{(\lambda)}_\lambda(X^{(a)}, Y^{(b)}) = (\nabla_X Y)^{(ab)} + (\Gamma_\lambda(X, Y))^{(\varepsilon^\lambda ab)} = (\Gamma_\alpha(X, Y))^{(\varepsilon^\alpha ab)}.$$

Единственность связности ∇^{Sh} следует из того, что разность ковариантных производных относительно двух линейных связностей — тензорное поле $\widetilde{S}$ типа (1.2), причем для любых векторных полей $X^{(a)}$, $Y^{(b)}$ $\widetilde{S}(X^{(a)}, Y^{(b)}) = 0$ и, следовательно, $\widetilde{S} = 0$.

Определение 3.1. Линейная связность ∇^{Sh}, удовлетворяющая условию (3.1), называется синектическим лифтом в смысле А.П. Широкова связности ∇, построенным с помощью тензорных полей Γ_λ $(\lambda \neq 0)$.

Тензорное поле кривизны R^{Sh} связности ∇^{Sh} можно представить следующим образом: $R^{\mathrm{Sh}} = R^{(\alpha)}_\alpha$, где R_0 — тензорное поле кривизны связности ∇, а R_λ — тензорные поля типа (1.3), определенные условиями

$$R_\lambda(X, Y, Z) = \nabla_X \Gamma_\lambda(Y, Z) - \nabla_Y \Gamma_\lambda(X, Z) + \Gamma_\lambda(T(X, Y), Z) + c^{\sigma\tau}_\lambda \Gamma_{\sigma\tau}(X, Y, Z)$$

для любых $X, Y, Z \in \mathcal{T}^1_0(M_n)$. В этих соотношениях $\lambda, \sigma, \tau \neq 0$, T — тензорное поле кручения связности ∇, $c^{\sigma\tau}_\lambda$ — структурные постоянные алгебры $\mathbb{A}$, а $\Gamma_{\sigma\tau}$ — тензорные поля, определенные условиями

$$\Gamma_{\sigma\tau}(X, Y, Z) = \Gamma_\sigma(X, \Gamma_\tau(Y, Z)) - \Gamma_\sigma(Y, \Gamma_\tau(X, Z)).$$

Тензорное поле кручения T^{Sh} связности ∇^{Sh} имеет вид $T^{\mathrm{Sh}} = T^{(\alpha)}_\alpha$, где $T_0 = T$, T_σ — тензорные поля типа (1.2) на M_n, определенные следующим образом: $T_\sigma(X, Y) = \Gamma_\sigma(X, Y) - \Gamma_\sigma(Y, X)$ $(\sigma \neq 0)$.

4. Голоморфные линейные связности на M_n

Расслоение $M_n^{\mathbb{A}}$ допускает структуру n-мерного гладкого многообразия над алгеброй $\mathbb{A}$. Для построения атласа этой структуры для каждой карты (U, x^i) в окрестности $\pi^{-1}(U)$ в качестве координатных функций выберем функции $(x^i)^{\mathbb{A}} = X^i$. В силу сказанного можно говорить о голоморфных функциях, тензорных полях и голоморфных линейных связностях на $M_n^{\mathbb{A}}$.

Определение 4.1. Векторное поле $\widetilde{X}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$ называется голоморфным, если для любой голоморфной функции F, заданной на $M_n^{\mathbb{A}}$, функция $\widetilde{X}F$ голоморфна.

Векторное поле $\widetilde{X}$ голоморфно тогда и только тогда, когда для любой функции $f \in C^\infty(M_n)$ функция $\widetilde{X} f^{\mathbb{A}}$ голоморфна.

Для каждого векторного поля $X \in \mathcal{T}^1_0(M_n)$ существует единственное векторное поле $X^{\mathbb{A}}$ на $M_n^{\mathbb{A}}$ такое, что $X^{\mathbb{A}} f^{\mathbb{A}} = (Xf)^{\mathbb{A}}$ для любой функции $f \in C^\infty(M_n)$. Векторное поле $X^{\mathbb{A}}$ называется естественным продолжением X [2]. Из определения следует, что $X^{\mathbb{A}}$ голоморфное. Приведенный в § 1 результат о строении голоморфных функций позволяет доказать

Предложение 4.1. *Векторное поле $\widetilde{X}$ тогда и только тогда является голоморфным, когда его можно представить в виде $\widetilde{X} = a^\alpha X^{\mathbb{A}}_\alpha$, где $a^\alpha \in \mathbb{A}$, X_α — векторные поля на M_n.*

Доказательство. Достаточность следует из того, что $X_\alpha^{\mathbb{A}}$ голоморфные. Докажем необходимость. Пусть $(\pi^{-1}(U), X^i)$ — произвольная карта из вышеуказанного атласа $M_n^{\mathbb{A}}$ и $\widetilde{X} = \widetilde{X}^i \frac{\partial}{\partial X^i}$ — локальное представление голоморфного векторного поля $\widetilde{X}$ в этой карте. Тогда $X^i = \widetilde{X}(x^i)^{\mathbb{A}}$ — голоморфные функции над $\mathbb{A}$, поэтому существуют функции $X_\alpha^i \in C^\infty(U)$ такие, что $\widetilde{X}^i = (X_\alpha^i)^{\mathbb{A}}\varepsilon^\alpha$. В координатной окрестности (U, x^i) построим векторные поля $X_\alpha = X_\alpha^i \partial_i$. Пусть в карте $(\pi^{-1}(V), Y^i)$ $\widetilde{X} = \widetilde{Y}^i \frac{\partial}{\partial Y^i}$ и $\widetilde{Y}^i = (Y_\alpha^i)^{\mathbb{A}}\varepsilon^\alpha$. Предположим, что $U \cap V \neq \emptyset$. Тогда для любой функции $f \in C^\infty(M_n)$ в $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$ будем иметь

$$\widetilde{X} f^{\mathbb{A}} = \widetilde{X}^i \frac{\partial f^{\mathbb{A}}}{\partial X^i} = (X_\alpha^i)^{\mathbb{A}} \varepsilon^\alpha (\partial_i f)^{\mathbb{A}} = (X_\alpha^i)^{\mathbb{A}} \left(\frac{\partial f}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)^{\mathbb{A}} \varepsilon^\alpha =$$

$$= \left(X_\alpha^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right)^{\mathbb{A}} \left(\frac{\partial f}{\partial y^j} \right)^{\mathbb{A}} \varepsilon^\alpha = (X_\alpha^i \partial_i y^j)^{\mathbb{A}} \varepsilon^\alpha \frac{\partial f^{\mathbb{A}}}{\partial Y^j}.$$

Отсюда следует, что

$$Y_\alpha^i = X_\alpha^j \partial_j y^i.$$

Таким образом, соответствие $x \mapsto X_\alpha^i(x)\partial_i|_x$ является векторным полем на M_n при любом $\alpha = 0, 1, \ldots, N-1$. Значит, $\widetilde{X} = X_\alpha^{\mathbb{A}} \varepsilon^\alpha$, где X_α — векторные поля на M_n.

Определение 4.2. Линейная связность $\widetilde{\nabla}$, заданная на $M_n^{\mathbb{A}}$, называется голоморфной, если для любых голоморфных векторных полей $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ векторное поле $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}$ голоморфно.

Можно доказать, что $\widetilde{\nabla}$ голоморфна тогда и только тогда, когда $\widetilde{\nabla}_{X^{\mathbb{A}}} Y^{\mathbb{A}}$ голоморфное для любых векторных полей $X, Y \in \mathcal{T}_0^1(M_n)$. В силу предложения 4.1 существуют векторные поля $\Gamma_\alpha(X, Y)$ на M_n такие, что

$$\widetilde{\nabla}_{X^{\mathbb{A}}} Y^{\mathbb{A}} = (\Gamma_\alpha(X, Y))^{\mathbb{A}} \varepsilon^\alpha.$$

Отсюда следует, что голоморфная связность $\widetilde{\nabla}$ индуцирует отображения

$$\Gamma_\alpha : \mathcal{T}_0^1(M_n) \times \mathcal{T}_0^1(M_n) \to \mathcal{T}_0^1(M_n).$$

Остановимся на некоторых свойствах этих отображений. Пусть X_1, X_2, Y_1, Y_2 — произвольные векторные поля на M_n, f — произвольная функция из $C^\infty(M_n)$. Из определения (4.2) имеем

$$\widetilde{\nabla}_{(X_1+X_2)^{\mathbb{A}}} Y_1^{\mathbb{A}} = (\Gamma_\alpha(X_1 + X_2, Y_1))^{\mathbb{A}} \varepsilon^\alpha.$$

Так как $(X_1 + X_2)^{\mathbb{A}} = X_1^{\mathbb{A}} + X_2^{\mathbb{A}}$, то

$$\widetilde{\nabla}_{(X_1+X_2)^{\mathbb{A}}} Y_1^{\mathbb{A}} = (\Gamma_\alpha(X_1, Y_1) + \Gamma_\alpha(X_2, Y_1))^{\mathbb{A}} \varepsilon^\alpha.$$

Следовательно,

$$\Gamma_\alpha(X_1 + X_2, Y_1) = \Gamma_\alpha(X_1, Y_1) + \Gamma_\alpha(X_2, Y_1).$$

Аналогично устанавливается тождество

$$\Gamma_\alpha(X_1, Y_1 + Y_2) = \Gamma_\alpha(X_1, Y_1) + \Gamma_\alpha(X_1, Y_2).$$

Для векторного поля $\widetilde{\nabla}_{(fX_1)^{\mathbb{A}}} Y_1^{\mathbb{A}}$ имеем

$$\widetilde{\nabla}_{(fX_1)^{\mathbb{A}}} Y_1^{\mathbb{A}} = (\Gamma_\alpha(fX_1, Y_1))^{\mathbb{A}} \varepsilon^\alpha.$$

С другой стороны,

$$\widetilde{\nabla}_{(fX_1)^{\mathbb{A}}} Y_1^{\mathbb{A}} = \widetilde{\nabla}_{f^{\mathbb{A}} X_1^{\mathbb{A}}} Y_1^{\mathbb{A}} = f^{\mathbb{A}} (\Gamma_\alpha(X_1, Y_1))^{\mathbb{A}} \varepsilon^\alpha = (f\Gamma_\alpha(X_1, Y_1))^{\mathbb{A}} \varepsilon^\alpha.$$

Из этих соотношений следует

$$\Gamma_\alpha(fX_1, Y_1) = f\Gamma_\alpha(X_1, Y_1).$$

Рассмотрим векторное поле $\widetilde{\nabla}_{X_1^{\mathbb{A}}}(fY_1)^{\mathbb{A}}$. Как и в предыдущих рассуждениях, представим его двумя способами:

$$\widetilde{\nabla}_{X_1^{\mathbb{A}}}(fY_1)^{\mathbb{A}} = (\Gamma_\alpha(X_1, fY_1))^{\mathbb{A}}\varepsilon^\alpha,$$

$$\widetilde{\nabla}_{X_1^{\mathbb{A}}}(fY_1)^{\mathbb{A}} = \widetilde{\nabla}_{X_1^{\mathbb{A}}} f^{\mathbb{A}} Y_1^{\mathbb{A}} = f^{\mathbb{A}}\widetilde{\nabla}_{X_1^{\mathbb{A}}} Y_1^{\mathbb{A}} + (X_1^{\mathbb{A}} f^{\mathbb{A}})Y_1^{\mathbb{A}} =$$
$$= (f\Gamma_\alpha(X_1, Y_1))^{\mathbb{A}}\varepsilon^\alpha + ((X_1 f)Y_1)^{\mathbb{A}} = (f\Gamma_0(X_1, Y_1) + (X_1 f)Y_1)^{\mathbb{A}} + (f\Gamma_\sigma(X_1, Y_1))^{\mathbb{A}}\varepsilon^\sigma \quad (\sigma \neq 0).$$

Из этих соотношений получим

$$\Gamma_0(X_1, fY_1) = f\Gamma_0(X_1 Y_1) + (X_1 f)Y_1,$$
$$\Gamma_\sigma(X_1, fY_1) = f\Gamma_\sigma(X_1, Y_1).$$

Таким образом, всякая голоморфная линейная связность на $M_n^{\mathbb{A}}$ порождает на M_n линейную связность Γ_0 и тензорные поля Γ_σ $(\sigma \neq 0)$ типа (1.2). Верно и обратное: всякий набор $(\Gamma_0, \Gamma_\sigma)$ $(\sigma \neq 0)$, где Γ_0 — линейная связность, Γ_σ — тензорные поля, порождает на $M_n^{\mathbb{A}}$ голоморфную связность $\widetilde{\nabla}$ по правилу

$$\widetilde{\nabla}_{X^{\mathbb{A}}} Y^{\mathbb{A}} = (\Gamma_\sigma(X, Y))^{\mathbb{A}}\varepsilon^\alpha. \tag{4.1}$$

Установленное соответствие является взаимно однозначным. Используя это соответствие, легко установить взаимно однозначное соответствие между множеством голоморфных связностей на $M_n^{\mathbb{A}}$ и множеством синектических лифтов линейных связностей из M_n в $M_n^{\mathbb{A}}$: соответствующими будем называть такие связности $\widetilde{\nabla}$ и ∇^{Sh}, которые порождаются одним и тем же набором $(\Gamma_0, \Gamma_\sigma)$ $(\sigma \neq 0)$.

Определение 4.3. Синектический лифт Γ_0^{Sh} линейной связности Γ_0 при помощи тензорных полей Γ_σ $(\sigma \neq 0)$ называется вещественной реализацией голоморфной линейной связности $\widetilde{\nabla}$, определенной по формуле (4.1).

Литература

1. Weil A. *Théorie des points proches sur les variétiés différentiables.* Colloque internat. centre nat. rech. scient. V. 52, Strasbourg–Paris, 1953. – P. 111–117.
2. Morimoto A. *Prolongation of connections to bundles of infinitely near points* // J. Different. Geom. – 1976. – V. 11. – № 4. – P. 479–498.
3. Шурыгин В.В. *Связность высших порядков и лифты полей геометрических объектов* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 5. – С. 96–104.
4. Шурыгин В.В. *Многообразия над алгебрами и их применение в геометрии расслоений струй* // УМН. – 1993. – Т. 48. – Вып. 2. – С. 75–106.
5. Шурыгин В.В. *Классы Атьи–Молино гладкого многообразия над локальной алгеброй как препятствия к продолжению трансверсальных связностей до $\mathbb{A}$-гладких* // Тр. Геометрич. семин. – Казань, 1997. – С. 199–210.
6. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. *Пространства над алгебрами.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1984. – 264 с.
7. Широков А.П. *Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1981. – Т. 12. – С. 61–95.

Пензенский государственный педагогический университет

Поступили
первый вариант 25.03.1998
окончательный вариант 29.01.1999