Известия вузов. Математика
2017, № 10, с. 38–49

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.Г. БАСКАКОВ, Т.К. КАЦАРАН, Т.И. СМАГИНА

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И РАСЩЕПЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ

Аннотация. Рассматривается линейное дифференциальное уравнение второго порядка в комплексном банаховом пространстве с ограниченными операторными коэффициентами. Изучается вопрос существования ограниченных на всей вещественной оси решений (при ограниченной правой части), их асимптотическое поведение. Исследование проводится в условиях наличия разделенных корней соответствующего "алгебраического" операторного уравнения или при условии малости нормы оператора, стоящего перед первой производной в уравнении. В последнем случае применяется метод подобных операторов (теорема о расщеплении оператора). Основные результаты получены с использованием теорем о преобразовании подобия операторных матриц второго порядка операторной матрице блочно-диагонального вида.

Ключевые слова: банахово пространство, дифференциальное уравнение второго порядка, метод подобных операторов, расщепление операторов.

УДК: 517.983

1. Введение. Основные результаты

Пусть $\mathcal{X}$ — комплексное банахово пространство и $\operatorname{End}\mathcal{X}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{X}$. Через $\mathcal{X}^2 = \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ обозначается банахово пространство, элементами которого являются упорядоченные пары $x = (x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, а норма задается формулой $\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2}$. Символом $C_b(\mathbb{J}, \mathcal{X})$, $\mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$, обозначается банахово пространство непрерывных ограниченных функций $x : \mathbb{J} \to \mathcal{X}$ с нормой $\|x\|_C = \sup\limits_{t\in\mathbb{J}} \|x(t)\|$; символом $C_b^{(k)}(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ — банахово пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций $x \in C_b(\mathbb{J}, \mathcal{X})$ с k-й производной $x^{(k)}$, принадлежащей пространству $C_b(\mathbb{J}, \mathcal{X})$, и нормой $\|x\|_{C^{(k)}} = \|x\|_C + \|x^{(k)}\|_C$.

Символ $X \sim \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$, $X_{ij} \in \operatorname{End}\mathcal{X}$, $i, j = 1, 2$, будет использоваться для обозначения соответствия (соотношения) между оператором $X \in \operatorname{End}\mathcal{X}^2$ и его матрицей, которая для (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in \mathcal{X}^2$ определяется из равенств $X(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, $X_{11}x_1 = y_1$, $X_{21}x_1 = y_2$, $X_{12}x_2 = y_1$, $X_{22}x_2 = y_2$. Иногда отождествляем матрицу оператора, действующего в декартовом произведении банаховых пространств, с оператором, который определяется этой матрицей.

Поступила 23.05.2016

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки России в рамках проектной части (проект № 1.3464.2017/4.6).

В пространстве $C_b = C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x}(t) + B_1\dot{x}(t) + B_2x(t) = g(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $B_1, B_2 \in \operatorname{End}\mathcal{X}$, $g \in C_b$. Это уравнение запишем в виде $\mathrm{L}x = g$, где дифференциальный оператор второго порядка $\mathrm{L} : D(\mathrm{L}) \subset C_b \to C_b$ действует по правилу

$$\mathrm{L}x = \ddot{x} + B_1\dot{x} + B_2x, \quad x \in D(\mathrm{L}),$$

а его область определения $D(\mathrm{L})$ совпадает с $C_b^{(2)} = C^{(2)}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$.

Наряду с уравнением (1) выпишем дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\dot{y} + \mathbb{B}y = f, \quad f = (f_1, f_2) \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2), \tag{2}$$

рассматриваемое в банаховом пространстве $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2)$ (изоморфном пространству $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \times C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$). Оператор $\mathbb{B} \in \operatorname{End}\mathcal{X}^2$ определяется матрицей

$$\mathbb{B} \sim \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix},$$

т. е. $\mathbb{B}(y_1, y_2) = (-y_2, B_2y_1 + B_1y_2)$ для $(y_1, y_2) \in \mathcal{X}^2$.

Отметим, что дифференциальное уравнение (1) переходит в уравнение (2) (ему эквивалентно), если $f = (0, g)$.

Естественным образом возникает вопрос об одновременной обратимости оператора $\mathrm{L} : D(\mathrm{L}) \subset C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \to C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ и оператора $\mathbb{L} : D(\mathbb{L}) \subset C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2) \to C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2)$, действующего по правилу

$$\mathbb{L}y = \dot{y} + \mathbb{B}y, \quad y = (y_1, y_2) \in D(\mathbb{L}) = C_b^{(1)}(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2),$$

т. е.

$$\mathbb{L}y = (Dy_1 - y_2, B_2y_1 + (D + B_1)y_2).$$

Здесь оператор дифференцирования $D : C_b^{(1)}(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \subset C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \to C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ определяется соотношением $Dx = \dot{x}$, $x \in C_b^{(1)}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$.

Ответ на этот вопрос дает

Теорема 1. *Оператор* $\mathrm{L} : D(\mathrm{L}) \subset C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \to C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ *обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор* $\mathbb{L} : D(\mathbb{L}) \subset C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2) \to C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2)$.

Если оператор $\mathrm{L} : D(\mathrm{L}) \subset C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \to C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ *обратим, то обратный к* $\mathbb{L} : D(\mathbb{L}) \subset C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2) \to C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2)$ *оператор* $\mathbb{L}^{-1} \in \operatorname{End}\mathcal{X}^2$ *определяется матрицей*

$$\begin{pmatrix} (D - \lambda_0 I)^{-1} - \mathrm{L}^{-1}\left((B_2 + \lambda_0 B_1 + \lambda_0^2 I)(D - \lambda_0 I)^{-1} + \lambda_0 I\right) & \mathrm{L}^{-1} \\ \lambda_0(D - \lambda_0 I)^{-1} - D\,\mathrm{L}^{-1}\left((B_2 + \lambda_0 B_1 + \lambda_0^2 I)(D - \lambda_0 I)^{-1} + \lambda_0 I\right) & D\,\mathrm{L}^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Здесь λ_0 *— любое число из* $\mathbb{C} \setminus (i\mathbb{R})$.

Теорема 1 позволяет использовать результаты работ [1]–[7].

Исследование дифференциальных уравнений (1), (2) проводится с использованием корней "алгебраического" операторного уравнения

$$X^2 + B_1X + B_2 = 0, \tag{4}$$

рассматриваемого в банаховой алгебре $\operatorname{End}\mathcal{X}$. Такой метод изучения дифференциального уравнения второго порядка был предложен в [8] и показал свою эффективность.

Уравнение (4) может иметь, вообще говоря, бесчисленное множество корней. Два корня Λ_1 и Λ_2 назовем *разделенными*, если оператор $\Lambda_1 - \Lambda_2$ обратим в алгебре $\operatorname{End}\mathcal{X}$. Условия существования таких корней приведены, например, в ([1], гл. II, § 4). В монографии ([2], гл. I, § 5) определены дробные степени операторов. В частности, уравнение (4), где $B_1 = 0$, имеет два разделенных корня $\pm\sqrt{-B_2}$, если оператор B_2 обратим и число нуль лежит в

одной компоненте связности резольвентного множества $\varrho(-B_2)$ оператора $-B_2$ и точки ∞ (из расширенной плоскости).

Через $A_1 \oplus A_2$, $A_1, A_2 \in \operatorname{End}\mathcal{X}$, обозначим прямую сумму операторов, определяемых блочно-диагональной матрицей $A_1 \oplus A_2 \sim \left(\begin{smallmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{smallmatrix}\right)$.

Одним из основных результатов статьи является

Теорема 2. *Если уравнение* (4) *имеет два разделенных корня* $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \operatorname{End}\mathcal{X}$, *то оператор* $\mathbb{B} \in \operatorname{End}\mathcal{X}^2$ *подобен блочно-диагональному оператору* $\Lambda \in \operatorname{End}\mathcal{X}^2$, *задаваемому матрицей*

$$\Lambda \sim \begin{pmatrix} -\Lambda_1 & 0 \\ 0 & -\Lambda_2 \end{pmatrix}.$$

При этом имеют место соотношения

$$\mathbb{B} = U^{-1}\Lambda U, \quad e^{-\mathbb{B}t} = U^{-1}(e^{\Lambda_1 t} \oplus e^{\Lambda_2 t})U. \tag{5}$$

Здесь операторы $U, U^{-1} \in \operatorname{End}\mathcal{X}^2$ *определяются матрицами*

$$U \sim \mathcal{U} = \begin{pmatrix} I & I \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} \sim \mathcal{U}^{-1} = \begin{pmatrix} -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2 & (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \\ (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_1 & -(\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} \end{pmatrix} \tag{6}$$

соответственно.

Как показал пример, построенный А.С. Маркусом [9], непрерывный спектр корня не всегда содержится в спектре оператора $\mathbb{B}$. Однако из подобия операторов $\mathbb{B}$ и Λ, а также из соотношения (5) следует

Теорема 3. *Пусть* Λ_1, Λ_2 — *разделенная пара корней уравнения* (4). *Тогда для обратимости операторов* $\mathrm{L} : D(\mathrm{L}) \subset C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \to C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ *и* $\mathbb{L} : D(\mathbb{L}) \subset C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2) \to C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2)$ *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$(\sigma(\Lambda_1) \cup \sigma(\Lambda_2)) \cap (i\mathbb{R}) = \varnothing, \tag{7}$$

где $\sigma(\Lambda_k)$, $k = 1, 2$, — *спектры операторов* Λ_k, $k = 1, 2$.

В условиях следующей теоремы рассматривается разделенная пара корней Λ_1, Λ_2 уравнения (4), для которых выполнено условие (7). Так как спектр каждого из операторов Λ_1, Λ_2 не пересекается с мнимой осью $i\mathbb{R}$, то имеет место представление $\sigma(\Lambda_k) = \sigma_k^- \cup \sigma_k^+$, $k = 1, 2$, где спектральные множества σ_k^-, σ_k^+, $k = 1, 2$, лежат в левой и правой полуплоскостях соответственно (одно из них может быть пустым). Через $P_k^{\mp}$ обозначим спектральные проекторы Рисса, отвечающие спектральным множествам $\sigma_k^{\mp}$, $k = 1, 2$.

Рассмотрим два интегральных оператора свертки

$$(G_k * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} G_k(t - s)g(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad g \in C_b, \quad k = 1, 2,$$

где

$$G_k(t) = \begin{cases} -e^{\Lambda_k t}P_k^+, & t \le 0; \\ e^{\Lambda_k t}P_k^-, & t > 0, \quad k = 1, 2, \end{cases} \tag{8}$$

есть функция Грина ([1], гл. II, § 4), построенная по соответствующему дифференциальному уравнению

$$\dot{x} = \Lambda_k x, \quad k = 1, 2.$$

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (7). *Обратные к* L *и* $\mathbb{L}$ *операторы имеют вид*

$$\begin{aligned} &\mathrm{L}^{-1}g = (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}\Lambda_2(G_2 - G_1) * g, \quad g \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}), \\ &\mathbb{L}^{-1}f = \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2), \ f = (f_1, f_2) \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2), \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\varphi_1 = (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}(-\Lambda_2 G_1 * (f_1 + f_2) + G_2 * (\Lambda_1 f_1 + \Lambda_2 f_2)),$$
$$\varphi_2 = (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1}(\Lambda_1 G_1 * (f_1 + f_2) - G_2 * (\Lambda_1 f_1 + \Lambda_2 f_2)).$$

Полученное в теореме 2 представление (5) операторной экспоненты позволяет (с использованием результатов статьи [10]) получить асимптотическое представление ограниченных на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ решений однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{x}(t) + B_1 \dot{x}(t) + B_2 x(t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{10}$$

Имеет место

Теорема 5. *Пусть Λ_1, Λ_2 — разделенные корни уравнения* (4)*, все решения дифференциального уравнения* (10) *ограничены на $\mathbb{R}_+$ и множество*

$$(\sigma(-\Lambda_1) \cup \sigma(-\Lambda_2)) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \ldots, i\lambda_m\} \tag{11}$$

является конечным множеством. Тогда существуют проекторнозначные равномерно непрерывные функции

$$\mathbb{P}_k : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathcal{X}^2, \quad \mathbb{P}_k \in C_b(\mathbb{R}_+, \operatorname{End} \mathcal{X}^2), \quad 1 \leq k \leq m,$$

такие, что для любого решения $x : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{X}$ однородного дифференциального уравнения (10) *имеет место представление*

$$(x(t), \dot{x}(t)) = \sum_{k=1}^{m} e^{i\lambda_k t} \mathbb{P}_k(t)(x(0), \dot{x}(0)), \quad t \geq 0.$$

Функции $\mathbb{P}_k$, $1 \leq k \leq m$, обладают следующими свойствами:

1) операторы $\mathbb{P}_k(t)$, $t \geq 0$, $1 \leq k \leq m$, принадлежат наименьшей замкнутой подалгебре, порожденной оператором $\mathbb{B}$ и тождественным оператором $\mathbb{I} \in \operatorname{End} \mathcal{X}^2$;

2) функции $\mathbb{P}_k(t)$, $t \geq 0$, $1 \leq k \leq m$, допускают расширение на $\mathbb{C}$ до целых функций экспоненциального типа с производными, удовлетворяющими условию

$$\lim_{t \to \infty} \|\dot{\mathbb{P}}_k(t)\| = 0, \quad 1 \leq k \leq m;$$

3) $\lim\limits_{t \to \infty} \|\mathbb{B}\mathbb{P}_k(t) - i\lambda_k \mathbb{P}_k(t)\| = 0$, $1 \leq k \leq m$;

4) $\lim\limits_{t \to \infty} \|\mathbb{P}_k(t)\mathbb{P}_j(t)\| = 0$, $k \neq j$, $1 \leq k, j \leq m$;

5) $\lim\limits_{t \to \infty} \|\mathbb{P}_k^2(t) - \mathbb{P}_k(t)\| = 0$, $1 \leq k \leq m$;

6) $\lim\limits_{t \to \infty} \|\sum\limits_{k=1}^{m} \mathbb{P}_k(t) - \mathbb{I}\| = 0$.

Семейство функций $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_m$ назовем *разложением единицы на бесконечности.* Эти функции согласно свойству 2) являются медленно меняющимися на бесконечности ([11], [12]).

Теорема 6. *При выполнении условия* (11) *каждое ограниченное решение $x_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{X}$ однородного дифференциального уравнения* (10) *представимо в виде*

$$x_0(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k(t) e^{i\lambda_k t}, \quad t \geq 0, \tag{12}$$

где функции $a_k : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{X}$, $1 \leq k \leq m$, принадлежат $C_b^{(l)}(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$ при любом $l \in \mathbb{N}$, допускают расширение на $\mathbb{C}$ до функций экспоненциального типа и

$$\lim_{t \to \infty} \dot{a}_k(t) = 0, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Отметим, что согласно работам [11], [12] функция вида (12) является почти периодической на бесконечности функцией.

Заметим, что в условиях теорем 5 и 6 числа $i\lambda_1, \dots, i\lambda_m$ могут находиться в одной компоненте связности множества $(\sigma(-\Lambda_1) \cup \sigma(-\Lambda_2)) \cap (i\mathbb{R})$.

В математических моделях, описывающих реальные процессы, оператор B_1 из уравнений (1), (2) соответствует наличию трения (в механических системах), сопротивления (в электрических цепях) и т. д. Естественно предположить, что влияние B_1 мало. В разделе 3 данной статьи исследование проводится в предположении

$$0 \notin \sigma(B_2), \tag{13}$$

а норма оператора B_1 достаточно мала. Основной результат содержится в теореме 7. Эта теорема о расщеплении позволяет получить аналоги теорем 2–6.

2. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть оператор L обратим. Вначале докажем инъективность оператора $\mathbb{L}$, т. е. установим равенство $\operatorname{Ker}\mathbb{L} = \{0\}$, где $\operatorname{Ker}\mathbb{L} = \{y = (y_1, y_2) \in D(\mathbb{L}) \mid \mathbb{L}y = 0\}$. Пусть $y = (y_1, y_2) \in \operatorname{Ker}\mathbb{L}$. Тогда $\dot{y}_1 = y_2$, $\dot{y}_2 = -B_2y_1 - B_1y_2$ и, следовательно, $y_1 \in D(\mathrm{L})$ и $\mathrm{L}y_1 = 0$, т. е. $y_1 \in \operatorname{Ker}\mathrm{L} = \{0\}$. Поэтому $y_2 = 0$ и $y = (y_1, y_2) = 0$, таким образом, $Ker\mathbb{L} = \{0\}$.

Проверим теперь, что оператор $\mathbb{L}$ сюръективен. Рассмотрим уравнение $\mathbb{L}y = f$, где $f = (f_1, f_2)$ — произвольная функция из $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2) \simeq C_b \times C_b$. Пусть λ_0 — любое комплексное число с $\operatorname{Re}\lambda_0 \neq 0$. Тогда оператор $D - \lambda_0 I$ обратим в C_b ([1], [3], [5]), а оператор L допускает представление в виде

$$\mathrm{L} = (D - \lambda_0 I)^2 + (B_1 + 2\lambda_0 I)(D - \lambda_0 I) + B_2 + \lambda_0 B_1 + \lambda_0^2 I.$$

Непосредственно проверяется, что уравнение $\mathbb{L}y = f$ разрешимо и его решение $y = (y_1, y_2) \in C_b \times C_b$ имеет вид

$$y_1 = ((D - \lambda_0 I)^{-1} - \mathrm{L}^{-1}(B_2 + \lambda_0 B_1 + \lambda_0^2 I)(D - \lambda_0 I)^{-1} + \lambda_0 I)f_1 + \mathrm{L}^{-1} f_2,$$
$$y_2 = (\lambda_0 (D - \lambda_0 I)^{-1} - D\mathrm{L}^{-1}((B_2 + \lambda_0 B_1 + \lambda_0^2 I)(D - \lambda_0 I)^{-1} + \lambda_0 I))f_1 + D\mathrm{L}^{-1} f_2.$$

Очевидно, $y_k \in D(\mathbb{L})$, $k = 1, 2$.

Из указанного представления решения следует, что обратный к оператору $\mathbb{L}$ задается матрицей (3).

Пусть обратим оператор $\mathbb{L}$. Проверим, что оператор L инъективен. Пусть $x \in \operatorname{Ker}\mathrm{L}$. Покажем, что $x = 0$. Заметим, что $(x, \dot{x}) \in D(\mathbb{L}) = C_b^{(1)} \times C_b^{(1)}$ и $\mathbb{L}(x, \dot{x}) = (Dx - Dx, B_2x + (D + B_1)Dx) = (0, \mathrm{L}x) = (0, 0)$. Из инъективности оператора $\mathbb{L}$ следует $x = 0$.

Докажем сюръективность оператора L. Рассмотрим уравнение $\mathrm{L}x = g$, где g — произвольная функция из C_b. Из обратимости оператора $\mathbb{L}$ следует, что существует решение $y = (x_1, x_2) \in C_b^{(1)} \times C_b^{(1)}$ уравнения $\mathbb{L}y = (0, g)$. Таким образом, имеют место равенства

$$\dot{x}_1 - x_2 = 0, \quad \dot{x}_2 + B_2x_1 + B_1x_2 = g.$$

Значит, $x_1 \in C_b^{(2)} = D(\mathrm{L})$ и $\mathrm{L}x_1 = g$, что и доказывает сюръективность оператора L. □

Доказательство теоремы 2. Условие разделенности корней Λ_1 и Λ_2 влечет обратимость оператора $\Lambda_1 - \Lambda_2$. Непосредственная проверка показывает, что обратным к оператору U является оператор с матрицей $\mathcal{U}^{-1}$ из (6) и имеет место первое из равенств (5). Второе равенство для операторных экспонент вытекает из подобия операторов $\mathbb{B}$ и Λ. □

Теорема 3 следует из равенств $\sigma(\mathbb{B}) = \sigma(\Lambda)$ (подобные операторы имеют одинаковые спектры), $\sigma(\Lambda) = -\sigma(\Lambda_1) \cup (-\sigma(\Lambda_2))$, выполнения условия (7) и соответствующего результата из ([1], гл. II, § 4).

Доказательство теоремы 4. Введем операторы $\mathrm{L}_k : C_b^{(1)}(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \subset C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \to C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, определяемые равенствами $\mathrm{L}_k x = \dot{x} - \Lambda_k x, \quad x \in C_b^{(1)}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $k = 1, 2$. Согласно ([1], гл. II, § 4) при выполнении условия (7) каждый из дифференциальных операторов L_k, $k = 1, 2$, обратим и обратные к ним операторы являются операторами свертки

$$\mathrm{L}_k^{-1} y = G_k * y, \quad y \in C_b, \quad k = 1, 2,$$

где G_k, $k = 1, 2$, задается равенством (8). Из теоремы 2 вытекает подобие дифференциального оператора $\mathbb{L}$ прямой сумме $\mathrm{L}_1 \oplus \mathrm{L}_2 : C_b^{(1)}(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2) \subset C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2) \to C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2)$, а оператором преобразования оператора $\mathbb{L}$ в оператор $\mathrm{L}_1 \oplus \mathrm{L}_2$ является оператор $\widetilde{U} : C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2) \to C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2)$ умножения на оператор U из (6). Таким образом, имеют место равенства

$$\mathbb{L} = U^{-1}(\mathrm{L}_1 \oplus \mathrm{L}_2)U, \quad \mathbb{L}^{-1} = U^{-1}(\mathrm{L}_1^{-1} \oplus \mathrm{L}_2^{-1})U.$$

Отсюда с учетом представлений для L_k^{-1}, $k = 1, 2$, вытекает указанное в теореме представление для оператора $\mathbb{L}^{-1}$. Из него следует формула (9) для оператора L^{-1}, если положить $f_1 = 0,\ f_2 = g$ и учесть перестановочность оператора Λ_2 с функцией Грина G_2. □

Доказательство теоремы 5. Ограниченность на $\mathbb{R}_+$ всех решений однородного дифференциального уравнения (10) влечет ограниченность всех решений однородного дифференциального уравнения

$$\dot{y} + \mathbb{B}y = 0, \quad t \geq 0. \tag{14}$$

Поскольку спектр $\sigma(\mathbb{B})$ оператора $\mathbb{B}$ согласно теореме 2 совпадает с множеством $\sigma(-\Lambda_1) \cup \sigma(-\Lambda_1)$, то условие (11) означает

$$\sigma(\mathbb{B}) \cap (i\mathbb{R}) = \{i\lambda_1, \ldots, i\lambda_m\}. \tag{15}$$

Каждое ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение $x \in C_b(\mathbb{R}_+, \mathcal{X})$ уравнения (14) можно представить в виде $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = e^{\mathbb{B}t}(x(0), \dot{x}(0))$. Операторная функция $t \mapsto e^{\mathbb{B}t} : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathcal{X}^2$ ограничена и допускает расширение на $\mathbb{C}$ до целой функции экспоненциального типа [11], [12]. Выполнение условия (15) позволяет воспользоваться результатом из [10], согласно которому существует семейство операторнозначных функций $\mathbb{P}_k : \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathcal{X}^2$ с указанными в теореме 5 свойствами. □

Теорема 6 является непосредственным следствием теоремы 5. Свойства функций a_k, $1 \leq k \leq m$, из представления (12) вытекают из свойства 2) функций $\mathbb{P}_k$, $1 \leq k \leq m$.

3. О расщеплении дифференциального оператора методом подобных операторов

Здесь рассматриваются дифференциальные уравнения (1), (2) и соответствующие операторы $\mathrm{L} : D(\mathrm{L}) \subset C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \to C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ и $\mathbb{L} : D(\mathbb{L}) \subset C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2) \to C_b(\mathbb{R}, \mathcal{X}^2)$ при условии, что операторный коэффициент B_2 представим в виде $B_2 = C^2$ и оператор $C \in \operatorname{End} \mathcal{X}$ обратим. Оператор $(-B_1)$ будем обозначать символом B. Таким образом, оператору $\mathbb{B} \in \operatorname{End} \mathcal{X}^2$ соответствует матрица

$$\mathbb{B} \sim \begin{pmatrix} 0 & -I \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ C^2 & -B \end{pmatrix}.$$

Представим его в виде

$$\mathbb{B} = \mathcal{A}_0 - \mathcal{B}_0,$$

где операторы $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_0$ принадлежат $\operatorname{End}\mathcal{X}^2$ и задаются матрицами

$$\mathcal{A}_0 \sim \begin{pmatrix} 0 & -I \\ C^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_0 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Условие (13), означающее, что $0 \notin \sigma(C)$, гарантирует наличие разделенных корней $\Lambda_1 = -iC$ и $\Lambda_2 = iC$ операторного уравнения

$$X^2 + C^2 = 0.$$

Согласно теореме 2 оператор $\mathcal{A}_0$ подобен оператору $\mathcal{A} \in \operatorname{End}\mathcal{X}^2$, заданному матрицей

$$\mathcal{A} \sim \begin{pmatrix} -\Lambda_1 & 0 \\ 0 & -\Lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iC & 0 \\ 0 & -iC \end{pmatrix}.$$

Оператору преобразования U и обратному к нему U^{-1} соответствуют матрицы

$$U \sim \mathcal{U} = \begin{pmatrix} I & I \\ -iC & iC \end{pmatrix}, \quad U^{-1} \sim \mathcal{U}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & iC^{-1} \\ I & -iC^{-1} \end{pmatrix}.$$

Из отмеченного следуют равенства

$$U^{-1}\mathbb{B}U = U^{-1}\mathcal{A}_0U - U^{-1}\mathcal{B}_0U = \mathcal{A} - \mathcal{B},$$

означающие подобие оператора $\mathbb{B}$ оператору $\mathcal{A} - \mathcal{B}$. Здесь оператор $\mathcal{B}$ имеет матрицу вида

$$\mathcal{U}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\mathcal{U} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} C^{-1}BC & -C^{-1}BC \\ -C^{-1}BC & C^{-1}BC \end{pmatrix}.$$

При выбранной норме в $\mathcal{X}^2$ из этого представления матрицы оператора $\mathcal{B}$ получаем соотношение

$$\|\mathcal{B}(x_1,x_2)\|^2 = \frac{1}{4}(\|C^{-1}BCx_1 - C^{-1}BCx_2\|^2 + \| - C^{-1}BCx_1 + C^{-1}BCx_2\|^2) \le$$
$$\le \frac{1}{4}\|C^{-1}BC\|^2 4(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2) = \|C^{-1}BC\|^2\|(x_1,x_2)\|^2, \quad (x_1,x_2) \in \mathcal{X}^2,$$

из которого следует оценка

$$\|\mathcal{B}\| \le \|C\|\,\|C^{-1}\|\,\|B\|. \tag{16}$$

Итак, установлена

Лемма 1. *Оператор $\mathbb{B}$ подобен оператору $\mathcal{A} - \mathcal{B}$, где оператор $\mathcal{B}$ допускает оценку* (16).

К оператору $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ (оператору $\mathbb{B}$) применим метод подобных операторов, развиваемый в работах [13]–[17].

Основным результатом данного раздела является приводимая далее теорема 7 о подобии оператора $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ (а следовательно, в силу леммы 1 и оператора $\mathbb{B}$) оператору, матрица которого имеет блочно-диагональный вид $\mathcal{A} - \mathcal{B} \sim \left(\begin{smallmatrix} \widetilde{\Lambda}_1 & 0 \\ 0 & \widetilde{\Lambda}_2 \end{smallmatrix}\right)$, где $\widetilde{\Lambda}_1, \widetilde{\Lambda}_2 \in \operatorname{End}\mathcal{X}$.

Рассмотрим два трансформатора $J : \operatorname{End}\mathcal{X}^2 \to \operatorname{End}\mathcal{X}^2$, $\Gamma : \operatorname{End}\mathcal{X}^2 \to \operatorname{End}\mathcal{X}^2$, т. е. два оператора в пространстве операторов (согласно терминологии М.Г.Крейна). Для этого определим канонические проекторы $P_1, P_2 \in \operatorname{End}\mathcal{X}^2$ равенствами

$$P_1x = (x_1, 0), \quad P_2x = (0, x_2), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2.$$

Отметим, что $P_1 + P_2 = \mathbb{I}$, $\|P_1\| = \|P_1\| = 1$.

Трансформатор $J : \operatorname{End}\mathcal{X}^2 \to \operatorname{End}\mathcal{X}^2$ зададим равенством

$$JX = P_1XP_1 + P_2XP_2, \quad X \in \operatorname{End}\mathcal{X}^2.$$

Таким образом, если $X \sim (X_{ij})$, $i,j = 1,2$, то матрица оператора JX имеет блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}.$$

Трансформатор $\Gamma : \operatorname{End}\mathcal{X}^2 \to \operatorname{End}\mathcal{X}^2$ определим на любом операторе $X \in \operatorname{End}\mathcal{X}^2$ с помощью решения $Y^0 \in \operatorname{End}\mathcal{X}^2$ линейного уравнения

$$\mathcal{A}Y - Y\mathcal{A} = X - JX,$$

удовлетворяющего условию $JY^0 = 0$. Тогда матрица $\left(\begin{smallmatrix} 0 & Y^0_{12} \\ Y^0_{21} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ оператора Y^0 будет решением уравнения

$$\begin{pmatrix} iC & 0 \\ 0 & -iC \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & Y_{12} \\ Y_{21} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & Y_{12} \\ Y_{21} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} iC & 0 \\ 0 & -iC \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, операторы $Y^0_{12}, Y^0_{21} \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ являются решениями уравнений

$$iCY_{12} + iY_{12}C = X_{12}, \quad -iCY_{21} - iY_{21}C = X_{21}. \tag{17}$$

Далее считаем выполненным условие

$$0 \notin \sigma(C) + \sigma(C) = \{\lambda + \mu \mid \lambda \in \sigma(C),\ \mu \in \sigma(C)\}.$$

Это условие гарантирует ([1], гл. I, § 3) разрешимость и единственность решения каждого из уравнений (17). Для этих решений имеют место представления

$$Y^0_{12} = -\frac{1}{4\pi^2}\oint_{\partial(iC)}\oint_{\partial(-iC)} \frac{(iC-\lambda I)^{-1}X_{12}(-iC-\mu I)^{-1}}{\lambda-\mu}\,d\lambda\,d\mu, \tag{18}$$

$$Y^0_{21} = -\frac{1}{4\pi^2}\oint_{\partial(-iC)}\oint_{\partial(iC)} \frac{(-iC-\lambda I)^{-1}X_{21}(iC-\mu I)^{-1}}{\lambda-\mu}\,d\lambda\,d\mu, \tag{19}$$

где $\partial(-iC)$, ∂iC — контуры, охватывающие спектры операторов $-iC$ и iC соответственно ([1], гл. I, § 3).

Трансформаторы $\Gamma_{12} : \operatorname{End}\mathcal{X} \to \operatorname{End}\mathcal{X}$, $\Gamma_{21} : \operatorname{End}\mathcal{X} \to \operatorname{End}\mathcal{X}$ зададим равенствами $\Gamma_{12}X_{12} = Y^0_{12}$, $\Gamma_{21}X_{21} = Y^0_{21}$. Это означает, что выполнены соотношения

$$iC(\Gamma_{12}X_{12}) + i(\Gamma_{12}X_{12})C = X_{12}, \quad -iC(\Gamma_{21}X_{21}) - i(\Gamma_{21}X_{21})C = X_{21}. \tag{20}$$

Из представлений (18)–(20) вытекает ограниченность трансформаторов Γ_{12} и Γ_{21}. Обозначим

$$\gamma = \max\{\|\Gamma_{12}\|, \|\Gamma_{21}\|\}. \tag{21}$$

При этом трансформатору $\Gamma : \operatorname{End}\mathcal{X}^2 \to \operatorname{End}\mathcal{X}^2$ на каждом операторе $X \in \operatorname{End}\mathcal{X}^2$ с матрицей (X_{ij}), $i,j = 1,2$, соответствует матрица

$$\Gamma X \sim \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_{12}X_{12} \\ \Gamma_{21}X_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$(\Gamma X)x = ((\Gamma_{12}X_{12})x_2, (\Gamma_{21}X_{21})x_1), \quad x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2.$$

Отметим, что для любого оператора $X \in \operatorname{End}\mathcal{X}^2$ и любого вектора $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2$ имеет место оценка

$$\|(\Gamma X)x\|^2 = \|(\Gamma_{12}X_{12})x_2\|^2 + \|(\Gamma_{21}X_{21})x_1\|^2 \le \max\{\|\Gamma_{12}X_{12}\|^2, \|\Gamma_{21}X_{21}\|^2\}\|x\|^2. \tag{22}$$

В случае гильбертова пространства и самосопряженности оператора C величина γ может быть эффективно вычислена. Имеет место

Лемма 2. *Пусть X — гильбертово пространство и $C = C^*$ — самосопряженный оператор, который является либо равномерно положительным, либо равномерно отрицательным. Тогда*

$$2\gamma = \|C^{-1}\| = r(C^{-1}) = 1/\min_{\lambda\in\sigma(C)} |\lambda|, \tag{23}$$

где $r(C^{-1})$ — спектральный радиус оператора C^{-1}.

Доказательство. Будем считать для определенности, что оператор C является равномерно отрицательным, и рассмотрим первое из уравнений (17), являющееся определяющим для трансформатора Γ_{12}. Из [12], [17] следует, что для него справедливо представление

$$\Gamma_{12}X = i\int_0^\infty e^{Ct}Xe^{Ct}\,dt, \quad X \in \operatorname{End}\mathcal{X}. \tag{24}$$

Из (24) непосредственно вытекает оценка (23), так как

$$\|\Gamma_{12}X\| \le \int_0^\infty e^{-2t\min\limits_{\lambda\in\sigma(C)}|\lambda|}\|X\|\,dt = \frac{1}{2\min_{\lambda\in\sigma(C)}|\lambda|}\|X\|, \ X \in \operatorname{End}\mathcal{X}. \qquad \square$$

Воспользуемся методом подобных операторов и выясним, при каких условиях существует оператор $X \in \operatorname{End}\mathcal{X}$ такой, что выполняется равенство

$$(\mathcal{A}-\mathcal{B})(I+\Gamma X) = (I+\Gamma X)(\mathcal{A}-JX), \tag{25}$$

причем оператор $I+\Gamma X$ обратим в $\operatorname{End}\mathcal{X}$.

Из (25), используя матричные представления для операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $X, \Gamma X$, JX, с учетом соотношений (20) получаем систему операторных уравнений

$$\begin{aligned}
2X_{11} &= -C^{-1}BC(\Gamma_{21}X_{21}) + C^{-1}BC,\\
2X_{12} &= C^{-1}BC(\Gamma_{12}X_{12}) - (\Gamma_{12}X_{12})C^{-1}BC + (\Gamma_{12}X_{12})C^{-1}BC(\Gamma_{12}X_{12}) - C^{-1}BC,\\
2X_{21} &= C^{-1}BC(\Gamma_{21}X_{21}) - (\Gamma_{21}X_{21})C^{-1}BC + (\Gamma_{21}X_{21})C^{-1}BC(\Gamma_{21}X_{21}) - C^{-1}BC,\\
2X_{22} &= -C^{-1}BC(\Gamma_{12}X_{12}) + C^{-1}BC.
\end{aligned} \tag{26}$$

Отметим соотношение

$$C(\Gamma_{ij}X_{ij})C^{-1} = \Gamma_{ij}(CX_{ij}C^{-1}), \quad i,j = 1,2, \quad i \ne j, \tag{27}$$

вытекающее из представлений (18)–(20) трансформаторов Γ_{ij}, $i,j = 1,2, i \ne j$. В результате замены переменных $Y_{ij} = CX_{ij}C^{-1}$, $i,j = 1,2$, в (26) приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned}
2Y_{11} &= -B(\Gamma_{21}Y_{21}) + B,\\
2Y_{12} &= B(\Gamma_{12}Y_{12}) - (\Gamma_{12}Y_{12})B + (\Gamma_{12}Y_{12})B(\Gamma_{12}Y_{12}) - B,\\
2Y_{21} &= B(\Gamma_{21}Y_{21}) - (\Gamma_{21}Y_{21})B + (\Gamma_{21}Y_{21})B(\Gamma_{21}Y_{21}) - B,\\
2Y_{22} &= -B(\Gamma_{12}Y_{12}) + B,
\end{aligned} \tag{28}$$

рассматриваемых в $\operatorname{End}\mathcal{X}$.

Специфика этой системы такова, что достаточно найти решения $\widetilde{Y}_{12}$ и $\widetilde{Y}_{21}$ второго и третьего уравнений системы, чтобы определить из первого и четвертого уравнений операторы $\widetilde{Y}_{11} = -\frac{1}{2}B(\Gamma_{21}\widetilde{Y}_{21}) + \frac{1}{2}B$ и $\widetilde{Y}_{22} = -\frac{1}{2}B(\Gamma_{12}\widetilde{Y}_{12}) + \frac{1}{2}B$ и, следовательно, решить систему (28). Отметим, что второе и третье уравнения в этой системе идентичны, поэтому достаточно доказать разрешимость одного из этих уравнений.

Рассмотрим второе уравнение из системы (28). Определим трансформатор $\Phi : \operatorname{End}\mathcal{X} \to \operatorname{End}\mathcal{X}$ равенством

$$2\Phi(Y) = B(\Gamma_{12}Y) - (\Gamma_{12}Y)B + (\Gamma_{12}Y)B(\Gamma_{12}Y) - B, \quad Y \in \operatorname{End}\mathcal{X},$$

и покажем существование такого $r > 0$, что из неравенства $\|Y\| \le \|B\|r$ следует неравенство $\|\Phi(Y)\| \le \|B\|r$, т. е. оператор Φ преобразует шар $\overline{B}(0, \beta r) \subset \operatorname{End}\mathcal{X}$ радиуса βr, где $\beta = \|B\|$, в себя. Действительно, из оценки

$$\|\Phi(Y)\| \le \gamma\|B\|^2 r + \frac{1}{2}\gamma^2\|B\|^3 r^2 + \frac{1}{2}\|B\| \le \|B\|r$$

следует, что число r должно удовлетворять неравенству

$$\gamma^2\|B\|^2 r^2 + 2(\gamma\|B\| - 1)r + 1 \le 0.$$

Пусть выполнено условие

$$2\gamma\|B\| < 1, \tag{29}$$

где γ определено согласно (21). Тогда такое r существует и вычисляется по формуле

$$0 < r = \frac{1 - \gamma\|B\| - \sqrt{1 - 2\gamma\|B\|}}{\gamma^2\|B\|^2} = (1 - \gamma\|B\| + \sqrt{1 - 2\gamma\|B\|})^{-1}. \tag{30}$$

Покажем, что оператор $\Phi : \operatorname{End}\mathcal{X} \to \operatorname{End}\mathcal{X}$ является сжимающим в шаре $\overline{B}(0, \beta r)$. Для $Z_1, Z_2 \in \overline{B}(0, \beta r)$ имеем

$$\|\Phi(Z_1) - \Phi(Z_2)\| \le (\gamma\|B\| + r\gamma^2\|B\|^2)\|Z_1 - Z_2\| = q\|Z_1 - Z_2\|,$$

где $q = \gamma\|B\|(1 + \gamma\|B\|r)$. Учитывая в (30) первое выражение для r, нетрудно убедиться, что верно неравенство $q \le 2\gamma\|B\| < 1$ в силу предположения (29). Таким образом, оператор $\Phi : \overline{B}(0, \beta r) \subset \operatorname{End}\mathcal{X} \to \overline{B}(0, \beta r)$ является сжимающим с коэффициентом сжатия $q<1$. Следовательно, в шаре $\overline{B}(0, \beta r)$ существует единственное решение второго уравнения системы (28). Это решение может быть найдено методом последовательных приближений.

При таких же условиях разрешимо и третье уравнение системы (28).

Из условия $\widetilde{Y}_{ij} \subset \overline{B}(0, \beta r)$, $i \ne j$, $i, j = 1, 2$, и представления $\widetilde{Y}_{ii}$, $i = 1, 2$, из первого и последнего уравнений системы (28) вытекают оценки

$$\|\widetilde{Y}_{ij}\| \le \begin{cases} \|B\|(1 - \gamma\|B\| + \sqrt{1 - 2\gamma\|B\|})^{-1}, & i \ne j; \\ \frac{1}{2}\|B\|(1 + \gamma\|B\|(1 - \gamma\|B\| + \sqrt{1 - 2\gamma\|B\|})^{-1}), & i = j. \end{cases} \tag{31}$$

Покажем, что оператор $I + \Gamma\widetilde{X}$, где $\widetilde{X}$ — оператор, заданный матрицей $(\widetilde{X}_{ij})$, $i, j = 1, 2$, обратим в $\operatorname{End}\mathcal{X}$. Для этого воспользуемся его матричным представлением, а также свойством (27) трансформаторов $\Gamma_{ij} : \operatorname{End}\mathcal{X} \to \operatorname{End}\mathcal{X}$, $i \ne j$, $i, j = 1, 2$. Имеем

$$I + \Gamma\widetilde{X} \sim \begin{pmatrix} I & (\Gamma_{12}\widetilde{X}_{12}) \\ (\Gamma_{21}\widetilde{X}_{21}) & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & C^{-1}(\Gamma_{12}\widetilde{Y}_{12})C \\ C^{-1}(\Gamma_{21}\widetilde{Y}_{21})C & I \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & (\Gamma_{12}\widetilde{Y}_{12}) \\ (\Gamma_{21}\widetilde{Y}_{21}) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $\|\Gamma\widetilde{Y}_{12}\| \le \gamma\|B\|r = \gamma\|B\|(1 - \gamma\|B\| + \sqrt{1 - 2\gamma\|B\|})^{-1} < 2\gamma\|B\| < 1$. Аналогично $\|\Gamma\widetilde{Y}_{21}\| < 2\gamma\|B\| < 1$. Поэтому из (22) следует $\|\Gamma\widetilde{Y}\| < 1$, и оператор $I + \Gamma\widetilde{Y}$, а следовательно, и оператор $I + \Gamma\widetilde{X}$ обратимы.

Таким образом, доказано равенство (25), из которого следует представление

$$\mathcal{A} - \mathcal{B} = (I + \Gamma\widetilde{X})(\mathcal{A} - J\widetilde{X})(I + \Gamma\widetilde{X})^{-1}.$$

Кроме того, по лемме 1 имеет место соотношение $\mathcal{A} - \mathcal{B} = U^{-1}\mathbb{B}U$. Приравняв оба выражения для $\mathcal{A} - \mathcal{B}$, получим

$$U^{-1}\mathbb{B}U = (I + \Gamma\widetilde{X})(\mathcal{A} - J\widetilde{X})(I + \Gamma\widetilde{X})^{-1},$$

иначе

$$\mathbb{B}U(I+\Gamma\widetilde{X})=U(I+\Gamma\widetilde{X})(\mathcal{A}-J\widetilde{X}),$$

что означает подобие операторов $\mathbb{B}$ и $\mathcal{A}-J\widetilde{X}$.

Таким образом, доказана

Теорема 7. *Пусть для оператора $C\in\operatorname{End}\mathcal{X}$ выполнено условие $0\notin\sigma(c)+\sigma(c)$, а для оператора $B\in\operatorname{End}\mathcal{X}$ имеет место оценка* (29). *Здесь γ определяется согласно* (21), *причем $\gamma=\|C^{-1}\|/2=(2\min_{\lambda\in\sigma(C)}|\lambda|)^{-1}$, если C — самосопряженный равномерно знакопостоянный оператор.*

Тогда существуют операторы $\widetilde{X}_{ij}\in\operatorname{End}\mathcal{X}$, $i,j=1,2$, такие, что оператор $\mathbb{B}$ подобен оператору $\widetilde{\mathbb{B}}$ с блочно-диагональной матрицей $\widetilde{\mathbb{B}}\sim(iC-\widetilde{X}_{11})\oplus(-iC-\widetilde{X}_{22})$, а дифференциальный оператор $\mathbb{L}$ подобен оператору $(D+iC-\widetilde{X}_{11})\oplus(D-iC-\widetilde{X}_{22})$.

Операторы $\widetilde{X}_{ij}\in\operatorname{End}\mathcal{X}$, $i,j=1,2$, представимы в виде $\widetilde{X}_{ij}=C^{-1}\widetilde{Y}_{ij}C$, где операторы $\widetilde{Y}_{ij}\in\operatorname{End}\mathcal{X}$, $i,j=1,2$, являются решением системы операторных уравнений (28) *и могут быть найдены методом последовательных приближений. Имеют место оценки $\|\widetilde{X}_{ij}\|\le\|C\|\,\|C^{-1}\|\,\|\widetilde{Y}_{ij}\|$, $i,j=1,2$, а для операторов $\widetilde{Y}_{ij}$, $i,j=1,2$, выполнены неравенства* (31).

Литература

[1] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве* (Наука, М., 1970).

[2] Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве* (Наука, М., 1967).

[3] Хенри Д. *Геометрическая теория полулинейных алгебраических уравнений* (Мир, М., 1985).

[4] Левитан Б.М., Жиков В.Б. *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения* (МГУ, М., 1978).

[5] Баскаков А.Г. *Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов,* Функц. анализ и его прилож. **30** (3), 1–11 (1996).

[6] Баскаков А.Г. *Линейные дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами и полугруппы разностных операторов*, Матем. заметки. **59** (6), 586–593 (1996).

[7] Баскаков А.Г. *Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений*, УМН **68** (1), 77–128 (2013).

[8] Крейн М.Г., Лангер Г.К. *О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуума*, Тр. Междунар. симпозиума в Тбилиси “Приложение теории функций в механике сплошной среды” **2**, 283–322 (Наука, М., 1965).

[9] Маркус А.С., Мереуца И.В. *О полном наборе корней операторного уравнения, соответствующего полиномиальному пучку*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **37** (5), 1108–1131 (1973).

[10] Баскаков А.Г. *Гармонический и спектральный анализ операторов с ограниченными степенями и ограниченных полугрупп операторов на банаховом пространстве*, Матем. заметки **97** (2), 174–190 (2015).

[11] Баскаков А.Г., Калужина Н.С., Поляков Д.М. *Медленно меняющиеся на бесконечности полугруппы операторов,* Изв. вузов. Матем., № 7, 3–14 (2014).

[12] Баскаков А.Г., Калужина Н.С. *Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений,* Матем. заметки **92** (5), 643–661 (2012).

[13] Баскаков А.Г. *Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов,* Сиб. матем. журн. **24** (1), 21–39 (1983).

[14] Баскаков А.Г. *Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **50** (3), 435–457 (1986).

[15] Баскаков А.Г. *Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов,* Известия РАН. Сер. матем. **58** (4), 3–32 (1994).

[16] Баскаков А.Г., Дербушев А.И., Щербаков А.О. *Метод подобных операторов в спектральном анализе самосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом*, Изв. РАН. Сер. матем. **75** (3), 3–28 (2011).

[17] Баскаков А.Г., Поляков Д.М. *Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом*, Матем. сб. **208** (1), 3–47 (2017).

А.Г. Баскаков

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394006, Россия,

e-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Т.К. Кацаран

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394006, Россия,

e-mail: a.limarev@yandex.ru

Т.И. Смагина

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394006, Россия,

e-mail: smagin@math.vsu.ru

A.G. Baskakov, T.K. Katsaran, and T.I. Smagina

Linear differential second-order equations in Banach space and splitting of operators

Abstract. We consider a linear differential second order equation in complex Banach space with bounded operator coefficients. We study the question of existence of bounded on the whole real axis solutions (with bounded right-hand side) and their asymptotic behaviour. The research is conducted in case of separated roots of the corresponding "algebraic" operator equation or providing that the norm of operator, placed in front of the first derivative in the equation, is small. In the latter case we apply the method of similar operators (operator splitting theorem). The main results are obtained with the use of the theorems on similarity transformation of second order operator matrix to a block-diagonal one.

Keywords: Banach space, differential second-order equation, the method of similar operators, operators splitting.

A.G. Baskakov

Voronezh State University,
1 University Sq., Voronezh, 394006, Russia,

e-mail: anatbaskakov@yandex.ru

T.K. Katsaran

Voronezh State University,
1 University Sq., Voronezh, 394006, Russia,

e-mail: a.limarev@yandex.ru

T.I. Smagina

Voronezh State University,
1 University Sq., Voronezh, 394006, Russia,

e-mail: smagin@math.vsu.ru