ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 1 (440)

УДК 517.518.235

Е.С. ПАНАСЕНКО

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ КЛАССОВ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Статья посвящена теоремам вложения для классов функций, частные производные которых принадлежат различным симметричным пространствам. Доказательства приведенных результатов базируются на применении интерполяционных конструкций [1], теории пространств Соболева [2] и установленных в работах [3], [4] функциональных неравенствах.

В статье используется терминология, принятая в теории симметричных пространств [1]. Если E — симметричное пространство (СП) функций, то φ_E — фундаментальная функция пространства E ([1], с. 37), E' — ассоциированное для E пространство ([1], с. 65). Через M_δ $(0 \le \delta \le 1)$ обозначается пространство Марцинкевича M_ψ ([1], с. 154) с $\psi(s) = s^{1-\delta}$; предполагается, что нормы в пространствах Лебега L_p $(1 \le p \le \infty)$, Орлича L_M, Марцинкевича M_ψ определены стандартным образом [1]. Если E_0, E_1 — СП и $E_0 \subset E_1$, то через E_1/E_0 обозначается пространство мультипликаторов из E_0 в E_1, состоящее из функций h, для которых имеет смысл и конечна норма
$$\|h; E_1/E_0\| = \sup\{\|hg; E_1\|, \|g; E_0\| \le 1\};$$
пространство E_1/E_0 также симметрично. Набору СП $E_1, \dots, E_k$ и констант $\tau_1 > 0, \dots, \tau_k > 0$, $\tau_1 + \dots + \tau_k = 1$ можно сопоставить пространство средних Кальдерона $E_1^{\tau_1} \dots E_k^{\tau_k}$ [1], также являющееся симметричным. Запись $E \prec F$ означает, что СП F мажорирует СП E [4].

Пусть Ω — область в R^n (не исключается случай $\Omega = R^n$), ω — ограниченное открытое подмножество области Ω, $\Box(h) = \{(x_1, \dots, x_n) : 0 < x_i < h,\ i = 1, \dots, n\}$ — куб в R^n, причем $\omega + \Box(h) = \{x+y,\ x \in \omega,\ y \in \Box(h)\} \subset \Omega$. Паре (Ω, ω) и натуральному числу ℓ сопоставим линейное пространство $W^\ell(\Omega, \omega)$ функций $f : \Omega \to R$, равных 0 вне ω и имеющих в Ω производные в смысле Соболева $D^\alpha f$ до порядка ℓ включительно. Здесь и далее используются обозначения: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ — порядок мультииндекса, $\alpha\,! = \alpha_1\,! \dots \alpha_n\,!$, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$.

Предположим, что каждому мультииндексу α порядка ℓ сопоставлено максимальное СП $P_\alpha(\omega)$ функций на множестве ω измеримых относительно n-мерной лебеговой меры mes_n. Обозначим через $W^\ell(P_\alpha; \Omega, \omega)$ подпространство $W^\ell(\Omega, \omega)$, состоящее из функций f, для которых имеет смысл и конечна норма
$$\|f; W^\ell(P_\alpha; \Omega, \omega)\| = \sum_{|\alpha| = \ell} \|D^\alpha f; P_\alpha(\omega)\|.$$
Далее $a = \mathrm{mes}_n\, \omega$, P_α — СП функций на $(0, a)$, соответствующее СП $P_\alpha(\omega)$, $\tau_\gamma = (|\gamma|)!/n^{-|\gamma|}\gamma!$, где $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — произвольный мультииндекс
$$P = \prod_{|\alpha| = \ell} P_\alpha^{\tau_\alpha},$$
т. е. P — пространство средних Кальдерона для набора СП P_α и констант τ_α $(|\alpha| = \ell)$, Q — симметричное пространство функций на $(0, a)$, $Q(\omega)$ — соответствующее Q пространство функций на ω, ρ_α — нижний показатель растяжения пространства P_α ([1], с. 134).

Теорема 1. *Пусть для каждого мультииндекса* β $(1 \le |\beta| \le \ell - 1,\ \ell > 1)$*выполняется неравенство*

$$\sum_{|\gamma|=\ell-|\beta|} \rho_{\beta+\gamma}\tau_\gamma > \frac{\ell - |\beta|}{n}. \tag{1}$$

Если оператор

$$Az = \int_t^a s^{\ell/n-1} z(s)\,ds$$

действует и непрерывен из $P(0,a)$ *в* $Q(0,a)$*, то пространство* $W^\ell(P_\alpha, \Omega, \omega)$ *непрерывно вложено в СП* $Q(\omega)$ *и справедливо неравенство*

$$\|f; Q(\omega)\| \le c \prod_{|\alpha|=\ell} \|D^\alpha f; P_\alpha(\omega)\|^{\tau_\alpha} \tag{2}$$

с некоторой постоянной c*.*

Доказательство теоремы проводится методом математической индукции по параметру ℓ. При $\ell = 1$ условие (1) теряет смысл, однако утверждение теоремы сохраняется [3].

Комбинируя теорему 1 с известными признаками непрерывности оператора A, можно получить более обозримые теоремы вложения. Полезно заметить, что A — вольтерров интегральный оператор с однородным ядром. Сформулируем несколько следствий из теоремы 1.

Следствие 1. Пусть нижние показатели растяжения ρ_α $(|\alpha| = \ell)$ удовлетворяют оценкам (1) для каждого мультииндекса β порядка не выше $\ell - 1$. Тогда верно неравенство (2) с $Q = P/M_{\ell/n}$.

Нижний показатель растяжения пространства Лебега L_p равен $1/p$. Если $P_\alpha = L_{p_\alpha}$, $1 \le p_\alpha \le \infty$, то (1) сводится к оценкам

$$\sum_{|\gamma|=\ell-|\beta|} \frac{\tau_\gamma}{p_{\beta+\gamma}} > \frac{\ell - |\beta|}{n}, \tag{3}$$

пространство средних Кальдерона совпадает с пространством L_p, где

$$\frac{1}{p} = \sum_{|\alpha|=\ell} \tau_\alpha \frac{1}{p_\alpha}.$$

Следствие 2. Пусть имеют место оценки (3), где $|\beta| = 1, \dots, \ell - 1$. Тогда справедливо неравенство (2), в котором $P_\alpha = L_{p_\alpha}$, $|\alpha| = \ell$, пространство Q при $p\ell < n$ совпадает с пространством $L_p/M_{\ell/n}$, $Q = L_\infty$ при $p\ell > n$, и, наконец, при $p\ell = n$ Q есть пространство Орлича L_M, порождаемое N-функцией $M(t) = \exp|t|^{p/(p-1)} - 1$.

Следствие 3. Пусть СП P мажорирует [4] СП Q $(Q \prec P)$. Пусть показатели ρ_α, $|\alpha| = \ell$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Если

$$\sup_{0<t<a} \{\varphi_Q(t)\|s^{\ell/n-1}; P'(t,a)\|\} < \infty,$$

то имеет место оценка (2).

Кратко обсудим новые моменты, возникающие при изучении пространств функций, не удовлетворяющих нулевым граничным условиям. Здесь существенную роль начинают играть младшие производные и геометрические свойства области определения рассматриваемых функций.

Пусть Ω — ограниченная область в R^n, $W^\ell(\Omega)$ — пространство функций, имеющих в Ω производные в смысле Соболева до порядка ℓ включительно. Предположим, что каждому мультииндексу β порядка $|\beta| \le \ell$ поставлено в соответствие СП $P_\beta(\Omega)$ функций на области Ω. Обозначим через $W^\ell(P_\beta, \Omega)$ часть $W^\ell(\Omega)$, состоящую из функций f, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|f; W^\ell(P_\beta, \Omega)\| = \sum_{|\beta| \le \ell} \|D^\beta f; P_\beta(\Omega)\|.$$

Пространство $W^\ell(P_\beta, \Omega)$ с данной нормой полно.

Изучение теорем вложения для пространства $W^\ell(P_\beta; \Omega)$ может быть редуцировано к рассмотренным выше результатам при выполнении следующих условий: 1) СП P_β непрерывно вложено в СП P_γ, если $\beta \le \gamma$; 2) область Ω удовлетворяет условию куба ([2], с. 119).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1), 2). *Пусть* $a = \mathrm{mes}_n\,\Omega$*, пространства* P_α $(|\alpha| = \ell)$, Q *удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Тогда пространство* $W^\ell(P_\beta, \Omega)$ *непрерывно вложено в пространство* $Q(\Omega)$.

Условие 1) может быть заменено любым другим, обеспечивающим выполнение следующего требования: каждая функция класса $C^\infty(\Omega)$, имеющая ограниченные производные до порядка ℓ включительно, является мультипликатором в пространстве $W^\ell(P_\beta, \Omega)$. Аналогично условие куба, фигурирующее в требовании 2), можно заменить некоторым условием рога ([2], § 8) или бруса [3], полнее учитывающим степень анизотропности набора P_α $(|\alpha| = \ell)$. Например, если все пространства P_α одинаковы (изотропный случай), то 2) можно заменить условием конуса для области Ω.

Литература

1. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.
2. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* – М.: Наука, 1975. – 480 с.
3. Климов В.С. *К теоремам вложения анизотропных классов функций* // Матем. сб. – 1985. – Т. 127. – № 2. – С. 198–208.
4. Климов В.С. *Функциональные неравенства и обобщенные емкости* // Матем. сб. – 1996. – Т. 187. – № 1. – С. 41–54.

Орловский филиал
Всероссийского заочного
финансово-экономического института

Поступила
03.09.1997