Министерство образования и науки Российской Федерации

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность: 010101.65 – Математика

Специализация: Дифференциальные уравнения

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА НА ТЕМУ:

(Дипломная работа)

«Метод преобразования Карлемана-Фурье в одной сверточной алгебре»

Работа завершена:

«____» _____ 2014 г. _____ (Р. Х. Муртазина)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук, доцент

«____» _____ 2014 г. _____ (Л. Г. Салехов)

Заведующий кафедрой:
доктор физико-математических наук, профессор

«____» _____ 2014 г. _____ (Ю. В. Обносов)

Казань – 2014

Содержание

1. Введение

3

2. Цель работы. План.

4

3. Теоретические сведения

5

4. Примеры.

8

5. Уравнение $\mathscr{Y}(\mathbf{t})\frac{\mathbf{t^{n-1}}}{\mathbf{(n-1)!}} * \mathbf{E}(\mathbf{t}) = \delta(\mathbf{t})$.

13

6.Уравнение $\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_k}[\mathscr{Y}(\mathbf{t})]^{*\mathbf{k}} * \mathbf{U} = \mathbf{W}$.

15

7. Примеры.

17

8. Дополнительный материал по преобразованию Карлемана-Фурье и преобразованию Фурье.

21

9. Список использованной литературы.

23

Введение

В математической физике используются достижения математики. Одно из достижений - теория обобщенных функций. Начало этой теории принадлежит советскому математику С.Л. Соболеву. В 1936 году в своей работе он применил обобщенные функции для исследования задачи Коши для гиперболических уравнений. Многие математики, опираясь на его теорию, создавали свою, тем самым развивали теорию обобщенных функций.

В дипломной работе я буду рассматривать свертки обобщенных функций, сверточные алгебры, уравнения сверток в сверточных алгебрах. А в качестве аппарата исследования возьмем преобразование Карлемана-Фурье, а также теорию уравнения сверток в пространстве обобщенных функций медленного рост, так как в этом пространстве преобразование Карлемана-Фурье привлекается как метод отыскания элементарных решений уравнений сверток.

Целью работы является ознакомление со сверточной алгеброй, с преобразованием Карлемана-Фурье. Объяснить теорию решения уравнения сверток в $\mathscr{S}'_+$ с применением преобразования Карлемана-Фурье и привлечь эту теорию к решению задач.

План

1) Напомнить определение сверточной алгебры и модулей.
2) Определение сверточной алгебры $\mathscr{S}'_+$.
3) Напомнить теорию уравнений сверток в пространстве обобщенных функций.
4) Преобразование Карлемана-Фурье.
5) Применения преобразования Карлемана-Фурье.

Метод преобразования Карлемана-Фурье в одной сверточной алгебре

Из курса "У.Ч.П."известно, что пространство $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ обобщенных функций на оси $\mathbb{R}$ с носителями в $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty]$, снабженное операцией свертка, является **сверточной алгеброй**, т.е. векторным пространством с операцией свертка, при этом свертка является внутренним законом композиции в $\mathscr{D}'_+$ и обладает свойством коммутативности и ассоциативности.

Свертка элементов S и $T \in \mathscr{D}'_+$ определяется по формуле :

$$< \mathbf{S} * \mathbf{T}, \varphi >:=< \mathbf{S} \otimes \mathbf{T}, \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) >:=< \mathbf{S}(\mathbf{x}), < \mathbf{T}(\mathbf{y}), \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) >>=$$

$$=< \mathbf{T}(\mathbf{y}), < \mathbf{S}(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) >>, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$$

Пространство $\mathscr{S}'_+(\mathbb{R})$ обобщенных функций медленного(умеренного) роста на бесконечности есть подпространство из $\mathscr{D}'_+(\mathbb{R})$ и снабженное операцией - свертка, также является сверточной алгеброй.

В этой сверточной алгебре $\mathscr{S}'_+$ рассматривается уравнение сверток:

$$A * X = W, \qquad (\mathbf{1})$$

где A и W - заданные обобщенные функции из $\mathscr{S}'_+$, а X - искомая обобщенная функция из $\mathscr{S}'_+$.

Из теории уравнения сверток в сверточных алгебрах известно, если E - элементарное решение уравнения (1), принадлежащее сверточной алгебре $\mathscr{S}'_+$, т.е. $E = A^{-1} \in \mathscr{S}'_+$, то у уравнения (1) существует, и притом единственное, решение в этой алгебре и оно имеет вид:

$$X = E * W \qquad (\mathbf{2})$$

Поэтому решение уравнения (1) сводится к построению элементарного решения уравнения (1), принадлежащего сверточной алгебре $\mathscr{S}'_+$.

В зависимости от конкретных ситуаций существуют различные методы построения элементарных решений.

Остановимся на методе, основанном на **преобразование Карлемана-Фурье (или обобщенное преобразование Фурье)** в пространстве обобщенных функций $\mathscr{S}'$ медленного(умеренного) роста.

Пусть $f(t)$ - **функция медленного роста на оси $\mathbb{R}$,** т.е. непрерывная функция, растущая на бесконечности не быстрее полинома. Тогда **преобразование Карлемана-Фурье функции $f(t)$ определяется по формуле**:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(f(t))(z) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{2\pi i t z} f(t)dt, & Imz > 0 \\ -\int_{-\infty}^0 e^{2\pi i t z} f(t)dt, & Imz < 0 \end{cases} \qquad (\mathbf{3})$$

а **обратное преобразование Карлемана-Фурье** есть:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}^{-1}(f(t))(z) = \begin{cases} \int_{-\infty}^0 e^{-2\pi i t z} f(t)dt, & Imz > 0 \\ -\int_0^\infty e^{-2\pi i t z} f(t)dt, & Imz < 0 \end{cases} \qquad (\mathbf{4})$$

Пусть теперь **T есть обобщенная функция медленного роста**. Тогда известна структура обобщенной функции медленного роста, т.е. если $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, то она имеет вид:

$$T = \frac{d^m}{dt^m} f(t),$$

где $\frac{d^m}{dt^m}$ - производная, в смысле обобщенных функций, конечного порядка m, от функции $f(t)$ медленного роста.

А тогда **преобразование Карлемана-Фурье от** $\mathbf{T} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ **определяется по формуле**:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathbf{T})(\mathbf{z}) = (-\mathbf{2}\pi\mathbf{iz})^{\mathbf{m}}\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathbf{f}(\mathbf{t}))(\mathbf{z}) \qquad (\mathbf{5})$$

Обратное преобразование Карлемана-Фурье для $\mathbf{T} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ **имеет вид**:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}^{-\mathbf{1}}(\mathbf{T})(\mathbf{z}) = (-\mathbf{2}\pi\mathbf{iz})^{\mathbf{m}}\mathscr{K}\mathscr{F}^{-\mathbf{1}}(\mathbf{f}(\mathbf{t}))(\mathbf{z}),$$

если $T = \frac{d^m}{dt^m} f(t)$.

Рассмотрим пример.

Пусть $T = \delta$- мера Дирака, где $T = \frac{d^m}{dt^m}\mathscr{Y}(t)$. Следовательно:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(\delta)(z) = (-2\pi iz)\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{Y}(t))(z) = 1, \qquad Imz > 0.$$

Откуда:

$$\mathscr{F}(\delta)(\xi) = \mathscr{K}\mathscr{F}(\delta)^+(\xi) - 0 = 1, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Обратно, пусть $f(t) = 1$. Найдем $\mathscr{K}\mathscr{F}^{-1}(1)(z)$. Имеем:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}^{-1}(1)(z) = -\frac{1}{2\pi iz}, \quad Imz \neq 0 = \hat{\delta}(z),$$

и получаем, что :

$$\mathscr{F}^{-1}(1)(\xi) = \delta(\xi), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Пробуем рассуждать без элементарного решения! Рассмотрим алгоритм нахождения решения уравнения сверток (1) в пространстве $\mathscr{S}'_+$. Применяя преобразование Карлемана-Фурье и учитывая, что оно является аналитическим представлением для преобразования Фурье, а аналитическое представление определяется с точностью до аддитивной произвольной целой аналитической функции $\mathscr{P}(z)$, имеем:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(A)^+(z) \cdot \mathscr{K}\mathscr{F}(X)^+(z) = \mathscr{K}\mathscr{F}(W)^+(z) + \mathscr{P}(z), \qquad Imz > 0$$

отсюда находим:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(X)^+(z) = \frac{1}{\mathscr{K}\mathscr{F}(A)^+(z)} \cdot \{\mathscr{K}\mathscr{F}(W)^+(z) + \mathscr{P}(z)\}, \qquad Imz > 0 \qquad (\mathbf{6})$$

Для того,чтобы представление (6) было аналитическим представлением для $\mathscr{K}\mathscr{F}(X)(\xi)$ необходимо выполнить следующее условие:

1)Убрать возможные полюсы в $\{Imz > 0\}$, которые могут появиться за счет нулей функции $\mathscr{K}\mathscr{F}(A)(z)$ в $\{Imz > 0\}$.

Выполнив это условие, получим аналитическое представление для $\mathscr{F}(X)(\xi)$, т.е.

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(X)^{+}(z) = H^{+}(z), \qquad Imz > 0 \qquad (\mathbf{7}),$$

где $H^{+}(z)$ - аналитическая функция в $(Imz > 0)$, полученная из правой части формулы (6) после выполнения указанного выше условия.

А тогда формула (7) имеет образ Фурье $\mathscr{F}(X)(\xi)$:

$$< \mathscr{F}(X)(\xi), \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} H^{+}(\xi + i\varepsilon) \cdot \varphi(\xi) d\xi, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}$$

Откуда: $X = \overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F}X)(t)$

Примеры.

$\mathbf{1^0}$) Рассмотрим уравнение в $\mathscr{S}'_+ : \mathscr{Y}(t) * X = \delta(t)$

Найдем $\mathscr{K}\mathscr{F}(\delta)^+(z) = ?$
1) Так как $\delta(t) = \frac{d}{dt}\mathscr{Y}(t)$, то

$$\mathscr{K}\mathscr{F}^+(\delta) = (-2\pi iz) \cdot \int_0^\infty e^{2\pi itz} dt = (-2\pi iz)\frac{1}{2\pi iz}\, e^{2\pi itz}\Big|_0^\infty = 1,$$

итак

$$\mathscr{K}\mathscr{F}^+(\delta)(z) = 1,$$

где $Imz > 0$
2)

$$\mathscr{K}\mathscr{F}^+(\mathscr{Y})(z) = \int_0^\infty e^{2\pi itz} dt = \frac{1}{2\pi iz}\, e^{2\pi itz}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{2\pi iz}, \qquad Imz > 0.$$

Тогда преобразование Карлемана-Фурье от исходного уравнения будет иметь вид:

$$-\frac{1}{2\pi iz} \cdot \mathscr{K}\mathscr{F}^+(X)(z) = 1 + P(z),$$

где $Imz > 0$, $\quad P(z)$- произвольный полином.

Откуда:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}^+(X)(z) = -2\pi iz - 2\pi izP(z), \qquad Imz > 0$$

или:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}^+(X)(z) = -2\pi iz + P_1(z), \qquad Imz > 0,$$

где $P_1(z)$ - произвольный полином.

Тогда $\mathscr{F}(X)(\xi) = \lim_{\eta\to+\infty} \mathscr{K}\mathscr{F}^+(X)(\xi + i\eta) = -2\pi i\xi$,

$$X = \overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}(X) = \delta'(t) \in \mathscr{S}'_+$$

$\mathbf{2^0}$) Рассмотрим уравнение в $\mathscr{S}'_+$:

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) X = W \in \mathscr{S}'_+ \qquad (\mathbf{I})$$

где $P\left(\frac{d}{dt}\right)$ - дифференциальный полином с постоянными коэффициентами.
$P\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d^m}{dt^m} + c_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + ... + c_{m-1}\frac{d}{dt} + c_m = \sum_{k=0}^m c_k \frac{d^{m-k}}{dt^{m-k}}$, где $c_0 = 1$. Найдем образ Карлемана-Фурье для уравнения (I). Рассмотрим обобщенную функцию $\frac{d^k\delta}{dt^k}, \forall k \in \mathbb{N}$. Так как $\frac{d^k\delta}{dt^k} = \frac{d^{k+1}\delta}{dt^{k+1}}\mathscr{Y}(t)$, то:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}\left(\frac{d^k\delta}{dt^k}\right)^+(z) = (-2\pi iz)^{k+1}\int_0^\infty e^{2\pi itz} dt = (-2\pi iz)^{k+1}\frac{1}{2\pi iz}\, e^{2\pi itz}\Big|_0^\infty =$$

$$= (-2\pi iz)^{k+1}\left(-\frac{1}{2\pi iz}\right) = (-2\pi iz)^k, \qquad Imz > 0$$

Тогда образ Карлемана-Фурье для (I) будет иметь вид:

$$\sum_{k=0}^{m} c_k(-2\pi iz)^{m-k} \cdot \mathscr{K}\mathscr{F}(X)^+(z) = \mathscr{K}\mathscr{F}(W)^+(z), \qquad Imz > 0 \qquad (\mathbf{II})$$

А поскольку образ Карлемана-Фурье есть аналитическое представление для образа Фурье, то аналитическое представление для образа Фурье уравнения (I) в $Imz > 0$ будет иметь вид:

$$\sum_{k=0}^{m} c_k(-2\pi iz)^{m-k} \cdot \mathscr{K}\mathscr{F}(X)^+(z) = \mathscr{K}\mathscr{F}(W)^+(z) + P(z), \qquad Imz > 0.$$

Это алгебраическое уравнение относительно $\mathscr{K}\mathscr{F}(X)^+(z)$ в $Imz > 0$, где $P(z)$-произвольный полином.

Разрешая его относительно $\mathscr{K}\mathscr{F}(X)^+(z)$, имеем:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(X)^+(z) = \frac{1}{M(z)}\left\{\mathscr{K}\mathscr{F}(W)^+(z) + P(z)\right\}, \qquad Imz > 0 \qquad (\mathbf{III})$$

где $M(z) = \sum_{k=0}^{m} c_k(-2\pi iz)^{m-k}$

Для того, чтобы формула (III) была аналитическим представлением для образа Фурье $\mathscr{F}(X)(\xi)$ необходимо выполнить следующее условие: убрать возможные полюсы в $Imz > 0$, которые могут появляться за счет нулей полинома M(z) в $Imz > 0$.

Это условие дает возможность определить некоторые произвольные коэффициенты полинома P(Z), и его степень.

При отсутствии нулей у полинома M(z) в $Imz > 0$, степень полинома P(z) должна быть не выше (m-1), а коэффициенты произвольны.

Выполнив указанное условие, представление (III) будет аналитическим представлением образа Фурье $\mathscr{F}(X)(\xi)$.

Откуда переходя к пределу в смысле обобщенных функций в $\mathscr{S}'$ при $Imz > 0$ имеем:

$$< \mathscr{F}(X)(\xi), \varphi(\xi) >= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\mathbb{R}} H^+(\xi + i\varepsilon)\varphi(\xi)d\xi, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S},$$

или

$$\mathscr{F}(X)(\xi) = H^+(\xi), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R},$$

где равенство понимается в смысле обобщенных функций из $\mathscr{S}'$ и $H^+(z)$ есть правая часть формулы (III), после выполнения указанного выше условия.
Откуда, применяя копреобразование Фурье $\overline{\mathscr{F}}$ в $\mathscr{S}'$, получим решение уравнения:

$$\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \overline{\mathscr{F}}(\mathbf{H}^+)(\mathbf{t})$$

3⁰) Найти частное решение уравнения: $\frac{d^2U}{dt^2} + \omega^2 U = \delta(t)$, принадлежащее $\mathscr{S}'_+$.
Применяя преобразование Карлемана-Фурье к уравнению, получаем

$$\{(-2\pi iz)^2 + \omega^2\} \cdot \mathscr{K}\mathscr{F}(U)^+(z) = 1, \qquad Imz > 0$$

откуда

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(U)^{+}(z) = -\frac{1}{4\pi^2 z^2 - \omega^2}, \qquad Imz > 0.$$

Тогда

$$\mathscr{F}(U)(\xi) = \frac{1}{2\omega i}\left\{\delta_+\left(\xi + \frac{\omega}{2\pi}\right) - \delta_+\left(\xi - \frac{\omega}{2\pi}\right)\right\}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Следовательно:

$$U = \overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}(U) = \frac{1}{2\omega i}\left\{\mathscr{Y}(t)e^{i\omega t} - \mathscr{Y}e^{-i\omega t}\right\} = \frac{\mathscr{Y}(t)}{\omega}\sin\omega t.$$

N.B. Отметим, что U есть элементарное решение оператора $\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)$, принадлежащее сверточной алгебре $\mathscr{S}'_+$.

Следовательно, существует единственное решение уравнения в сверточной алгебре $\mathscr{S}'_+$:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega^2 X = W, \qquad W \in \mathscr{S}'_+$$

которое имеет вид:

$$X = \frac{\mathscr{Y}(t)}{\omega}\sin\omega t * W$$

4⁰) Найдем общее решение уравнения, применяя преобразование Карлемана-Фурье:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \omega^2 X = 0$$

Имеем аналитическое представление для преобразования Фурье:

$$(4\pi^2 z^2 - \omega^2)\widehat{\mathscr{F}(X)}(z) = P(z), \qquad Imz \neq 0,$$

где P(z) - произвольный полином.Откуда:

$$\widehat{\mathscr{F}(X)}(z) = \frac{b_0}{-2\pi i\left(z + \frac{\omega}{2\pi}\right)} + \frac{b_1}{-2\pi i\left(z - \frac{\omega}{2\pi}\right)}, \qquad Imz \neq 0,$$

где b_0 и b_1 произвольные константы.Тогда

$$\mathscr{F}(X)(\xi) = b_0\tau_{-\frac{\omega}{2\pi}}\delta(\xi) + b_1\tau_{\frac{\omega}{2\pi}}\delta(\xi)$$

Откуда

$$X(t) = b_0 e^{i\omega t} + b_1 e^{-i\omega t}$$

5⁰) $\frac{d^2U}{dt^2} - \omega^2 U = \delta(t)$. Применяя преобразование Карлемана-Фурье, решить уравнение в $\mathscr{S}'_+$.

$$\left\{(-2\pi i z)^2 - \omega^2\right\}\mathscr{K}\mathscr{F}(U)^{+}(z) = 1, \quad Imz > 0$$

откуда:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(U)^{+}(z) = -\frac{1}{4\pi^2 z^2 + \omega^2} = -\frac{1}{4\pi^2\left[z^2 + \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2\right]} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\left\{\frac{1}{\left(z+\frac{i\omega}{2\pi}\right)}\cdot\left(-\frac{i\omega}{\pi}\right)^{-1}+\frac{1}{\left(z-i\frac{\omega}{2\pi}\right)}\cdot\frac{1}{\frac{i\omega}{\pi}}\right\}=$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\cdot\frac{\pi}{i\omega}\left\{\frac{1}{z-i\frac{\omega}{2\pi}}-\frac{1}{z+i\frac{\omega}{2\pi}}\right\}, \quad Imz>0.$$

То есть

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(U)^+(z) = -\frac{1}{4\pi i\omega}\left\{\frac{1}{z-i\frac{\omega}{2\pi}}-\frac{1}{z+i\frac{\omega}{2\pi}}\right\}, \quad Imz>0.$$

N.B. Но в $Imz>0$ имеется простой полюс, его необходимо убрать. Это можно сделать, прибавив решение соответственного однородного уравнения: $\frac{1}{4\pi i\omega}\frac{1}{z-i\frac{\omega}{2\pi}}, \quad Imz\neq 0$. Тогда получим:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(U)(z) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi i\omega}\cdot\frac{1}{z+i\frac{\omega}{2\pi}}, & Imz>0 \\ \frac{1}{4\pi i\omega}\cdot\frac{1}{z-i\frac{\omega}{2\pi}}, & Imz<0 \end{cases}$$

Откуда:

$$\mathscr{F}(U)(\xi) = \frac{1}{2\omega}\left\{\frac{1}{2\pi i\left(\xi+\frac{i\omega}{2\pi}\right)}-\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\xi-i\frac{\omega}{2\pi}}\right\}, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}$$

Тогда:

$$U(t) = \frac{1}{2\omega}\left\{\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2\pi i\xi t}}{2\pi i\left(\xi+i\frac{\omega}{2\pi}\right)}d\xi-\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2\pi i\xi t}}{2\pi i\left(\xi-i\frac{\omega}{2\pi}\right)}d\xi\right\}$$

Вычислим интегралы.

$\mathbf{a^0}$)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2\pi i\xi t}}{\xi+i\frac{\omega}{2\pi}} = -\mathscr{Y}(t)\cdot res_{\xi=-\frac{i\omega}{2\pi}}\frac{e^{-2\pi i\xi t}}{\left(\xi+i\frac{\omega}{2\pi}\right)} = -\mathscr{Y}(t)e^{-\omega t}$$

$\mathbf{b^0}$)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2\pi i\xi t}}{\xi-i\frac{\omega}{2\pi}} = \mathscr{Y}(-t)\cdot res_{\xi=\frac{i\omega}{2\pi}}\frac{e^{-2\pi i\xi t}}{\left(\xi-i\frac{\omega}{2\pi}\right)} = \mathscr{Y}(-t)e^{\omega t}$$

а тогда:

$$U(t) = -\frac{1}{2\omega}\begin{cases} e^{-\omega t}, & t>0 \\ e^{\omega t}, & t<0 \end{cases} = -\frac{1}{2\omega}e^{-\omega|t|}$$

Очевидно, $U(t)$- есть элементарное решение оператора $\left(\frac{d^2}{dt^2}-\omega^2\right)$, но оно не принадлежит сверточной алгебре $\mathscr{S}'_+$.

Заметим, что оно принадлежит сверточной алгебре $\theta'_c(\mathbb{R})$ обобщенных функций быстрого убывания, на котором пространство $\mathscr{S}'$ является сверточным модулем. Это означает, что если рассмотреть дифференциальное уравнение $\frac{d^2X}{dt^2}-\omega^2X=W\in\mathscr{S}'$, то оно имеет единственное решение, которое определяется следующим образом:

$$X = -\frac{1}{2\omega}e^{-\omega(t)}\cdot W, \qquad \forall W\in\mathscr{S}'.$$

$\mathbf{6^0}$) Пусть $f(\xi) = \frac{1}{\xi-(a+bi)}, \qquad \forall a \in \mathbb{R}, b < 0$. Тогда:

$$\overline{\mathscr{F}}(f)(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i t\xi} f(t) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i t\xi}}{\xi-(a+bi)} d\xi =$$

$$= \begin{cases} = -2\pi i \cdot res_{\xi=\frac{e^{-2\Pi i t\xi}}{\xi-(a+bi)}}, t > 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = 0, t < 0 \end{cases}$$

$= -\mathscr{Y}(t) \cdot 2\pi i \cdot e^{-2\pi i t(a+bi)} = -\mathscr{Y}(t) \cdot 2\pi i \cdot e^{2\pi b - 2\pi i a t} = -\mathscr{Y}(t) e^{2\pi b t}(\cos 2\pi a t - i \sin 2\pi a t) \cdot 2\pi i$

Таким образом

$$\overline{\mathscr{F}}(f)(t) = -\mathscr{Y}(t) e^{2\Pi b t}(\cos 2\Pi a t - i \sin 2\pi a t) \cdot 2\pi i \quad \in \mathscr{S}'_+$$

Точнее: $\overline{\mathscr{F}}(f)(t) \in \theta'_{c^+}$!

$\mathbf{7^0}$) $\quad T(\xi) = \tau_a \delta_+(\xi), \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

Тогда:

$$\overline{\mathscr{F}}(T)(t) = \overline{\mathscr{F}}(\tau_a \delta_+)(t) = \mathscr{Y}(t) e^{-2\pi i a t}$$

Итак:

$$\overline{\mathscr{F}}(T)(t) = \overline{\mathscr{F}}(\tau_a \delta_+(\xi))(t) = \mathscr{Y}(t) e^{-2\pi i a t} \in \mathscr{S}'_+$$

$\mathbf{8^0}$) $\quad g(\xi) = \frac{1}{\xi-(a+bi)}, \qquad \forall a \in \mathbb{R}, \quad b > 0$

Тогда

$$\overline{\mathscr{F}}(g)(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-2\pi i t\xi}}{\xi-(a+bi)} d\xi = \begin{cases} \qquad\qquad\qquad\qquad = 0, t > 0 \\ = 2\pi i \cdot res_{\xi=a+bi} \frac{e^{-2\pi i t\xi}}{\xi-(a+bi)}, t < 0 \end{cases}$$

$= \mathscr{Y}(-t) \cdot e^{2\pi b t - 2\pi i a t}$. Следовательно:

$$\overline{\mathscr{F}}(g)(t) = \mathscr{Y}(-t) e^{2\pi b t}(\cos 2\pi a b - i \sin 2\pi a t)$$

То есть: $\overline{\mathscr{F}}(g)(t) \in \theta'_{c^-}$!

$\mathbf{9^0}$)

$$\overline{\mathscr{F}}(\tau_a \delta_+(\xi))(t) * \overline{\mathscr{F}}(\tau_{-a} \delta_+(\xi))(t) = \mathscr{Y}(t) e^{-2\pi i a t} * \mathscr{Y}(t) e^{2\pi i a t} =$$

$$= \mathscr{Y}(t) \int_0^t e^{-2\pi i a \tau} \cdot e^{2\pi i a (t-\tau)} d\tau = \mathscr{Y}(t) e^{2\pi i a t} \int_0^t e^{-4\pi i a \tau} d\tau =$$

$$= \mathscr{Y}(t) e^{2\pi i a t} \cdot \frac{1}{4\pi i a} \, e^{-4\pi i a \tau} d\tau \Big|_0^t = \frac{\mathscr{Y}(t) e^{2\pi i a t}}{4\pi i a} \left\{1 - e^{-4\pi i a \tau}\right\} =$$

$$= \frac{\mathscr{Y}(t)}{2\pi a \cdot 2i} \left\{e^{2\pi i a b} - e^{-2\pi i a b}\right\} = \frac{\mathscr{Y}(t)}{2\pi a} \sin 2\pi a t.$$

Итак:

$$\overline{\mathscr{F}}(\tau_a \delta_+(\xi))(t) * \overline{\mathscr{F}}(\tau_{-a} \delta_+(\xi))(t) = \frac{\mathscr{Y}(t)}{2\pi a} \sin 2\pi a t, \qquad \forall a \in \mathbb{R},$$

где $\qquad (\overline{\mathscr{F}}\varphi)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i t\xi} \varphi(t) dt, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{S}.$

Рассмотрим уравнение $\mathscr{Y}(\mathbf{t})\frac{\mathbf{t^{n-1}}}{\mathbf{(n-1)!}} * \mathbf{E}(\mathbf{t}) = \delta(\mathbf{t}) \qquad (\mathbf{1})$.

Надо найти $E(t) =?$

I способ. Метод предворительного дифференцирования. Дифференцируя один раз имеем:

$$\mathscr{Y}(t)\frac{t^{n-2}}{(n-2)!} * E = \delta'(t)$$

Дифференцируя второй раз:

$$\mathscr{Y}(t)\frac{t^{n-3}}{(n-3)!} * E = \delta''(t)$$

и так далее, дифференцируя (n-1)-раз имеем:

$$\mathscr{Y}(t) * *E = \delta^{(n-1)}(t)$$

и, наконец, еще раз дифференцируя имеем:

$$\mathbf{E} = \delta^{(\mathbf{n})}(\mathbf{t})!!!$$

II способ. Метод преобразования Карлемана-Фурье, основанный на формуле:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(\varphi(t))(z) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{2\pi itz}\varphi(t)dt, & Imz > 0 \\ -\int_{-\infty}^0 e^{2\pi itz}\varphi(t)dt, & Imz < 0 \end{cases}$$

где φ - функция медленного роста.

А если $T \in \mathscr{S}'$, то, как известно, $T = \frac{d^m}{dt^m}f(t)$, где f- функция медленного роста, то есть непрерывная функция, растущая на бесконечности не быстрее полинома.

Тогда:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(T)(z) = (-2\pi iz)^m\mathscr{K}\mathscr{F}(f)(z)$$

Тогда имеем:

1) Так как $\delta(t) = \frac{d}{dt}\mathscr{Y}(t)$, то

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(\delta)(z) = (-2\pi iz)\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{Y})(z) = (-2\pi iz)\int_0^\infty e^{2\pi itz}dt = (-2\pi iz)\left.\frac{e^{2\pi itz}}{2\pi iz}\right|_0^\infty = 1,$$

где Im z $>$ 0. Тогда:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(\delta)(z) = \begin{cases} 1, Imz > 0 \\ 0, Imz < 0 \end{cases}$$

2)

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(\mathscr{Y}(t)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!})(z) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{2\pi itz}t^{n-1}dt, \qquad Imz > 0$$

но

$$\int_0^\infty t^{n-1}e^{2\pi itz}dt = t^{n-1}\left.\frac{e^{2\pi itz}}{2\pi iz}\right|_0^\infty - \frac{(n-1)}{2\pi iz}\int_0^\infty t^{n-2}\cdot e^{2\pi itz}dt = ... = \frac{(n-1)!}{(-2\pi iz)^{n-1}}\int_0^\infty e^{2\pi itz}dt =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(-2\pi iz)^{n-1}} \cdot \frac{1}{2\pi iz}\, e^{2\pi itz}\Big|_0^\infty = \frac{(n-1)!}{(-2\pi iz)^n}, \qquad Imz > 0,$$

где образ$\mathscr{K}\mathscr{F}$ от(1) будет:

$$\frac{1}{(-2\pi iz)^n} \cdot \mathscr{K}\mathscr{F}(E)(z) = 1, \qquad Imz > 0$$

Откуда:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(E)(z) = (-2\pi iz)^n, \qquad Imz > 0$$

Следовательно:

$$\mathscr{F}(E)(\xi) = (-2\pi i\xi)^n$$

А тогда, применяя копреобразование Фурье, имеем:

$$\mathbf{E(t)} = \frac{\mathbf{d^n}\delta\mathbf{(t)}}{\mathbf{dt^n}}!!!$$

Рассмотрим уравнение $\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_k}[\mathscr{Y}(\mathbf{t})]^{*\mathbf{k}} * \mathbf{U} = \mathbf{W}$ в $\mathscr{S}'_+$

$$\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_k}[\mathscr{Y}(\mathbf{t})]^{*\mathbf{k}} * \mathbf{U} = \mathbf{W}, \qquad (\mathbf{1})$$

где a_k - const.

$$[\mathscr{Y}(t)]^{*k} = \mathscr{Y}(t)\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\mathscr{Y}(t)\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} * U = W \qquad (\mathbf{2})$$

Применяя преобразование Карлемана-Фурье к (2), получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{1}{(-2\pi i z)^k} \cdot \mathscr{K}\mathscr{F}(U)(z) = \mathscr{K}\mathscr{F}(W)(z), \qquad Imz > 0 \qquad (\mathbf{3})$$

или, умножая (3) на $(-2\pi i z)^n$, имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (-2\pi i z)^{n-k} \cdot \mathscr{K}\mathscr{F}(U)(z) = \mathscr{K}\mathscr{F}(W)(z) \cdot (-2\pi i z)^n, \qquad Imz > 0 \qquad (\mathbf{4})$$

откуда:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k (-2\pi i x)^{n-k} \cdot \mathscr{F}(U)(x) = \mathscr{F}(W)(x) \cdot (-2\pi i x)^n, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (\mathbf{5})$$

То есть **имеем задачу деления на полином относительно** $(-2\pi i x)$ **в мультипликативной алгебре** $\mathbf{K}_+ = \mathscr{F}(\mathscr{S}'_+)$.

Эту задачу решаем, применяя копреобразование Фурье $\overline{\mathscr{F}}$ к уравнению (5), имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\delta(t) * U = W * \frac{d^n \delta}{dt^n}$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{d^{n-k}U}{dt^{n-k}} = \frac{d^n W}{dt^n} \quad \in \mathscr{S}'_+ \qquad (\mathbf{6})$$

Известно, что у дифференциального оператора $\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}$ существует единственное элементарное решение в сверточной алгебре $\mathscr{D}'_+$ и оно имеет вид:$E(t) = \mathscr{Y}(t)\mathbf{e}(t)$, где $\mathbf{e}(t)$ - решение классической задачи Коши.

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{e}^{(n-k)}(t) = 0 \\ \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}'(0) = ... = \mathbf{e}^{(n-3)}(0) = 0 \\ \mathbf{e}^{(n-2)}(0) = \frac{1}{a_1} \end{cases}$$

Если $E(t) \in \mathscr{S}'_+$, то существует единственное решение уравнения (6) в $\mathscr{S}'_+$ и оно имеет вид:

$$U = E(t) * \frac{d^n}{dt^n} W \qquad (\mathbf{7})$$

Таким образом имеет место **теорема**:

У уравнения сверток (1) в сверточной алгебре$\mathscr{S}'_+$ существует единственное решение, определяемое по формуле (7), если у дифференциального оператора $\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_k} \frac{\mathbf{d^{n-k}}}{\mathbf{dt^{n-k}}}$ существует единственное элементарное решение $\mathbf{E(t)}$, принадлежащее сверточной алгебре $\mathscr{S}'_+$.

Рассмотрим несколько примеров.

1)
I) Пусть $f(t) = \mathscr{Y}(t)e^{-2\pi\beta t}, \quad \beta > 0$

$$\frac{df}{dt} = \delta(t) - 2\pi\beta\mathscr{Y}(t)e^{-2\pi\beta t} \Rightarrow (\delta' + 2\pi\beta\delta) * f = \delta(t)$$

то есть:

$$f^{-1}(t) = \delta'(t) + 2\pi\beta\delta(t) \quad \in \mathscr{S}'_+$$

II) $\mathscr{K}\mathscr{F}(f)^+(z) = \int_0^\infty e^{2\pi itz - 2\pi\beta t}dt = \int_0^\infty e^{2\pi it(z+i\beta)}dt = -\frac{1}{2\pi i(z+i\beta)} \qquad Imz > 0$
III) $\mathscr{K}\mathscr{F}(f^{-1})^+(z) = ?$

a) $\mathscr{K}\mathscr{F}(\delta(t))^+(z) = \mathscr{K}\mathscr{F}\left\{\frac{d}{dt}\mathscr{Y}(t)\right\} = (-2\pi iz)\int_0^\infty e^{2\pi itz}dt = (-2\pi iz)\frac{1}{2\pi iz}\, e^{2\pi itz}\Big|_0^\infty = 1, \qquad Imz > 0.$

b) $\mathscr{K}\mathscr{F}(\delta'(t))^+(z) = \mathscr{K}\mathscr{F}\left\{\frac{d^2}{dt^2}\mathscr{Y}(t)\right\} = (-2\pi iz)^2\int_0^\infty e^{2\pi itz} = (-2\pi iz)^2\left(-\frac{1}{2\pi iz}\right) = (-2\pi iz), \qquad Imz > 0.$ Тогда:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(f^{-1})^+(z) = -2\Pi iz + 2\Pi\beta, \qquad Imz > 0.$$

Итак, имеем:

$$\left\{\mathscr{K}\mathscr{F}(f)^+(z)\right\}^{-1} = \left\{-\frac{1}{2\pi i(z+i\beta)}\right\}^{-1} = -2\pi i(z+i\beta) = \mathscr{K}\mathscr{F}(f^{-1})^+(z), \qquad Imz > 0,$$

где :$f(t) = \mathscr{Y}(t)e^{-2\pi\beta t}, \quad \beta > 0$

$$f^{-1} = \delta' + 2\pi\beta\delta$$

2) Пусть дана следующая функция Хевисайда:

$$f(t) = \mathscr{Y}(k - |t-k|), \quad k > 0 \quad |t-k| \le k \Rightarrow 0 \le t \le 2k$$

преобразование Карлемана-Фурье в верхней полуплоскости для этой функции:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(f)^+(z) = \int_0^{2k} e^{2\pi itz}dt = \frac{1}{2\pi iz}\, e^{2\pi itz}\Big|_0^{2k} = \frac{1}{2\pi iz}\left\{e^{2\pi i2kz} - 1\right\} =$$

$$= \frac{e^{2\pi ikz}(e^{2\pi ikz} - e^{-2\pi ikz})}{\pi z \cdot 2i} = \frac{e^{2\pi ikz}\sin 2\pi kz}{\pi z}, \qquad Imz > 0$$

находим преобразование Фурье:

$$\mathscr{F}(f)(x) = \frac{e^{2\pi ikx}\sin 2\pi kx}{\pi x} \quad \in (\delta_+ * \mathscr{A}) \subset \mathscr{F}(\mathscr{S}'_+)$$

3) Рассмотрим такой пример: $g(t) = \mathscr{Y}(k - |t - 2k|)$ $\qquad |t - 2k| \leq k \Rightarrow k \leq t \leq 3k$

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(g)^+(z) = \int_k^{3k} e^{2\pi itz} dt = \frac{1}{2\pi iz}\, e^{2\pi itz}\Big|_k^{3k} = \frac{1}{2\pi iz}\left\{e^{2\pi i3kz} - e^{2\pi ikz}\right\} =$$

$$= \frac{e^{2\pi i2kz}}{2\pi iz}\left\{e^{2\pi ikz} - e^{-2\pi ikz}\right\} = \frac{e^{2\pi i2kz}\sin 2\pi kz}{\pi z}, \qquad Imz > 0$$

$$\mathscr{F}(g)(x) = \frac{e^{2\pi i2kx}\sin 2\pi kx}{\pi x} \quad \in (\delta_+ * \mathscr{A}) \subset \mathscr{F}(\mathscr{S}'_+)$$

N.B. Но $\mathbf{f(t) = -\mathscr{Y}(k - |t - k|) = \mathscr{Y}(t) - \mathscr{Y}(t - 2k)}$. Тогда:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(f)^+(z) = \int_0^\infty e^{2\pi itz} dt - \int_{2k}^\infty e^{2\pi itz} dt = -\frac{1}{2\pi iz} + \frac{1}{2\pi iz} e^{2\pi i2kz} = -\frac{1}{2\pi iz}\left(1 - e^{2\pi i2kz}\right), \quad Imz > 0$$

Преобразование Фурье:

$$\mathscr{F}(f)(x) = \delta_+\left(1 - e^{2\pi i2kz}\right),$$

где $f(t) = -\mathscr{Y}(k - |t - k|), \quad k > 0$. Итак, имеем:

$$\frac{e^{2\pi ikx}\sin 2\pi kx}{\pi x} = \delta_+ \cdot \left(1 - e^{2\pi i2kx}\right) \quad \forall k > 0 \qquad !!!!$$

Аналогично:

$$g(t) = \delta_+ \cdot \left(e^{2\pi ikx} - e^{2\pi i3kx}\right) = -\frac{1}{2\pi i} v.p.\frac{1}{x}\left(e^{2\pi ikx} - e^{2\pi i3kx}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi x} e^{2\pi i2kx}\frac{(e^{2\pi ikx} - e^{2\pi i3kx})}{2i} = e^{2\pi i2kx}\frac{\sin 2\pi kx}{\pi x} \qquad !!!!$$

То есть

$$(\mathscr{F}g)(x) = e^{2\pi i2kx}\frac{\sin 2\pi kx}{\pi x} = \delta_+ \cdot \left(e^{2\pi ikx} - e^{2\pi i3kx}\right) \qquad \forall k > 0 \qquad !!!$$

где

$$g(t) = \mathscr{Y}(k - |t - 2k|), \qquad k > 0$$

А в верхней полуплоскости преобразование Карлемана-Фурье имеет следующий вид:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(g)^+(z) = -\frac{1}{2\pi iz}\left(e^{2\pi ikz} - e^{2\pi i3kz}\right), \qquad Imz > 0$$

$$\left\{\delta_+ = \frac{e^{2\pi ikx}\sin 2\pi kx}{(1 - e^{2\pi i2kx})\,\pi x} = -\frac{\sin 2\pi kx}{(e^{2\pi ikx} - e^{-2\pi ikx})\,\pi x} = -\frac{1}{2\pi ix} \qquad !!!\right\}$$

$$\left\{\delta_+\left(1 - e^{2\pi ik2x}\right)\right\}^{*2} = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi ik(x-\tau)}\sin 2\pi k(x-\tau)}{\pi(x-\tau)} \cdot \frac{e^{2\pi ik\tau}\sin 2\pi k\tau}{\pi\tau} d\tau =$$

$$= \frac{e^{2\pi ikx}}{\pi^2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin 2\pi k(x-\tau)\sin 2\pi k\tau}{(x-\tau)\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi^2} e^{2\pi ikx}\int_{\mathbb{R}} \frac{\{\cos 2\pi k(x - 2\tau) - \cos 2\pi kx\}}{(x-\tau)(\tau)} d\tau;$$

N.B. $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$!

1^0) $\frac{1}{2\pi^2}e^{2\pi ikx}\left\{\int_{\mathbb{R}}\frac{\cos 2\pi k(x-2\tau)}{(x-\tau)\tau}d\tau - \cos 2\pi kx\int_{\mathbb{R}}\frac{d\tau}{(x-\tau)\tau}\right\}$; но

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\cos 2\pi k(x-2\tau)}{(x-\tau)\tau}d\tau = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{2\pi ik(x-2\tau)}+e^{-2\pi ik(x-2\tau)}}{(x-\tau)\tau}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{e^{2\pi ikx}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2\pi ik2\tau}}{(x-\tau)\tau}d\tau + e^{-2\pi ikx}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{2\pi ik2\tau}}{(x-\tau)\tau}d\tau\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{e^{2\pi ikx}\left[\pi i\left(res_{\xi=x}\frac{e^{-2\pi ik2\xi}}{(\xi-x)\xi} + res_{\xi=0}\frac{e^{-2\pi ik2\xi}}{(\xi-x)\xi}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + e^{-2\pi ikx}\left[-\pi i\left(res_{\xi=x}\frac{e^{2\pi ik2\xi}}{(\xi-x)\xi} + res_{\xi=0}\frac{e^{2\pi ik2\xi}}{(\xi-x)\xi}\right)\right]\right\} =$$

$$= ...\frac{\pi i}{2}\left\{e^{2\pi ikx}\left(\frac{e^{-2\pi ik2x}}{x} - \frac{1}{x}\right) - e^{-2\pi ikx}\left(\frac{e^{2\pi ik2x}}{x} - \frac{1}{x}\right)\right\} =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left\{\frac{e^{-2\pi ikx}-e^{2\pi ikx}}{x} - \frac{e^{2\pi ikx}-e^{-2\pi ikx}}{x}\right\} = -\frac{\pi i}{2}\cdot 2\frac{\left(e^{2\pi ikx}-e^{-2\pi ikx}\right)}{x} = 2\pi\frac{\sin 2\pi kx}{x}$$

2^0)

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{d\tau}{(x-\tau)\tau} = -\int_{\mathbb{R}}\frac{d\tau}{(\tau-x)\tau} = -\pi i\left\{res_{\xi=x}\frac{1}{(\xi-x)\xi} + res\xi = 0\frac{1}{(\xi-x)\xi}\right\} = -\pi i\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right\} = 0$$

Тогда:

$$\left\{\delta_+\left(1-e^{2\pi i2kx}\right)\right\}^{*2} = \frac{1}{2\pi^2}e^{2\pi ikx}\left\{2\pi\frac{\sin 2\pi kx}{x}\right\} = \frac{e^{2\pi ikx}\sin 2\pi kx}{\pi x}!!!$$

Итак:

$$\left\{\delta_+\left(1-e^{2\pi i2kx}\right)\right\}^{*2} = \delta_+\left(1-e^{2\pi i2kx}\right)$$

или:

$$\left\{\frac{e^{2\pi ikx}\sin 2\pi kx}{\pi x}\right\}^{*2} = \frac{e^{2\pi ikx}\sin 2\pi kx}{\pi x} \qquad \forall k>0!!!$$

N.B. А через копреобразование Фурье $\overline{\mathscr{F}}$ этот результат очивиден!

4) Пусть

$$h(t) = \mathscr{Y}\left[\frac{b-a}{2} - |t-\frac{a+b}{2}|\right], \qquad 0<a<b \quad a<t<b$$

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(h)^+(z) = \int_a^b e^{2\pi itz}dt = \frac{1}{2\pi iz}\left\{e^{2\pi ibz}-e^{2\pi iaz}\right\} \Rightarrow$$

I^0. Первое представление.

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(h)^+(z) = -\frac{1}{2\pi iz}\left\{e^{2\pi iaz}-e^{2\pi ibz}\right\}, \quad Imz>0$$

Откуда:

$$\mathscr{F}(h)(x) = \delta_+(x)\left[e^{2\pi iax} - e^{2\pi ibx}\right], \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

II^0. Второе представление.

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(h)^+(z) = \frac{e^{2\pi i\frac{b}{2}z+2\pi i\frac{a}{2}z}}{2\pi iz}\left\{e^{2\pi i\frac{b}{2}z-2\pi i\frac{a}{2}z} - e^{-2\pi i\frac{b}{2}z+2\pi i\frac{a}{2}z}\right\} = \frac{e^{\pi i(b+a)z}}{\pi z}\cdot\sin\pi(b-a)z, \quad Imz > 0$$

Следовательно:

$$\mathscr{F}(h)(x) = \frac{e^{\pi i(b+a)x}}{\pi x}\cdot\sin\pi(b-a)x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

III^0 Итак, имеем:

$$\mathscr{F}\left\{\mathscr{Y}\left[\frac{b-a}{2} - |t - \frac{a+b}{2}|\right]\right\}(x) = \delta_+(x)\left[e^{2\pi iax} - e^{2\pi ibx}\right] = \frac{e^{\pi i(b+a)x}}{\pi x}\cdot\sin\pi(b-a)x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Это граничное значение аналитической функции $\mathscr{K}\mathscr{F}\left\{\mathscr{Y}\left[\frac{b-a}{2} - |t - \frac{a+b}{2}|\right]\right\}^+(z)$ из Im z > 0 при $Imz \to +0$.

Дополнительный материал по преобразованию Карлемана-Фурье и преобразованию Фурье

1) Дана $f(t) = \mathscr{Y}(k - |t-k|)$, где k > 0. Найти $\mathscr{K}\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}$.

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(f)^+(z) = \int_0^{2k} e^{2\pi itz} dt = \frac{1}{2\pi i}\left\{e^{2k\cdot 2\pi iz} - 1\right\} =$$

$$= \frac{e^{2\pi ikz}(e^{2\pi ikz} - e^{-2\pi ikz})}{2\pi iz} = e^{2\pi ikz} \cdot \frac{\sin 2\Pi kz}{\Pi z}, \quad Imz > 0.$$

Тогда:

$$\mathscr{F}(f)(x) = e^{2\pi ikx} \cdot \frac{\sin 2\pi kx}{\pi x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a)N.B. Или, вводя функцию $\sin cx := \frac{\sin x}{x}$, функцию $\mathscr{F}(f)(x)$ можно записать в следующем виде:

$$\mathscr{F}(f)(x) = e^{2\pi ikx} \cdot 2k \sin c(2\pi kx), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

b)N.B. Учитывая равенство:

$$\mathscr{K}\mathscr{F}(f)^+(z) = -\frac{1}{2\pi iz}\left(1 - e^{2k2\pi iz}\right), \qquad Imz > 0,$$

и, переходя к пределу(в смысле обобщенных функций из $\mathscr{S}'$) при $Imz \to +0$, имеющее одно представление для $\mathscr{F}(f)(x)$:

$$\mathscr{F}(f)(x) = \left(1 - e^{4\pi kiz}\right)\delta_+(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

где $\delta_+(x)$ - функция Гейзенберга-Н.Н.Боголюбова: $\delta_+(x) = \frac{1}{2}\left\{\delta - \frac{1}{2\pi i} v.p.\frac{1}{x}\right\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) Дана функция: $G(z) = e^{2\pi ikz} \cdot \frac{\sin 2\pi kz}{\pi z}$. Рассматриваем ее в $Imz > 0$. Найти функцию $f(t) \in \mathscr{S}'_+$ такую, что $G(z) = \mathscr{K}\mathscr{F}(f(t))^+(z), Imz > 0$.

Решение: в равенстве $(\pi z)G(z) = e^{2\pi ikz} \cdot \sin 2\pi kz, \quad Imz > 0$ перейдем к пределу при $Imz \to +0$. Имеем:

$$(2\pi ix)G(x) = e^{2\pi ikx}(e^{2\pi ikx} - e^{-2\pi ikx}), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

или:

$$(2\pi ix)\mathscr{F}(f)(x) = e^{2k\cdot 2\pi ix} - 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

либо:

$$(-2\pi ix)\mathscr{F}(f)(x) = 1 - e^{2k\cdot 2\pi ix}, \forall x \in \mathbb{R}$$

или:

$$\mathscr{F}\left\{\frac{d\delta}{dt} * f(t)\right\} = \mathscr{F}\left[\delta - \delta_{2k}(t)\right]$$

Откуда:

$$\frac{df}{dt} = \delta - \delta_{2k}(t) \quad \in \mathscr{S}'_+ \qquad (*)$$

Но оператор $\frac{d}{dt}$ в $\mathscr{S}'_+$ имеет элементарное решение $E(t) = \mathscr{Y}(t) \in \mathscr{S}'_+$, а тогда существует единственное решение уравнения сверток $(*)$, который имеет вид:

$$f(t) = \mathscr{Y} * \{\delta(t) - \delta_{2k}(t)\} = \mathscr{Y}(t) - \mathscr{Y}(t-2k)$$

или:

$$f(t) = \mathscr{Y}\left(k - |t-k|\right)!!!$$

N.B. Этот результат можно интерпретировать и так. Функция $f(t)$ есть прообраз при приобразовании Фурье для обобщенной функции $\left(1 - e^{4\pi ikx}\right)\delta_+$!!!, которая в свою очередь есть граничное значение (в смысл обобщенной функции из $\mathscr{S}'$) для аналитической в $Imz > 0$ функции $G(z) = e^{2\pi ikz} \cdot \frac{\sin 2\pi kz}{\pi z}$ при $Imz \to +0$!

Список использованной литературы.

1)Владимиров В.С., "Уравнения математической физики. М.Наука,1988г.

2)Владимиров В.С.,Михайлов В.П.,Вашарин А.А.,Каримова Х.Х.,Сидоров Ю.В.,Шабунин М.И. "Сборник задач по уравнениям математической физики. М.Наука,1982г.

3)Салехов Л.Г. "Лекции по уравнениям в частных производных. 2011 г., "Лекции по технике ядер. 2012 г., "Лекции по интегральным преобразованиям в пространстве обобщенных функций. 2014 г.

4)Бремерман Г. "Распределения,комплексные переменные и преобразования Фурье. М.Мар. 1968 г.

5)Рудин У. "Функциональный анализ М.: Мир, 1975г.

6)Шубин М.А."Лекции об уравнениях математической физики МЦНМО,2003г.

7)Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ. М.:РХД, 2009г.