ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 11 (522)

УДК 517.947

Г.А. СВИРИДЮК, В.В. ШЕМЕТОВА

ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В работе [1] рассмотрена задача Коши-Дирихле для уравнения

$$u_t - \chi u_{xxt} = \nu u_{xx} - u u_x \tag{0.1}$$

при условии $\chi, \nu \in \mathbb{R}_+$. Уравнение (0.1) является одномерным аналогом системы Осколкова [2] и представляет собой гибрид уравнений Бенджамина–Бона–Махони и Бюргерса [3]. Система Осколкова

$$(1-\chi\bigtriangledown^2)u_t = \nu \bigtriangledown^2 u - (u\cdot\bigtriangledown)u - \bigtriangledown p + f, \quad \bigtriangledown \cdot u = 0$$

описывает динамику несжимаемой вязкоупругой жидкости Кельвина–Фойгта. В одномерном случае уравнение (0.1) моделирует течение вязкоупругой несжимающей жидкости по трубе. Наше внимание будет занимать случай, когда жидкость течет по трубопроводам.

Пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V};\mathfrak{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ — множество дуг, причем каждая дуга имеет длину $l_j > 0$ и ширину $d_j > 0$. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим задачу с краевыми

$$u_j(0,t) = u_k(l_k,t), \quad E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i) \cup E^{\omega}(V_i), \tag{0.2}$$

$$\sum_{E_j \in E^{\alpha}(V_i)} d_j u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^{\omega}(V_i)} d_k u_{kx}(l_k,t) = 0 \tag{0.3}$$

и начальными

$$u_j(x,0) = u_{0j}(x), \quad x \in (0,l_j), \tag{0.4}$$

условиями для уравнений

$$u_{jt} - \chi u_{jxxt} = \nu u_{jxx} - u_j u_{jx}, \quad x \in (0,l_j), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{0.5}$$

Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i. Условие (0.2) требует, чтобы решения были непрерывными на вершинах графа, а условие (0.3) — аналог условия Кирхгоффа — в случае, когда граф $\mathbf{G}$ состоит из единственной нециклической дуги, превращается в условие Неймана.

Начально-краевые задачи для уравнений в частных производных, заданных на графе, начали изучать сравнительно недавно [4], [5]. К настоящему времени аспекты, в которых изучаются эти уравнения, становятся все более разнообразными [6], [7]. В [8] на графе впервые было рассмотрено уравнение соболевского типа. Целью данной статьи является изучение однозначной разрешимости задачи (0.2)–(0.5) с использованием подхода, изложенного в [8]. Уравнения соболевского типа составляют обширную область математики. О прогрессе в этой области можно судить по монографиям [9]–[12]. В отличие от цитируемых работ наш подход заключается в использовании метода фазового пространства, базирующегося на теории относительно σ-ограниченных операторов и вырожденных аналитических групп операторов [13]. Все необходимые сведения об относительно σ-ограниченных операторах взяты из [13] и повторены в [14], опубликованной в предыдущем номере журнала.

Статья кроме вводной части содержит три параграфа и список литературы. В первом параграфе приводятся результаты о разрешимости задачи Коши

$$u(0) = u_0 \tag{0.6}$$

для полулинейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u), \tag{0.7}$$

основанные на результатах работы [15]. Во втором параграфе проводится редукция задачи (0.2)–(0.5) к задаче (0.6), (0.7). Третий посвящен основному результату статьи — описанию фазового пространства задачи (0.2)–(0.5). Отметим, что данный результат даже в случае, когда граф состоит из единственной нециклической дуги, не совпадает с результатом работы [16].

1. Квазистационарные траектории

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ (т. е. линейны и непрерывны), $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Рассмотрим задачу Коши (0.6) для полулинейного уравнения соболевского типа (0.7). Вектор-функцию $u \in C^\infty((-T, T); \mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (0.7) при некотором $T \in \mathbb{R}_+$, назовем *решением* этого *уравнения*. Решение $u = u(t)$ уравнения (0.7) называется *решением задачи* (0.6), (0.7), если оно удовлетворяет условию (0.6) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Как показывают приведенные ниже два примера, при изучении задачи (0.6), (0.7) могут встретиться следующие трудности. В первом примере

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -x^2 \end{pmatrix}$$

задача (0.6), (0.7) при $u = \mathrm{col}(x, y)$, $u_0 = \mathrm{col}(0, 0)$ неразрешима, а во втором

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x^2 \end{pmatrix}$$

имеет два решения: стационарное $u(t) = \mathrm{col}(0; 0)$ и $u(t) = \mathrm{col}(t/2; t^2/4)$.

Для того чтобы обойти эти неприятности, в [15] предложено ограничиться так называемыми *квазистационарными траекториями*, т. е. теми решениями уравнения (0.7), которые лежат в множестве

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - Q)(Mu + N(u)) = 0\}.$$

Квазистационарными они названы потому, что обобщают понятие стационарной траектории. Здесь Q — проектор [13], а понятие “лежать” означает, что решение принадлежит множеству $\mathfrak{M}$ как траектория, но не как точка (т. е. $u(t) \in \mathfrak{M}$ при каждом $t \in (-T; T)$). Заметим, что если ∞ — полюс порядка нуль L-резольвенты оператора M, то все решения уравнения (0.7) с необходимостью должны лежать в множестве $\mathfrak{M}$, и если $u_0 \notin \mathfrak{M}$, то решение задачи (0.6), (0.7) не существует.

Пусть точка $u_0 \in \mathfrak{M}$. Назовем множество $\mathfrak{M}$ *банаховым C^∞-многообразием в точке* $u_0 \in \mathfrak{M}$, если существуют окрестности $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{O}^1 \subset \mathfrak{U}^1$ точек u_0 и $u_0^1 = Pu_0$ соответственно, и существует C^∞-диффеоморфизм $D : \mathfrak{O}^1 \to \mathfrak{O}$ такой, что D^{-1} есть сужение на $\mathfrak{O}$ проектора P [13]. Немного отходя от стандарта ([17], с. 31), назовем пару $(D, \mathfrak{O}^1)$ *картой*. Множество $\mathfrak{M}$ называется *банаховым C^∞-многообразием*, моделируемым пространством $\mathfrak{U}^1$, если в каждой своей точке оно имеет карту. Связное банахово C^∞-многообразие называется *простым*, если любой его атлас эквивалентен атласу, содержащему единственную карту.

Теорема 1.1. *Пусть оператор M (L, σ)-ограничен, причем ∞ — полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ L-резольвенты оператора M, а оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Пусть в точке u_0 множество $\mathfrak{M}$ является банаховым C^∞-многообразием. Тогда для некоторого $T \in \mathbb{R}_+$ существует единственное решение $u \in C^\infty((-T, T); \mathfrak{M})$ задачи* (0.6), (0.7).

Доказательство. Обозначим через D'_{u^1} производную Фреше оператора $D \in C^\infty(\mathfrak{O}^1;\mathfrak{O})$ в точке $u^1 \in \mathfrak{O}^1$. Очевидно, $D'_{u^1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1; T_u\mathfrak{M})$, где $T_u\mathfrak{M}$ — касательное к $\mathfrak{M}$ пространство в точке $u = D(u^1)$. В силу (L,σ)-ограниченности оператора M уравнение (0.7) можно расщепить на два уравнения [13]:

$$H\dot{u}^0 = u^0 + M_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)N(u),$$
$$\dot{u}^1 = Su^1 + L_1^{-1}QN(u),$$

где $u^1 = Pu$, $u^0 = u - u^1$. Подействуем оператором D'_{u^1} на обе части второго уравнения слева, получим

$$\dot{u} = A(u), \tag{1.1}$$

где оператор $A : u \to D'_{P_u}SPu + D'_{P_u}L_1^{-1}QN(u)$, $u \in \mathfrak{O}$. По построению оператор $A \in C^\infty(\mathfrak{O}; T\mathfrak{M})$, где $T\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{u\in\mathfrak{O}} T_u\mathfrak{M}$ — касательное расслоение $\mathfrak{O}$. Однозначная разрешимость (при некотором $T \in \mathbb{R}_+$) задачи (0.6), (1.1) — классический результат ([17], с. 80). Понятно, что полученное таким способом решение $u \in C^\infty((-T,T);\mathfrak{O})$ является решением задачи (0.6), (0.7). $\square$

2. Постановка задачи

Для редукции задачи (0.2)–(0.5) к задаче (0.6), (0.7) введем множество

$$\mathbf{L}_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\},$$

которое является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle g, h\rangle = \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j(x)h_j(x)\,dx.$$

Множество

$$\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in W_2^1(0, l_j),\ \text{и выполнено (0.2)}\}$$

является банаховым пространством с нормой

$$\|u\|^2_{\mathfrak{U}} = \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u^2_{jx}(x) + u^2_j(x))\,dx.$$

В силу теорем вложения Соболева пространство $W_2^1(0, l_j)$ состоит из абсолютно непрерывных функций, а значит, пространство $\mathfrak{U}$ корректно определено, плотно и компактно вложено в $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$. Отождествим $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ со своим сопряженным, и через $\mathfrak{F}$ обозначим сопряженное относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ пространство к $\mathfrak{U}$. Очевидно, $\mathfrak{F}$ — банахово пространство, причем вложение $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ компактно.

Формулами

$$\langle Lu, v\rangle = \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_jv_j + \chi u_{jx}v_{jx})\,dx, \quad \langle Mu, v\rangle = -\nu \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_{jx}v_{jx}\,dx \quad \forall u, v \in \mathfrak{U}$$

зададим линейные операторы $L, M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$. Введем также оператор

$$\langle N(u), v\rangle = -\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_ju_{jx}v_j\,dx \quad \forall u, v \in \mathfrak{U}.$$

Лемма 2.1. (i) *При всех $\chi, \nu \in \mathbb{R}/\{0\}$ операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ и фредгольмовы.*

(ii) *Спектр оператора L вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к точке $-\infty$.*

Доказательство ввиду простоты опускается.

Лемма 2.2. (i) *При любых* $\chi,\nu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *оператор* M (L,σ)*-ограничен, причем* ∞ *— полюс порядка нуль.*

(ii) *Оператор* $N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

Доказательство. Пусть $\{\lambda_k\}$ — собственные значения оператора Лапласа для данной задачи, занумерованные по невозрастанию с учетом их кратности. Пусть $\{\varphi_k\}$ — соответствующие им собственные функции, ортонормированные в смысле $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$. Если $\chi^{-1}\notin\{\lambda_k\}$, то существует оператор $L^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$ и утверждение леммы очевидно.

Пусть $\chi^{-1}\in\{\lambda_k\}$, тогда $\ker L = \operatorname{span}\{\varphi_l : \chi^{-1}=\lambda_l\}$. Возьмем вектор $\varphi\in\ker L\setminus\{0\}$, т. е.

$$\varphi = \sum_{\chi^{-1}=\lambda_l} a_l\varphi_l, \quad \sum_{\chi^{-1}=\lambda_l}|a_l|>0.$$

Поскольку

$$M\varphi = \nu\chi^{-1}\sum_{\chi^{-1}=\lambda_l} a_l\varphi_l \notin \operatorname{im} L,$$

т. е. вектор φ не имеет M-присоединенных векторов, значит, имеет место утверждение (i) леммы. Утверждение (ii) леммы следует из двух соотношений:

$$\langle N'_u v, w\rangle = -\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j\int_0^{l_j} u_j v_{jx} w_j\,dx - \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j\int_0^{l_j} v_j u_{jx} w_j\,dx,$$

$$\langle N''_u(a,b),c\rangle = -2\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j\int_0^{l_j} a_j b_{jx} c_j\,dx$$

и непрерывности вложения $W_2^1(0,l_j)\subset C[0,l_j]$. $\square$

Нетрудно видеть, что в данной ситуации L-спектр оператора M имеет вид

$$\sigma^L(M) = \left\{\frac{\nu\lambda_k}{1-\chi\lambda_k} : k\in\mathbb{N}\setminus\{l:\chi^{-1}=\lambda_l\}\right\}.$$

Поэтому можно построить проекторы

$$P = \begin{cases}\mathbb{I}, & \chi^{-1}\notin\{\lambda_k\},\\ \mathbb{I}-\sum\limits_{\chi^{-1}=\lambda_l}\langle\,\cdot\,,\varphi_k\rangle\varphi_k, & \chi^{-1}\in\{\lambda_k\};\end{cases} \quad Q = \begin{cases}\mathbb{I}, & \chi^{-1}\notin\{\lambda_k\},\\ \mathbb{I}-\sum\limits_{\chi^{-1}=\lambda_l}\langle\,\cdot\,,\varphi_k\rangle\varphi_k, & \chi^{-1}\in\{\lambda_k\}.\end{cases}$$

(Несмотря на внешее сходство, отметим, что проекторы P и Q действуют в разных пространствах и потому не равны друг другу.) Значит, множество $\mathfrak{M}$ можно представить в виде

$$\mathfrak{M} = \begin{cases}\mathfrak{U}, \chi^{-1}\notin\{\lambda_k\},\\ \{u\in\mathfrak{U} : \langle Mu+N(u),\varphi_k\rangle = 0,\ \chi^{-1}=\lambda_k\}.\end{cases}$$

Аналогично

$$\mathfrak{U}^1 = \begin{cases}\mathfrak{U}, \chi^{-1}\notin\{\lambda_k\},\\ \{u\in\mathfrak{U} : \langle u,\varphi_k\rangle = 0,\ \chi^{-1}=\lambda_k\}.\end{cases}$$

Очевидно, в данном случае все решения задачи (0.6), (0.7) являются квазистационарными траекториями и лежат в множестве $\mathfrak{M}$.

В силу теоремы 1.1 имеет место

Теорема 2.1. *Пусть* $\chi,\nu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *и в точке* u_0 *множество* $\mathfrak{M}$ *является банаховым* C^∞*-многообразием. Тогда для некоторого* $T\in\mathbb{R}_+$ *существует единственное решение* $u\in C^\infty((-T,T);\mathfrak{M})$ *задачи* (0.6), (0.7).

Замечание 2.1. Пусть $u \in \mathfrak{U}$, тогда $u = \sum\limits_{\chi^{-1}=\lambda_l} a_l\varphi_l + v$, $v \in \mathfrak{U}^1$, $a_l \in \mathbb{R}$. Точка $u \in \mathfrak{M}$ точно тогда, когда

$$\Big\langle v\Big(\sum_{\chi^{-1}=\lambda_l} a_l\varphi_l + v\Big)_{xx} - \Big(\sum_{\chi^{-1}=\lambda_l} a_l\varphi_l + v\Big)\Big(\sum_{\chi^{-1}=\lambda_l} a_l\varphi_l + v\Big)_x, \varphi_k\Big\rangle = 0, \quad \chi^{-1} = \lambda_k.$$

3. Фазовое пространство

Перейдем теперь к описанию фазового пространства задачи (0.6), (0.7). Рассмотрим случай одномерного ядра оператора L. В частности, это имеет место, когда граф состоит из одной нециклической дуги. Система сводится к одному уравнению.

Определение 3.1. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (0.7), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (0.7) лежит в $\mathfrak{P}$, т. е. $u(t) \in \mathfrak{P}$ при каждом $t \in (-T, T)$;
(ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (0.6), (0.7).

Итак, пусть $\ker L = \operatorname{span}\{\varphi_l\}$. Пусть $u \in \mathfrak{U}$, тогда $u = a\varphi_l + v$, $v \in \mathfrak{U}^1$, $a \in \mathbb{R}$. Точка $u \in \mathfrak{M}$ точно тогда, когда

$$a\chi^{-1}\nu - a^2 \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} \varphi_{ljx}\varphi_{lj}^2\,dx + \frac{a}{2}\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} v_j(\varphi_{lj}^2)_x\,dx - \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} v_j v_{jx}\varphi_{lj}\,dx = 0. \quad (3.1)$$

Поскольку $\sum\limits_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} \varphi_{ljx}\varphi_{lj}^2\,dx = 0$, то из (3.1) следует

$$a\Big(\chi^{-1}\nu + \frac{1}{2}\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} v_j(\varphi_{lj}^2)_x\,dx\Big) = \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} v_j v_{jx}\varphi_{lj}\,dx. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) не имеет единственного решения a точно тогда, когда

$$\sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} v_j(\varphi_{lj}^2)_x\,dx = -2\chi^{-1}\nu. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) описывает гиперплоскость, разбивающую пространство $\mathfrak{U}^1$ на два полупространства:

$$\mathfrak{U}^1_+ = \Big\{v \in \mathfrak{U}^1 : \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} v_j(\varphi_{lj}^2)_x\,dx > -2\chi^{-1}\nu\Big\},$$
$$\mathfrak{U}^1_- = \Big\{v \in \mathfrak{U}^1 : \sum_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} v_j(\varphi_{lj}^2)_x\,dx < -2\chi^{-1}\nu\Big\}.$$

Лемма 3.1. *При любых $\chi \in \{\lambda_k^{-1}\}$, $\nu \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ множество $\mathfrak{M}$ является объединением двух простых банаховых C^∞-многообразий, моделируемых пространством $\mathfrak{U}^1$.*

Доказательство. Пусть $v \in \mathfrak{U}^1$ и

$$\delta(v) = v + \frac{2\sum\limits_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} v_j v_{jx}\varphi_{lj}\,dx}{2\chi^{-1}\nu + \sum\limits_{E_j\in\mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} v_j(\varphi_{lj}^2)_x\,dx}\varphi_l.$$

По построению $\delta \in C^\infty(\mathfrak{U}^1_- \cup \mathfrak{U}^1_+; \mathfrak{M})$, $\delta^{-1} = P$. Значит, $\delta : \mathfrak{U}^1_- \cup \mathfrak{U}^1_+ \to \mathfrak{M}$ — искомый C^∞-диффеоморфизм. $\square$

Замечание 3.1. Если $\chi \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_k^{-1}; 0\}$, то множество $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{U}$ и поэтому является простым банаховым C^∞-многообразием.

В силу теоремы 2.1 и лемм 2.1, 2.2 и 3.1 справедлива

Теорема 3.1. *При любых* $\chi, \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *множество* $\mathfrak{M}$ *является фазовым пространством задачи* (0.2)–(0.5).

Литература

1. Осколков А.П., Котсиолис А.А., Щадиев Р.Д. *Нелокальные задачи для одного класса нелинейных диссипативных уравнений типа С.Л.Соболева* // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1992. – Т. 199. – С. 91–113.
2. Осколков А.П. *Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева* // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1991. – Т. 198. – С. 31–48.
3. Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J. *Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems* // Phil. Trans. R. Soc. Lond. – 1972. – V. 272. – A. 1220. – P. 47–78.
4. von Below J. *A maximum principle for semilinear parabolic network equations* // Lect. Notes in Pure and Appl. Math. – 1991. – V. 133. – P. 37–45.
5. Пенкин О.М., Покорный Ю.В. *О некоторых качественных свойствах уравнений на одномерном клеточном комплексе* // Матем. заметки. – 1996. – Т. 59.– № 5. – С. 777–780.
6. Yanagida E. *Stability of nonconstant steady states in reaction–diffusion systems on graphs* // Japan J. Induct. Appl. Math. – 2001. – V. 18. – P. 25–42.
7. Шафаревич А.И. *Дифференциальные уравнения на графах, описывающие асимптотические решения уравнений Навье–Стокса, сосредоточенные в малой окрестности кривой* // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 8. – С. 1119–1130.
8. Свиридюк Г.А. *Уравнения соболевского типа на графах* // Неклассич. уравн. матем. физ. – Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002. – С. 221–225.
9. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative.* – New York: Marcel Dekker, Inc., 2003. – 490 p.
10. Favini A., Yagi A. *Degenerate differential equations in Banach spaces.* – New York: Marcel Dekker, Inc., 1999. – 283 p.
11. Егоров И.Е., Пятков С.Г., Попов С.В. *Неклассические операторно-дифференциальные уравнения.* – Новосибирск: Наука, 2000. – 336 с.
12. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. *Lyapunov–Schmidt method in nonlinear analysis and applications.* – Dordrecht Harbour: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 548 p.
13. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators.* – Utrecht: VSP, 2003. – 179 p.
14. Свиридюк Г.А., Тринеева И.К. *Сборка Уитни фазового пространства уравнения Хоффа* // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 10. – С. 54–60.
15. Свиридюк Г.А. *Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1993. – Т. 57. – № 3. – С. 192–207.
16. Свиридюк Г.А., Анкудинов А.В. *Фазовое пространство задачи Коши–Дирихле для одного неклассического уравнения* // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т.39. – № 11. – С. 1556–1561.
17. Ленг С. *Введение в теорию дифференцируемых многообразий.* – Волгоград: Платон, 1997. – 203 с.

Челябинский государственный университет

Магнитогорский государственный университет

Поступила
10.08.2004