ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 9 (436)

УДК 517.5

В.Э. ГЕЙТ

О ФУНКЦИЯХ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ ВТОРЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Пусть функция $f \in C_{2\pi}$, т.е. f периода 2π и непрерывна на оси $(-\infty,\infty)$. Положим, как обычно, (см., напр., [1], с. 115) для $0 \le \delta \le \pi$

$$\omega_2(f,\delta) = \sup_{|h|\le\delta} \max_x |\Delta_h^2 f(x)|,$$

где вторая разность с шагом h есть

$$\Delta_h^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).$$

Заданную на $[0,\pi]$ функцию $\varphi(\delta)$ называют модулем непрерывности второго порядка, если для некоторой функции $f_\varphi \in C_{2\pi}$

$$\omega_2(f_\varphi,\delta) = \varphi(\delta), \quad 0 \le \delta \le \pi.$$

Например, все первые модули непрерывности суть модули непрерывности второго порядка[1)].

До сих пор не найдено характеристическое свойство модулей непрерывности второго порядка. Известный интерес представляет также задача поиска достаточных условий.

Теорема 1. *Функция $\varphi(\delta)$, $0 \le \delta \le \pi$ является модулем непрерывности второго порядка, если*

(а) $\varphi(0) = 0$;

(б) $\varphi(\delta)$ *не убывает и непрерывна на* $[0,\pi]$;

(в) *в разложении φ по косинусам* $\varphi(x) = A + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ $(0 \le x \le \pi)$ *все коэффициенты* $a_n \le 0$.

Доказательство. Отметим, что разложение (в) заведомо существует, т.к. согласно (б) функция φ имеет ограниченную вариацию на $[0,\pi]$, Далее, в силу (а) из (в) имеем $A = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, поэтому

$$\varphi(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = (-2)\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin^2 n\frac{x}{2}, \quad 0 \le x \le \pi. \tag{1}$$

Теперь в качестве требуемой функции f_φ рассмотрим

$$f_\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{2}$$

Так как $f_\varphi(x) = (\varphi(x) - A)/2$, $0 \le x \le \pi$, то $f_\varphi \in C_{2\pi}$. Для этой функции (см., напр., [2], с. 70) имеем

$$\Delta_h^2 f_\varphi(x) = (-2)\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n(x+h) \sin^2 n\frac{h}{2}.$$

[1)] За $f_\varphi \in C_{2\pi}$ берем четное продолжение $\varphi(\delta)/2$ для $(-\infty,+\infty)$.

Отсюда по предположению $a_n \le 0$ $(n \ge 1)$ с учетом соотношения (1) получаем

$$\|\Delta_h^2 f_\varphi(x)\|_C = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)\sin^2 n\frac{h}{2} = \varphi(|h|). \tag{3}$$

Значит, ввиду возрастания $\varphi(h)$ (см. (б)), $\omega_2(f_\varphi,\delta) = \varphi(\delta)$ $(0 \le \delta \le \pi)$. $\square$

Из теоремы вытекает хорошо известное

Следствие. Если функция $\varphi(\delta)$ при условиях (а), (б) теоремы 1 является выпуклой вверх на $[0,\pi]$, то она есть модуль непрерывности второго порядка.

Доказательство. Четное продолжение функции φ на всю ось с периодом 2π будет, очевидно, выпуклым вверх на $[0,2\pi]$. Тогда по теореме 35 ([3], с. 46) его коэффициенты Фурье неположительны $(n \ge 1)$. Поэтому условие (в) теоремы 1 также имеет место. $\square$

Тот факт, что доказанная теорема 1 не сводится к следствию, подтверждает простейший пример функции $\varphi(\delta) = 1 - \cos\delta$ $(0 \le \delta \le \pi)$. Для нее условия (а), (б), (в) теоремы 1, очевидно, имеют место. Значит, $\varphi(\delta)$ — второй модуль непрерывности, причем не являющийся выпуклой на $[0,\pi]$ функцией.

Нижеследующая теорема 2 показывает, что запас функций, удовлетворяющих условиям теоремы 1, является достаточно широким. Потребуется следующая

Лемма. *Пусть* 1) *функция* $f(x)$ *неотрицательна и суммируема на* $[0,\pi]$; 2) *все ее синус-коэффициенты* $b_n(f) \ge 0$, *тогда первообразная* $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$ $(0 \le x \le \pi)$ *есть второй модуль непрерывности.*

Доказательство. Рассмотрим синус-ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)\sin nx, \quad b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin nt\,dt.$$

По суммируемости f почленным интегрированием имеем для $0 \le x \le \pi$ соотношение

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}b_n(f) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n(f)}{n}\cos nx.$$

Тогда, очевидно, $F(0) = 0$ и F — абсолютно непрерывная функция. Далее, поскольку $f(t) \ge 0$ для $t \in [0,\pi]$, то первообразная $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$ не убывает на $[0,\pi]$. Наконец, ее косинус-коэффициенты неположительны, т. к. все $b_n(f) \ge 0$ по условию 2). $\square$

Теорема 2. *Модулем непрерывности второго порядка является любая функция вида*

$$F(x) = A - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2n-1}\cos(2n-1)x, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{4}$$

где A выбрано из условия $F(0) = 0$, причем

(а) $0 < a_n \downarrow 0$ *при* $n \uparrow \infty$;

(б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n} < +\infty$.

Доказательство. Рассмотрим почленно продифференцированный ряд для $F(x)$, т. е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(2n-1)x. \tag{5}$$

Нетрудно видеть, что он сходится на всей оси, причем его сумма $f(x)$ суммируема на $[0,\pi]$ ввиду предположений (а), (б) (см. также теорему 47 ([3], с. 57)).

Далее, $b_{2n-1}(f) = a_n > 0$, $b_{2n} = 0$ по условию. И т. к. функция (4) является первообразной функции (5), то ввиду леммы остается лишь доказать, что $f(x) \geq 0$ для $x \in [0, \pi]$. В связи с этим выполним преобразование Абеля ряда (5). Тогда, положив $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$ $(n = 1, 2, \dots)$, будем иметь

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta a_n \sum_{j=1}^{n} \sin(2j-1)x. \tag{6}$$

Внутренняя сумма в (6) неотрицательна при $0 < x < \pi$, т. к.

$$2 \sin x \sum_{j=1}^{n} \sin(2j-1)x = \sum_{j=1}^{n} [\cos(j-1)2x - \cos j2x] = 1 - \cos 2nx = 2\sin^2 nx \geq 0.$$

Кроме того, $\Delta a_n \geq 0$ для всех n по предположению (а), так что функция (5) и в самом деле неотрицательна для $x \in [0, \pi]$. $\square$

Лежащую в основе теоремы 2 теорему 1 нетрудно вывести также из следующего результата.

Теорема 3. *Функция $\varphi(\delta)$ $(0 \leq \delta \leq \pi)$ является модулем непрерывности второго порядка, если*

(а) $\varphi(0) = 0$,
(б) *φ не убывает и непрерывна на $[0, \pi]$,*
(в) *четное продолжение $\widehat{\varphi}$ периода 2π для φ удовлетворяет условию*

$$|\Delta_h^2 \widehat{\varphi}(x)| \leq 2\varphi(|h|) \quad (|x| < +\infty, \ \ |h| \leq \pi). \tag{7}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f_\varphi(x) = \widehat{\varphi}(x)/2$. Тогда $f_\varphi \in C_{2\pi}$, причем по предположению (7) и при помощи (б) будем иметь

$$\omega_2(f_\varphi, \delta) = \omega_2(\widehat{\varphi}/2, \delta) \leq \varphi(\delta), \quad 0 \leq \delta \leq \pi. \tag{8}$$

Обратное неравенство вытекает из следующего утверждения: четное периода 2π продолжение $\widehat{\varphi}$ на $(-\infty, +\infty)$ всякой функции $\varphi(\delta) \geq 0$ $(0 \leq \delta \leq \pi)$, $\varphi(0) = 0$ обладает свойством

$$\omega_2(\widehat{\varphi}, \delta) \geq 2\varphi(\delta), \quad 0 \leq \delta \leq \pi. \tag{9}$$

В самом деле, для $0 \leq \delta \leq \pi$ имеем сначала очевидное неравенство

$$\omega_2(\widehat{\varphi}, \delta) \geq \max_x |\widehat{\varphi}(x + 2\delta) - 2\widehat{\varphi}(x + \delta) + \widehat{\varphi}(x)|.$$

Взяв здесь $x = -\delta$, с учетом свойств $\varphi(0) = 0 \leq \varphi(\delta)$ получим (9)

$$\omega_2(\widehat{\varphi}, \delta) \geq |\widehat{\varphi}(\delta) + \widehat{\varphi}(-\delta)| = 2\varphi(\delta).$$

Значит, $\omega_2(f_\varphi, \delta) \geq \varphi(\delta)$ $(0 \leq \delta \leq \pi)$. Тогда ввиду (8) теорема 3 доказана. Вопрос о возможности ее обращения остается пока нерешенной задачей.

Отметим в заключение, что библиографию и обзор результатов по модулям непрерывности различных порядков можно найти в [4] (см. § 2).

Литература

1. Тиман А.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
2. Гейт В.Э. *Теоремы вложения для некоторых классов периодических непрерывных функций* // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 4. – С. 67–77.
3. Харди Г.Х., Рогозинский В.В. *Ряды Фурье.* – М.: Физматгиз, 1962. – 156 с.
4. Шевчук И.А. *Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций.* – Киев: Наукова думка, 1992. – 225 с.

Челябинский государственный университет

Поступила 12.01.1996