ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 4 (467)

УДК 517.988

Н.М. РАТИНЕР

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ СТЕПЕНИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ С НАКЛОННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

1. Введение

В статье изучается одна нелинейная эллиптическая краевая задача с наклонной производной. Эта краевая задача порождает в соответствующих пространствах фредгольмово отображение индекса 2, возмущенное вполне непрерывным отображением. Методами теории степени для фредгольмовых отображений положительного индекса доказывается существование однопараметрического семейства решений этого уравнения для одного частного случая нелинейности, фигурирующей в задаче. Как известно, применение теории степени к исследованию разрешимости эллиптических краевых задач и других уравнений с фредгольмовыми нелинейными операторами положительного индекса вызывает определенные трудности. Эти трудности связаны с необходимостью гомотопировать исходное отображение, порожденное краевой задачей, к отображению, которое устроено как бесконечномерная надстройка над конечномерным стабильно гомотопически нетривиальным отображением положительного индекса. Такие отображения выглядят весьма сложно, поэтому трудно понять, как должна задаваться гомотопия на уровне исходной краевой задачи. В этом состоит существенное отличие от задач с фредгольмовыми отображениями нулевого индекса, когда гомотопия осуществляется, как правило, к соответствующему линейному отображению.

Имеется ряд работ, посвященных приложению теории степени фредгольмовых отображений положительного индекса к эллиптическим краевым задачам, однако результаты формулируются при условии существования соответствующей гомотопии (напр., [1], [2]). В настоящей работе такая гомотопия строится, непосредственные вычисления показывают ее невырожденность на границе выбранной области.

Хотя исследуемое отображение имеет индекс 2, в данной работе применяется понижение индекса на единицу путем приписывания дополнительного условия, которое понижает размерность ядра на единицу.

2. Постановка задачи. Переход к операторному уравнению

Рассматривается краевая задача вида

$$\Delta u + \left[a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right]u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \subset \mathbf{R}^2, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где Ω — область в $\mathbf{R}^2$ с C^∞ границей, $a(x,y)$, $b(x,y)$, $f(x,y)$ — ограниченные, измеримые в Ω функции.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00029.

Главная часть этой эллиптической краевой задачи порождает линейное фредгольмово отображение

$$A : W_2^2(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega) \times W_2^{1/2}(\partial\Omega),$$
$$Au = \left(\Delta u, \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\partial\Omega}\right). \tag{3}$$

Индекс этого линейного отображения равен 2 (см. [3], с. 351). Ядро его двумерно, оно состоит из линейных функций от второго аргумента $\operatorname{Ker} A = \{u = ay + b\}$, а образ совпадает со всем пространством $L_2(\Omega) \times W_2^{1/2}(\partial\Omega)$.

Обозначим через $g(x, y, u, Du) = [a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}]u$ нелинейную часть уравнения (1) и рассмотрим отображение $G : W_2^2(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega) \times W_2^{1/2}(\partial\Omega)$, где $G(u) = (g(x, y, u, Du), 0)$. Отображение G является вполне непрерывным. Действительно, для функции $u \in W_2^2(\Omega)$ первые производные принадлежат $W_2^1(\Omega)$. В силу теорем вложения ([4], с. 156) для плоской области с гладкой границей $W_2^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, поэтому $u \in C(\overline{\Omega})$. Произведение трех функций: ограниченной, измеримой функции $a(x, y)$ или $b(x, y)$ на непрерывную функцию $u(x, y)$ и затем на ее производную из $W_2^1(\Omega)$ принадлежит $L_2(\Omega)$. Таким образом, оператор G действует в указанное пространство. Рассмотрим теперь последовательность u_n, ограниченную в $W_2^2(\Omega)$. В силу компактности вложения $W_2^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ эту последовательность можно считать сходящейся в $C(\overline{\Omega})$. Далее, последовательность первых производных $D^1 u_n$ ограничена в $W_2^1(\Omega)$, в силу компактности вложения ее можно считать сходящейся в $L_2(\Omega)$. Поскольку функции $a(x, y)$, $b(x, y)$ ограничены, то последовательность $G(u_n)$ будет сходящейся в $L_2(\Omega)$.

Обозначим через $F : W_2^2(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega) \times W_2^{1/2}(\partial\Omega)$ нелинейное отображение $F = A + G$. Разрешимость краевой задачи (1)–(2) эквивалентна разрешимости операторного уравнения

$$F(u) = 0. \tag{4}$$

Пусть $W_{2,0}^2(\Omega) = \{u \in W_2^2(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$. Поскольку $\operatorname{Ker} A \cap W_{2,0}^2 = 0$, можно рассмотреть прямую сумму $W_{2,0}^2(\Omega) \oplus \operatorname{Ker} A$ и непрерывную проекцию

$$Q_1 : W_{2,0}^2(\Omega) \oplus \operatorname{Ker} A \longrightarrow W_{2,0}^2(\Omega).$$

Рассмотрим также ортогональную проекцию

$$Q_2 : W_2^2(\Omega) \longrightarrow W_{2,0}^2(\Omega) \oplus \operatorname{Ker} A$$

в смысле скалярного произведения в $W_2^2(\Omega)$. Пусть, наконец, $Q = Q_1 \cdot Q_2 : W_2^2(\Omega) \longrightarrow W_{2,0}^2(\Omega)$ — их суперпозиция.

Для фиксированного $r > 0$ рассмотрим непрерывный функционал $\Phi_r : W_2^2(\Omega) \to R^1$, $\Phi_r(u) = \|(I - Q)u\|^2_{W_2^2} - r^2$ и отображение

$$F_r : W_2^2(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega) \times W_2^{1/2}(\partial\Omega) \times R^1, \tag{5}$$

где $F_r(u) = (F(u), \Phi_r(u))$.

Решение уравнения

$$F_r(u) = 0 \tag{6}$$

при любом $r > 0$ является решением уравнения (4), удовлетворяющим дополнительному условию $\|(I - Q)u\|_{W_2^2} = r$.

Лемма 1. *Отображение F_r, определенное соотношением (5), является вполне непрерывным возмущением фредгольмова отображения индекса 1, собственным на ограниченных множествах.*

Доказательство. Отображение F_r можно представить в виде $F_r(u) = (A(u), 0) + (G(u), \Phi_r(u))$. Первое слагаемое линейное, и для него верны соотношения

$$\operatorname{Ker}(A,0) = \operatorname{Ker} A, \quad \operatorname{Coker}(A,0) = \operatorname{Coker} A \times R^1 = R^1,$$
$$\dim \operatorname{Ker}(A,0) = 2, \quad \dim \operatorname{Coker}(A,0) = 1.$$

Таким образом, $\operatorname{ind}(A,0) = 1$.

Второе отображение является вполне непрерывным. Линейное фредгольмово отображение является собственным на ограниченных множествах. Сумма собственного и вполне непрерывного отображения является собственным отображением на ограниченных множествах. $\square$

Таким образом, переход от отображения F к отображению F_r позволяет снизить индекс фредгольмовости на единицу.

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Пусть*

$$g(x,y,u,Du) = \frac{xu(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial u}{\partial x},$$

тогда для каждого $r \geq r_0 = 210\sqrt{5\pi}$ существует решение уравнения $F_r(u) = 0$.

Для доказательства этой теоремы будет использована ориентированная степень для вполне непрерывных возмущений нелинейных фредгольмовых отображений положительного индекса со значениями в группе GL_c-оснащенных бордизмов [5]–[7]. Прежде всего нам понадобятся априорные оценки, позволяющие выделить область в $W_2^2(\Omega)$, на границе которой нет решений уравнения $F_r(u) = 0$, и, следовательно, на которой будет определена степень отображения F_r.

3. Априорные оценки

Приведем две леммы, которые имеются в [8] в несколько более общем виде.

Лемма 2 ([8], с. 80). *Пусть $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ — решение уравнения*

$$\Delta u + g(x,y,u,Du) = 0, \tag{7}$$

где функция $g(x,y,z,p)$ непрерывно дифференцируема по $p \in \mathbf{R}^n$ при всех $(x,y,z) \in \Omega \times \mathbf{R}^1$. Пусть $g(x,y,z,0) = 0$. Тогда

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u|.$$

Лемма 3 ([8], с. 81). *Если в уравнении (1) хотя бы одна из функций $a(x,y), b(x,y) \geq 0$ (или ≤ 0) в Ω, то для любого решения $u \in W_2^2(\Omega)$ уравнения (1) имеет место оценка*

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + c \sup_{\Omega} |f|,$$

где константа c зависит только от диаметра области Ω.

Лемма 4. *Если $u \in W_2^2(\Omega)$ — решение уравнения (1), то имеет место оценка*

$$\|u\|_{W_2^2} \leq \gamma(\sup_{\Omega} |u| + \sup_{\Omega} |f|),$$

где $\gamma(\cdot)$ — непрерывная функция.

Доказательство. Для решения линейного эллиптического уравнения $Lu = h(x,y)$ в области $\Omega \in R^2$ имеет место априорная оценка

$$\|u\|_{W_2^2} \leq c_0 \|h\|_{L_2} + c_1 \|u\|_{L_2}, \tag{8}$$

где константы c_0, c_1 определяются константами эллиптичности оператора L, L_2-нормами его коэффициентов и свойствами границы ([9], с. 258).

Чтобы воспользоваться оценкой (8), перепишем уравнение (1) в виде

$$\Delta u = -\left[a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right]u + f(x,y), \tag{9}$$

и оценим норму правой части в L_2.

Обозначим через Du частную производную первого порядка $\frac{\partial u}{\partial x}$ или $\frac{\partial u}{\partial y}$ соответственно. Для функции $u \in W_2^2(\Omega)$ первые производные принадлежат $W_2^1(\Omega)$ и согласно теореме вложения — пространствам $L_r(\Omega)$ для всех $r \in [1,\infty)$. По неравенству Гёльдера

$$\|uDu\|_{L_2} \leq \|u\|_{L_4}\|Du\|_{L_4}. \tag{10}$$

Оценим теперь $\|Du\|_{L_4}$ с помощью неравенства Ниренберга–Гальярдо ([10], с. 107)

$$\|Du\|_{L_4} \leq c_2\|u\|_{W_2^2}^{1/2}\|u\|_{0,\infty}^{1/2} + c_3\|u\|_{0,\infty}, \tag{11}$$

где $\|u\|_{0,\infty} = \sup\limits_{\Omega}|u(x,y)|$.

Соединяя (10) и (11) и обозначая через M супремум модулей коэффициентов $a(x,y)$, $b(x,y)$ на $\overline{\Omega}$, оценим правую часть уравнения (9) выражением

$$M\|u\|_{L_4}\big(c_2\|u\|_{W_2^2}^{1/2}\sup_{\Omega}|u|^{1/2} + c_3\sup_{\Omega}|u|\big) + \sup_{\Omega}|f|.$$

Подставляя эту оценку в (8), получим

$$\|u\|_{W_2^2} \leq c_0M\|u\|_{L_4}\big(c_2\|u\|_{W_2^2}^{1/2}\sup_{\Omega}|u|^{1/2} + c_3\sup_{\Omega}|u|\big) + c_1\|u\|_{L_2} + c_0\sup_{\Omega}|f|.$$

Отсюда

$$\|u\|_{W_2^2}^{1/2} \leq c_0M\|u\|_{L_4}\big(c_2\sup_{\Omega}|u|^{1/2} + c_3\sup_{\Omega}|u|\,\|u\|_{W_2^2}^{-1/2}\big) + \big(c_1\|u\|_{L_2} + c_0\sup_{\Omega}|f|\big)\|u\|_{W_2^2}^{-1/2}.$$

Заметим, что либо $\|u\|_{W_2^2} \leq 1$, либо

$$\|u\|_{W_2^2}^{1/2} \leq c_0M\|u\|_{L_4}\big(c_2\sup_{\Omega}|u|^{1/2} + c_3\sup_{\Omega}|u|\big) + c_1\|u\|_{L_2} + c_0\sup_{\Omega}|f|.$$

Окончательно, учитывая, что для непрерывной функции u норма в L_2 оценивается через $\sup\limits_{\Omega}|u|$, получаем оценку

$$\|u\|_{W_2^2} \leq \gamma\big(\sup_{\Omega}|u| + \sup_{\Omega}|f|\big). \quad \square$$

Теорема 2. *В условиях леммы* 3 *для решения* $u \in W_2^2(\Omega)$ *уравнения* (6) *имеет место оценка*

$$\|u\|_{W_2^2} \leq \gamma(r+h),$$

где $h = \sup\limits_{\Omega}|f(x,y)|$, *а* $\gamma(t)$ *— непрерывная функция.*

Доказательство. Если u — решение уравнения (6), то $\|(I-Q)u\|_{W_2^2} = r$ и u является решением задачи (1)–(2).

По определению проекции Q имеем $u|_{\partial\Omega} = Qu|_{\partial\Omega} + (I-Q)u|_{\partial\Omega} = (I-Q)u|_{\partial\Omega}$. Тогда $\sup\limits_{\partial\Omega}|u| = \sup\limits_{\partial\Omega}|(I-Q)u| \leq \sup\limits_{\Omega}|(I-Q)u| \leq c\|(I-Q)u\|_{W_2^2} = r$ (последнее неравенство вытекает из непрерывного вложения $W_2^2(\Omega) \subset C(\Omega)$). Учитывая леммы 3, 4, получим

$$\|u\|_{W_2^2} \leq \gamma\big(r + \sup_{\Omega}|f|\big). \quad \square$$

4. Вычисление степени отображения F_r

Для фиксированного r рассмотрим отображение F_r на шаре $B_R = \{u \in W_2^2(\Omega) : \|u\|_{W_2^2} \le R\}$, где число R зависит от r и выбирается настолько большим, чтобы $\gamma(r + \sup\limits_{\Omega}|f|) \le R$, где $\gamma(\cdot)$ — функция из теоремы 2. Тогда на границе шара B_R нет решений уравнения (6), и поэтому определена степень отображения F_r.

Для простоты вычислений будем предполагать, что область Ω — единичный круг на плоскости.

Учитывая свойство гомотопической инвариантности степени ([6], свойство 3), проведем две гомотопии, меняющие только вполне непрерывную часть отображения.

В результате первой гомотопии отображения F_r

$$F_r(u,t) = \left(\Delta u + g(x,y,u,Du) - tf(x,y), \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_S, \Phi_r(u)\right), \quad t \in [0,1],$$

при $t = 1$ получим отображение, соответствующее однородному уравнению. Очевидно, эта гомотопия проходит без нулей на ∂B_R.

Для описания следующей гомотопии понадобятся дополнительные построения.

Рассмотрим в $W_2^2(\Omega)$ четырехмерное подпространство E_1, натянутое на функции

$$e_1 = 1, \quad e_2 = y, \quad e_3 = (x^2+y^2-1)^2, \quad e_4 = (x^2+y^2-1)^2 y.$$

Заметим, что для всех функций из подпространства E_1 выполняется граничное условие (2): $\frac{\partial u}{\partial x}\big|_S = 0$, где S — единичная окружность.

В дальнейшем удобно будет использовать полярные координаты r, φ. В этих координатах

$$e_1 = 1, \quad e_2 = r\sin\varphi, \quad e_3 = (r^2-1)^2, \quad e_4 = (r^2-1)^2 r\sin\varphi.$$

Вычислим

$$\Delta e_1 = \Delta e_2 = 0, \quad \Delta e_3 = 8(2r^2-1), \quad \Delta e_4 = 8(3r^2-2)r\sin\varphi.$$

Обозначим $f_1 = 2r^2 - 1$, $f_2 = (3r^2-2)r\sin\varphi$, тогда образ подпространства E_1 при действии линейного оператора A (см. (3)) равен $A(E_1) = \mathcal{L}(f_1, f_2) \times \{0\} \subset L_2(\Omega) \times W_2^{1/2}(\partial\Omega)$. Заметим также, что функции f_1, f_2 образуют ортогональный базис в подпространстве $A(E_1)$ в смысле скалярного произведения в L_2, поскольку

$$\int_\Omega f_1 f_2\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(2r^2-1)(3r^2-2)r\sin\varphi\, dr\, d\varphi = 0.$$

Нормируем их $\widehat{f_1} = f_1/\|f_1\|$, $\widehat{f_2} = f_2/\|f_2\|$, где $\|f_1\|^2 = \int\limits_\Omega f_1^2\, dx\, dy = \pi/3$, $\|f_2\|^2 = \pi/8$.

Обозначим через p ортогональную проекцию

$$p : L_2(\Omega) \to \mathcal{L}(f_1, f_2),$$

$$pv = (v, \widehat{f_1})\widehat{f_1} + (v, \widehat{f_2})\widehat{f_2} = \widehat{f_1}\int_\Omega v\widehat{f_1}\, dx\, dy + \widehat{f_2}\int_\Omega v\widehat{f_2}\, dx\, dy.$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в L_2. Пусть $P : L_2(\Omega) \to A(E_1)$, $P(u) = (p(u), 0)$ Рассмотрим гомотопию отображения F_r

$$F_r^t(u) = \left(\Delta u + (1-t)g(x,y,u,Du) + tPg(x,y,(I-Q)(u),Du), \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_S, \Phi_r(u)\right). \qquad (12)$$

Лемма 5. *Если число R достаточно велико, то гомотопия* (12) *проходит без нулей на* ∂B_R.

Доказательство. Действительно, если $F^t_r(u)=0$, то $\|(I-Q)u\|_{W^2_2}=r$ и

$$\|(1-t)g(x,y,u,Du)+tPg(x,y,(I-Q)u,Du)\|_{L_2}\le \\ \le (1-t)\|g(x,y,u,Du)\|_{L_2}+t\|P\|\|g(x,y,(I-Q)u,Du)\|_{L_2}.$$

Поэтому достаточно проверить выполнение априорных оценок в п. 3. Априорная оценка получается так же, как в теореме 2, только вместо леммы 3, условия которой здесь не выполняются, нужно воспользоваться леммой 2 для однородного уравнения. □

В результате этой гомотопии получили отображение

$$F^1_r: W^2_2(\Omega)\longrightarrow L_2(\Omega)\times W^{1/2}_2(\partial\Omega)\times R^1,$$
$$F^1_r(u)=\left(\Delta u+Pg(x,y,(I-Q)(u),Du),\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_S,\Phi_r(u)\right),$$

которое имеет вид $F^1_r=A_1+G_1$, где $A_1(u)=(Au,0)$ — линейное фредгольмово отображение индекса 1, а

$$G_1(u)=(Pg(x,y,(I-Q)(u),Du),0,\Phi_r(u))$$

— конечномерное отображение.

Для вычисления степени отображения F^1_r воспользуемся теоремой 1 из [7]. Сформулируем эту теорему.

Пусть F и E — вещественные банаховы пространства и $L:F\to E$ — линейный фредгольмов оператор индекса 1. Предположим, что пространство F может быть представлено в виде прямого произведения $F=F_1\times F_2\times R^1$, где F_2 — конечномерное пространство, а пространство E — в виде $E=L(F_1)\times F_2$, где $\operatorname{Ker}L\subset F_2\times R^1$, так что сужение оператора L на подпространство F_1 является линейным изоморфизмом на подпространство $L(F_1)$, образ подпространства $F_2\times R^1$ лежит в $0\times F_2$.

Пусть K — непрерывный конечномерный оператор, образ которого содержится в F_2. Кроме того, предполагается, что пространство E удовлетворяет свойству конечномерной аппроксимации (т. е. для любого компактного множества M в E и любого $\epsilon>0$ найдется конечномерный линейный оператор T такой, что $\|Tx-x\|<\epsilon$ для всех $x\in M$).

Имеет место

Теорема 3. *Пусть отображение $L+K$ не обращается в нуль на границе шара B с центром в нуле пространства F. Пусть сужение $L+K|_{B\cap(F_2\times R^1)}: B\cap(F_2\times R^1)\to F_2$ гомотопно конечнократной надстройке над m-кратным отображением Хопфа. Если m нечетно, тогда степень отображения $L+K$ отлична от нуля.*

Напомним, что m-кратное отображение Хопфа — это отображение $\chi: S^3\to S^2$. Если рассматривать S^3 как единичную сферу в $\mathbf{C}^2$, то в комплексных координатах оно имеет вид $\chi(\lambda,\omega)=(\overline{\lambda}^m\omega,|\lambda|^2-|\omega|^2)$. При нечетном m это отображение является стабильно гомотопически нетривиальным.

Отметим, что соболевские пространства имеют базис Шаудера [11] и поэтому обладают свойством конечномерной аппроксимации [12].

В исследуемой ситуации линейный оператор $L=A_1=(A,0)$, конечномерный оператор $K=(G_1,\Phi_r)$, в качестве конечномерного подпространства F_2 возьмем трехмерное подпространство $A(E_1)\times R^1$. Образ конечномерного оператора $K=(G_1,\Phi_r)$ лежит в этом подпространстве. Четырехмерное подпространство E_1 содержит ядро оператора $(A,0)$. Можно считать, что оно изоморфно $F_2\times R^1$. Роль F_1 будет выполнять ортогональное дополнение E_1 в $W^2_2(\Omega)$, обозначим его через $E_1^\perp$. Сужение оператора $(A,0)$ на $E_1^\perp$ будет изоморфизмом на образ. Поскольку коядро оператора $(A,0)$ совпадает с $0\times R^1$, то пространство $L_2(\Omega)\times W^{1/2}_2(\partial\Omega)\times R^1$ может быть представлено как прямое произведение $A(E_1^\perp)$ и $F_2 = A(E_1)\times R^1$. Таким образом, указанная теорема сводит вопрос к изучению отображения

$$F_r^1|_{B_R\cap E_1} : \mathrm{B}_R \cap E_1 \to A(E_1)\times R^1,$$

которое в дальнейшем будем называть редуцированным.

В следующих двух пунктах вычисляется редуцированное отображение в координатах соответствующих пространств и показывается, что оно гомотопно однократному отображению Хопфа при $r \geq r_0 = 210\sqrt{5\pi}$.

5. Вычисление редуцированного отображения для одного частного случая

В дальнейшем будем рассматривать нелинейную часть g уравнения (1) в виде

$$g(x,y,u,Du) = \frac{xu(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Вычислим компоненты редуцированного отображения в координатах, соответствующих базису e_i пространства E_1 и базису $\widehat{f}_i$ пространства $A(E_1)$.

Функция $u \in E_1$ имеет вид $u = a + by + c(x^2+y^2-1)^2 + d(x^2+y^2-1)^2 y$. Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4cx(x^2+y^2-1) + 4dxy(x^2+y^2-1) = 4r(r^2-1)\cos\varphi[c + dr\sin\varphi].$$

Заметим, что $a+by \in \operatorname{Ker} A$, а $c(x^2+y^2-1)^2 + d(x^2+y^2-1)^2 \in W^2_{2,0}(\Omega)$, поэтому $u \in W^2_{2,0}(\Omega)\oplus \operatorname{Ker} A$ и, значит, $Q_2 u = u$, а $Qu = Q_1 u = c(x^2+y^2-1)^2 + d(x^2+y^2-1)^2 y$, $(I-Q)u = a + by$.

Таким образом, в данном случае

$$g(x,y,(I-Q)u,Du) = 4r(r^2-1)\cos^2\varphi(c + dr\sin\varphi)(a + br\sin\varphi).$$

Далее, $Pg = \Big(\int\limits_\Omega g\widehat{f}_1\,dx\,dy\Big)\widehat{f}_1 + \Big(\int\limits_\Omega g\widehat{f}_2\,dx\,dy\Big)\widehat{f}_2$. Вычисляя интегралы, получим в базисе $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2$ координаты

$$Pg(x,y,(I-Q)u,Du) = \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{35\sqrt{3}}\left(4ac - \frac{1}{3}bd\right), \frac{4\sqrt{2\pi}}{105}(ad+bc)\right).$$

Учитывая, что $\Delta u = 8(cf_1 + df_2) = 8(c\|f_1\|\widehat{f}_1 + d\|f_2\|\widehat{f}_2)$, получим

$$\Delta u + Pg(x,y,(I-Q)u,Du) = \left(\frac{8\sqrt{\pi}}{105\sqrt{3}}(105c + 3ac - 1/4bd), \frac{8\sqrt{\pi}}{105\sqrt{8}}(105d + 2ad + 2bc)\right).$$

Вычислим последнюю компоненту отображения F_r^1. Для $(I-Q)u = a + by$

$$\|(I-Q)u\|^2_{W_2^2} = \int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq 2} D^\alpha (I-Q)u\,dx\,dy = \pi\left(a^2 + \frac{5}{4}b^2\right).$$

Таким образом, редуцированное отображение $\Phi : E_1 \to A(E_1)\times R^1$ имеет вид

$$\Phi(a,b,c,d) = \begin{cases} \alpha(105c + 3ac - 1/4bd);\\ \beta(105d + 2ad + 2bc);\\ \pi(a^2 + 5b^2/4) - r^2, \end{cases}$$

где $\alpha = \frac{8\sqrt{\pi}}{105\sqrt{3}}$ и $\beta = \frac{8\sqrt{\pi}}{105\sqrt{8}}$.

6. Гомотопия редуцированного отображения к отображению Хопфа

Гомотопии в п. 4 были невырождены на границе шара пространства $W_2^2(\Omega)$ достаточно большого радиуса. Редуцированное отображение следует рассматривать на пересечении этого шара с пространством E_1. Но поскольку все нормы в конечномерном пространстве эквивалентны, будем рассматривать редуцированное отображение на множестве $B_{r,\rho} = \{a^2+b^2+c^2+d^2 \le \frac{r^2+\rho^2}{\pi}\}$, радиус которого может быть сделан как угодно большим при фиксированном r за счет выбора ρ.

Рассмотрим гомотопию

$$\Phi_t(a,b,c,d) = \begin{cases} \alpha[105(1-t)c + 3ac - \frac{11t+1}{4}bd]; \\ \beta[105(1-t)d + (2+t)(ad+bc)]; \\ \pi(a^2 + \frac{5-t}{4}b^2) - r^2. \end{cases} \tag{13}$$

При $t=0$ получаем исходное отображение, а при $t=1$ — отображение

$$\Phi_1(a,b,c,d) = \begin{cases} 3\alpha(ac-bd); \\ 3\beta(ad+bc); \\ \pi(a^2+b^2) - r^2. \end{cases}$$

Лемма 6. *При $r \ge r_0 = 210\sqrt{5\pi}$ и любом $\rho > 0$ гомотопия (13) проходит без нулей на границе $B_{r,\rho}$.*

Доказательство. Введем обозначения

$$\begin{aligned} \lambda &= a+ib, & \omega &= c+id, \\ \lambda_1 &= \sqrt{3}a + \frac{\sqrt{11t+1}}{2}bi, & \omega_1 &= \sqrt{3}c + \frac{\sqrt{11t+1}}{2}di, \\ \lambda_2 &= a + \frac{\sqrt{5-t}}{2}bi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= \lambda_1\omega_1 = 3ac - \frac{11t+1}{4}bd + \frac{\sqrt{3(11t+1)}}{2}(ad+bc)i, \\ z_1 &= \operatorname{Re} z + \frac{2(t+2)}{\sqrt{3(11t+1)}}\operatorname{Im} z i = 3ac - \frac{11t+1}{4}bd + (t+2)(ad+bc)i. \end{aligned}$$

Если $\Phi_t = 0$, то

$$\begin{aligned} 105(1-t)c + 3ac - \frac{11t+1}{4}bd &= 0; \\ 105(1-t)d + (2+t)(ad+bc) &= 0; \\ \pi\left(a^2 + \frac{5-t}{4}b^2\right) - r^2 &= 0. \end{aligned}$$

Умножим второе равенство на i и сложим с первым. Учитывая введенные обозначения, получим

$$\begin{aligned} 105(1-t)\omega + z_1 &= 0; \\ \pi|\lambda_2|^2 &= r^2. \end{aligned} \tag{14}$$

Заметим, что $|z_1| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + \frac{4(t+2)^2}{3(11t+1)}(\operatorname{Im} z)^2}$. Рассмотрим функцию $h(t) = \frac{4(t+2)^2}{3(11t+1)}$. Поскольку $h'(t) < 0$ на $[0,1]$, то $1 = h(1) < h(t) < h(0) = \frac{16}{3}$. Поэтому

$$|z| \le |z_1| \le \frac{4}{\sqrt{3}}|z|. \tag{15}$$

С другой стороны, $z = \lambda_1\omega_1$. Поскольку на отрезке $[0,1]$ имеем $\frac{1}{2} \le \frac{\sqrt{11t+1}}{2} \le \sqrt{3}$, то $\frac{1}{2}|\lambda| \le |\lambda_1| \le \sqrt{3}|\lambda|$, $\frac{1}{2}|\omega| \le |\omega_1| \le \sqrt{3}|\omega|$. Перемножая эти неравенства, получим

$$\frac{1}{4}|\lambda|\,|\omega| \le |z| \le 3|\lambda|\,|\omega|. \tag{16}$$

Сравнивая (15) и (16), получим

$$\frac{1}{4}|\lambda|\,|\omega| \le |z_1| \le 4\sqrt{3}|\lambda|\,|\omega|. \tag{17}$$

Для решения уравнения $\Phi_t = 0$ имеем $|z_1| = 105(1-t)|\omega|$, поэтому из (17) получаем

$$\frac{1}{4}|\lambda|\,|\omega| \le 105(1-t)|\omega| \le 4\sqrt{3}|\lambda|\,|\omega|.$$

Из этого неравенства вытекает, что либо $\omega = 0$, либо

$$\frac{1}{4}|\lambda| \le 105(1-t) \le 4\sqrt{3}|\lambda|,$$

откуда

$$0 \le |\lambda| \le 420 \quad \text{при} \quad \omega \ne 0. \tag{18}$$

Кроме того, из последнего уравнения в (14) $|\lambda_2| = r/\sqrt{\pi}$. Поскольку $|\lambda_2| = \sqrt{a^2 + (\frac{5-t}{4})^2 b^2}$, то $|\lambda| \le |\lambda_2| \le \frac{\sqrt{5}}{2}|\lambda|$, поэтому $|\lambda| \le \frac{r}{\sqrt{\pi}} \le \frac{\sqrt{5}}{2}|\lambda|$. Отсюда получаем вторую оценку на $|\lambda|$

$$\frac{2r}{\sqrt{5\pi}} \le |\lambda| \le \frac{r}{\pi}. \tag{19}$$

Пусть теперь (λ,ω) — решение системы (14), принадлежащее границе области $B_{r,\rho}$. Тогда в наших обозначениях имеем $|\lambda|^2 + |\omega|^2 = \frac{r^2+\rho^2}{\pi}$. Если $\omega = 0$, то $|\lambda|^2 + |\omega|^2 = |\lambda|^2 = \frac{r^2+\rho^2}{\pi}$. Поэтому для всех $\rho > 0$ имеем $|\lambda| > \frac{r}{\sqrt{\pi}}$, так что оценка (19) не выполняется.

Если теперь $\omega \ne 0$, то при $r > 210\sqrt{5\pi}$ неравенства (18) и (19) не могут выполняться одновременно. □

Следующая гомотопия

$$[3\alpha(1-t)+t](ac-bd); \quad [3\beta(1-t)+t](ad+bc); \quad \pi|\lambda|^2 - r^2$$

проходит без нулей на границе выбранной нами области.

Далее гомотопию зададим формулами

$$ac-bd; \quad ad+bc; \quad (1-t)(\pi(a^2+b^2)-r^2) + t(\rho^2 - \pi|\omega|^2).$$

Переходя к обозначениям леммы 6, получим

$$\lambda\omega = 0; \quad (1-t)(\pi|\lambda|^2 - r^2) + t(\rho^2 - \pi|\omega|^2) = 0.$$

Если $(\lambda,\omega) \in \partial B_{r,\rho}$, то $|\lambda|^2 + |\omega|^2 = \frac{r^2+\rho^2}{\pi}$, т. е. $\rho^2 - \pi|\omega|^2 = \pi|\lambda|^2 - r^2$, поэтому второе уравнение принимает вид $\pi|\lambda|^2 = r^2$ или $\pi|\omega|^2 = \rho^2$. Таким образом, для $(\lambda,\omega) \in \partial B_{r,\rho}$ первое уравнение выполняться не может.

В результате этой гомотопии получим отображение $(\lambda\omega, \rho^2 - \pi|\omega|^2)$.

Наконец, последняя гомотопия $(\lambda\omega, t\pi|\lambda|^2 + (1-t)\rho^2 - \pi|\omega|^2)$. Если эта гомотопия обращается в нуль, то либо $\lambda = 0$, либо $\omega = 0$. В первом случае $(1-t)\rho^2 = \pi|\omega|^2$, и тогда $|\lambda|^2 + |\omega|^2 = |\omega|^2 = \frac{(1-t)\rho^2}{\pi} \le \frac{\rho^2}{\pi} < \frac{r^2+\rho^2}{\pi}$. Поэтому решение не может лежать на границе круга. Во втором случае при $\omega = 0$ получаем $t\pi|\lambda|^2 + (1-t)\rho^2 = 0$, откуда $\lambda = 0$.

В результате последней гомотопии получаем отображение $(\lambda\omega, \pi(|\lambda|^2 - |\omega|^2))$, которое, очевидно, гомотопно отображению Хопфа.

Доказательство теоремы 1. Из теоремы 3 и гомотопий предыдущего пункта вытекает, что степень отображения F_r^1 не равна нулю при $r \geq r_0 = 210\sqrt{5\pi}$. В силу гомотопической инвариантности степени для отображения F_r степень также не равна нулю. Тогда по свойству степени ([6], свойство 2) уравнение $F_r = 0$ имеет решение при $r \geq r_0$. $\square$

Литература

1. Ниренберг Л. *Лекции по нелинейному функциональному анализу.* – М.: Мир, 1977. – 232 с.
2. Nirenberg L. *An application of generalized degree to a class of nonlinear elliptic equations* // J. Anal. Math. – 1980. – V. 37. – P. 248–275.
3. Хёрмандер Л. *Линейные дифференциальные операторы с частными производными.* – М.: Мир, 1965. – 379 с.
4. Гилбарг Д., Трудингер Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* – М.: Наука, 1989. – 463 с.
5. Звягин В.Г., Ратинер Н.М. *Степень вполне непрерывных возмущений фредгольмовых отображений и ее приложение к бифуркации решений* // ДАН УССР. Сер. А. – 1989. – № 6. – С. 8–11.
6. Звягин В.Г., Ратинер Н.М. *Ориентированная степень фредгольмовых отображений неотрицательного индекса и ее приложения к задаче о глобальной бифуркации решений* // Алгебр. вопр. анализа и топологии. Новое в глобальном анализе. – Воронеж, 1990. – С. 3–17.
7. Zvyagin V.G., Ratiner N.M. *Oriented degree of Fredholm maps of non-negative index and its application to global bifurcation of solutions* // Lect. Notes Math. – 1992. – V. 1520. – P. 111–137.
8. Ратинер Н.М. *О C^0 оценках для нелинейных эллиптических уравнений* // Тр. матем. ф-та Воронеж. ун-та. – 1996. – С. 72–75.
9. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* – М.: Наука, 1964. – 538 с.
10. Ниренберг Л. *Некоторые вопросы теории линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных* // УМН. – 1963. – Т. 18. – Вып. 4. – С. 101–118.
11. Трибель Х. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* – М.: Мир, 1980. – 664 с.
12. Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach spaces.* I. *Sequence spaces* // Ergeb. Math. – 1977. – V.92. – № XIII. – 190 p.

Воронежский государственный университет

Поступила
30.11.1998