ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 5 (504)

УДК 515.124

Е.Н. СОСОВ

ОБ АНАЛОГАХ СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ В СПЕЦИАЛЬНОМ МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В специальном метрическом пространстве вводятся два аналога слабой сходимости последовательности в вещественном гильбертовом пространстве и исследуются их свойства.

1. Необходимые определения и теоремы

Пусть в метрическом пространстве (X,ρ) выделено семейство S лучей (т. е. образов множества R_+ всех неотрицательных вещественных чисел со стандартной метрикой при изометрических отображениях в пространство (X,ρ) ([1], с. 52)) с общим началом в точке $p\in X$, удовлетворяющее следующим условиям.

(A) Для каждой точки $x\in X$, отличной от точки p, найдется единственный луч l_x из семейства S, содержащий эту точку.

(B) Для каждой последовательности точек (x_n) $(n=1,2,\dots)$, сходящейся в пространстве X к некоторой точке $x\neq p$, последовательность лучей $(l_{x_n})\in S$ $(n=1,2,\dots)$ поточечно сходится к лучу $l_x\in X$ (лучи рассматриваются в натуральной параметризации).

В дальнейшем будем налагать на пространство X дополнительные условия (C), (D) или (E).

(C) Любые две различные точки $x,y\in X$ можно соединить единственным сегментом $[x,y]$ (т. е. кривой, длина которой равна расстоянию между ее концами ([1], с. 42)), и каждый луч из семейства S можно единственным образом продолжить до ориентированной прямой (образа множества R всех вещественных чисел со стандартной метрикой при изометрическом отображении в пространство (X,ρ)), ориентация которой определяется этим лучом.

Полученное семейство ориентированных прямых обозначим через $\widehat{S}$ и отметим, что полное метрическое пространство, удовлетворяющее условию (C), является геодезическим пространством [2].

Прежде чем формулировать условия (D), (E), напомним некоторые определения и примем следующие обозначения: $B[x,r]$ ($B(x,r)$) — замкнутый (открытый) шар с центром в точке $x\in X$ радиуса $r>0$; $\rho[x,M]=\inf\limits_{y\in M}\rho[x,y]$, где $x\in X$, $M\subset X$; $\overline{M}$ ($\mathring{M}$) — замыкание (внутренность) множества $M\subset X$; ΔOAB — треугольник в евклидовой плоскости с длинами сторон $a=\rho[p,x]$, $b=\rho[p,y]$, $c=\rho[x,y]$, соответствующий треугольнику pxy пространства X, удовлетворяющего условиям (A), (B), (C); $\gamma_{lm}[a,b]$ — величина угла при вершине O в треугольнике OAB; $\overline{\alpha}[l,m]=\varlimsup\limits_{a\to0,\,b\to0}\gamma_{lm}[a,b]$ — верхний угол между лучами l, m, где $x\in l$, $y\in m$ [3]; $l\in S$, $\psi_l:X\to R$, $\psi_l[x]=\rho[p,x]\cos\overline{\alpha}[l_x,l]$ при $x\neq p$, $\psi_l[p]=0$; $\Psi_p(X)=\{\psi_l:X\to R: l\in S\}$.

Если выполнено условие (C) и $\lambda\in[0,1]$ ($\lambda\in R_+$), то обозначим через $\omega_\lambda[x,y]$ ($\omega_\lambda[p,x]$) точку на сегменте $[x,y]\subset X$ (луче $l_x\subset S$), удовлетворяющую условию $\rho[x,\omega_\lambda[x,y]]=\lambda\rho[x,y]$ ($\rho[p,\omega_\lambda[p,x]]=\lambda\rho[p,x]$).

Множество $M\subset X$ называется выпуклым (строго выпуклым), если для любых различных $x,y\in M$ ($x,y\in\overline{M}$) $[x,y]\subset M$ ($\omega_\lambda[x,y]\in\mathring{M}$ для каждого $\lambda\in(0,1)$) ([1], с. 153).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00308.

(D) Все замкнутые шары пространства X строго выпуклы.

(E) Из поточечной сходимости лучей в S следует сходимость этих лучей относительно псевдометрики $\overline{\alpha}$.

Отметим, что условие (E) выполняется для полных пространств неположительной кривизны по А.Д. Александрову, являющихся областями R_K при $K \leq 0$ [3].

Пусть выполняются условия (C), (D) и $L \in \widehat{S}$, тогда определено отображение $\varphi_L : X \to R$, $\varphi_L[x] = \varepsilon_L[x]\rho[p, x_L]$, где точка $x_L \in L$ такая, что $\rho[x, x_L] = \rho[x, L]$ (для произвольно заданной точки $x \in X$ существование и единственость точки x_L легко установить ([1], с. 22)), $\varepsilon_L[x]$ равняется 0, 1 или -1, если соответственно $x_L = p$, $x_L \in l \setminus p$ или $x_L \in L \setminus l$.

Обозначим $\Phi_p(X) = \{\varphi_L : X \to R : L \in \widehat{S}\}$; $F_p(X) = \{f : X \to R : f[p] = 0, \|f\| = \sup\{\frac{|f[x]|}{\rho[p,x]} : x \neq p\} < +\infty\}$; $FC_p(X) = \{f \in F_p(X) : f$ непрерывно$\}$ и через $\widehat{\Psi}_p(X)$ ($\widehat{\Phi}_p(X)$) — замкнутую линейную оболочку множества $\Psi_p(X)$ ($\Phi_p(X)$) в линейном нормированном пространстве $(F_p(X), \|\cdot\|)$.

Отметим, что $FC_p(X)$ является замкнутым линейным подпространством в банаховом пространстве $(F_p(X), \|\cdot\|)$ (это непосредственное следствие теоремы 1 из [4], с. 181 и следствия 2 теоремы 2 из [4], с. 184).

Сформулируем полученные результаты.

Лемма 1. 1. *Если выполнено условие* (E), *то* $\Psi_p(X) \subset FC_p(X)$ *и* $\psi[\omega_\lambda[p, x]] = \lambda\psi[x]$ *для каждых* $\psi \in \widehat{\Psi}_p(X)$, $\lambda \in R_+$, $x \in X$.

2. *Если выполнены условия* (C), (D), *то* $\Phi_p(X) \subset FC_p(X)$.

3. *Если* $(S, \overline{\alpha})$ — *метрическое пространство, то для любых различных* $x, y \in X$ *найдется* $\psi_l \in \Psi_p(X)$ *такое, что* $\psi_l[x] \neq \psi_l[y]$.

4. *Если выполнены условия* (C), (D), $\rho[p, x_L] \leq \rho[p, x]$ *для каждых* $x \in X$ *и* $L \in \widehat{S}$, *то для любых различных* $x, y \in X$ *найдется* $\varphi_L \in \Phi_p(X)$ *такое, что* $\varphi_L[x] \neq \varphi_L[y]$.

В последующих формулировках предполагаем, что при рассмотрении пространства $\widehat{\Psi}_p(X)$ ($\widehat{\Phi}_p(X)$) выполняется дополнительное условие (E) (выполняются дополнительные условия (C), (D)).

Определение 1. Последовательность $(x_n) \subset X$ $(n = 1, 2, \dots)$ называется ψ-сходящейся (φ-сходящейся) к точке $x \in X$, если для каждого $\psi \in \widehat{\Psi}_p(X)$ ($\varphi \in \widehat{\Phi}_p(X)$) $\lim\limits_{n\to\infty} \psi[x_n] = \psi[x]$ ($\lim\limits_{n\to\infty} \varphi[x_n] = \varphi[x]$).

Следующие теоремы 1, 2 аналогичны соответствующим теоремам 1, 2 ([5], с. 225–227) о свойствах слабо сходящихся последовательностей в нормированном пространстве.

Теорема 1. *Если последовательность* $(x_n) \subset X$ *ψ-сходится или φ-сходится к точке* $x \in X$, *то она ограничена.*

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. *последовательность* $(x_n) \subset X$ *ограничена*;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_l[x_n] = \psi_l[x]$ ($\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_L[x_n] = \varphi_L[x]$) *для каждого* $\psi_l \in \Psi_p(X)$ ($\varphi_L \in \Phi_p(X)$) *и некоторой точки* $x \in X$.

Тогда последовательность $(x_n) \subset X$ *ψ-сходится (φ-сходится) к точке* $x \in X$.

Следствие 1. Если последовательность $(x_n) \subset X$ сходится к точке $x \in X$, то она ψ-сходится (φ-сходится) к точке $x \in X$.

Следствие 2. $\widehat{\Psi}_p(X) \subset FC_p(X)$ ($\widehat{\Phi}_p(X) \subset FC_p(X)$).

Определение 2. Последовательность $(\psi_n) \subset \widehat{\Psi}_p(X)$ ($(\varphi_n) \subset \widehat{\Phi}_p(X)$) называется слабо сходящейся к $\psi \in \widehat{\Psi}_p(X)$ ($\varphi \in \widehat{\Phi}_p(X)$), если $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n[x] = \psi[x]$ ($\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n[x] = \varphi[x]$) для каждого $x \in X$.

Следующая лемма 2 аналогична соответствующей теореме 1* ([5], с. 230).

Лемма 2. *Если X — полное метрическое пространство и последовательность $(\psi_n) \subset \widehat{\Psi}_p(X)$ $((\varphi_n) \subset \widehat{\Phi}_p(X))$ слабо сходится к $\psi \in \widehat{\Psi}_p(X)$ $(\varphi \subset \widehat{\Phi}_p(X))$, то эта последовательность ограничена на некотором шаре пространства X.*

Пример 1. Нетрудно проверить, что в гильбертовом пространстве X последовательность $(x_n) \subset X$ ψ-сходится (φ-сходится) к точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда она слабо сходится к точке $x \in X$.

Пример 2. Пусть X — открытый шар единичного радиуса с центром в нулевом векторе вещественного гильбертова пространства V с метрикой

$$\rho : X \times X \to R_+, \quad \rho[x,y] = k \operatorname{Arch}\left[\frac{1-(x,y)}{[(1-x^2)(1-y^2)]^{1/2}}\right],$$

где (x,y) — скалярное произведение векторов $x, y \in X$, $k > 0$. Это бесконечномерный вариант известной интерпретации Бельтрами–Клейна геометрии Лобачевского ([6], с. 48). Нетрудно проверить, что в пространстве Лобачевского (X,ρ) последовательность $(x_n) \subset (X,\rho)$ ψ-сходится (φ-сходится) к точке $x \in (X,\rho)$ тогда и только тогда, когда она слабо сходится к $\frac{\rho[0,x]}{|x|}x \in V$ $(x \in V)$. Отметим также, что условия (A)–(E) выполняются в пространстве Лобачевского (X,ρ). Аналогичное сравнение слабых сходимостей в более общих геометриях Гильберта ([1], с. 140; [7]) является сложной и нерешенной задачей.

Пусть $\varepsilon > 0$. Введем множества $V_{x_1,\dots,x_N;\,\varepsilon} = \{\psi \in \widehat{\Psi}_p(X) : |\psi[x_k]| < \varepsilon,\ k = 1,\dots,N\}$ $(W_{x_1,\dots,x_N;\,\varepsilon} = \{\varphi \in \widehat{\Phi}_p(X) : \frac{|\varphi[x_k]|}{\rho[p,x_k]} < \varepsilon,\ k = 1,\dots,N\}$, где точки $x_1,\dots,x_N$ отличны от точки p). Если выбрать эти множества в качестве системы окрестностей нуля в пространстве $\widehat{\Psi}_p(X)$ $(\widehat{\Phi}_p(X))$, то они определят топологию τ_ψ (τ_φ) в этом пространстве. Это аналоги $*$-слабой топологии в сопряженном банаховом пространстве ([5], с. 230).

Следующая теорема 3 аналогична теореме 4 из ([5], с. 232–234).

Теорема 3. *Пусть X — сепарабельное пространство и $B[0,1]$ — замкнутый шар с центром в нуле радиуса 1 в пространстве $\widehat{\Psi}_p(X)$ $(\widehat{\Phi}_p(X))$. Тогда топология в $B[0,1]$, индуцированная топологией τ_ψ (τ_φ), сильнее топологии, определенной с помощью метрики*

$$d : B[0,1] \times B[0,1] \to R_+, \quad d[f,g] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|(f-g)[x_n]| \quad \left(d[f,g] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\frac{|(f-g)[x_n]|}{\rho[p,x_n]}\right),$$

где $\{x_n\}$ $(x_n \neq p,\ n = 1,2,\dots)$ — фиксированное счетное всюду плотное множество в замкнутом шаре $B[p,1] \subset X$ (пространстве X).

Теорема 4. *Пусть U_p — окрестность точки $p \in X$ и в множестве $P = \prod_{x\in X} D_x$, где $D_x = \{\alpha \in R : |\alpha| \le \lambda[x]\}$ и $\lambda[x] \in R_+$ такое, что $x \in \omega_{\lambda[x]}[p,U_p]$, задана топология произведения τ. Тогда топология τ_ψ на подмножестве $K = \{\psi \in \widehat{\Psi}_p(X) : \forall x \in U_p\, (|\psi[x]| \le 1)\} \subset P$ совпадает с топологией, индуцированной топологией произведения τ. Кроме того, замыкание множества K в пространстве (P,τ) принадлежит множеству*

$$\{f \in F_p(X) : \forall x \in X,\ \forall \beta \in R_+\ (f[\omega_\beta[p,x]] = \beta f[x]);\ \forall x \in U_p\ (|f[x]| \le 1)\}.$$

Замечание. При выполнении условий теоремы Банаха–Алаоглу ([8], с. 80) множество K замкнуто в пространстве (P,τ). Задача о нахождении структуры подмножества $\overline{K} \setminus K \subset (P,\tau)$ в условиях теоремы 4 остается пока нерешенной и интересной.

2. Доказательства полученных результатов

Доказательство леммы 1. 1. Вложение $\Psi_p(X) \subset FC_p(X)$ при $x = p$ или $y = p$ очевидно. Если $x \neq p$, $y \neq p$, то оно следует из неравенств

$$|\psi_l[x] - \psi_l[y]| = |\rho[p,x]\cos\overline{\alpha}[l_x,l] - \rho[p,y]\cos\overline{\alpha}[l_y,l]| \leq$$
$$\leq \rho[x,y] + \rho[p,x]2\left|\sin\left[\frac{\overline{\alpha}[l_x,l]+\overline{\alpha}[l_y,l]}{2}\right]\sin\left[\frac{\overline{\alpha}[l_x,l]-\overline{\alpha}[l_y,l]}{2}\right]\right| \leq \rho[x,y] + \rho[p,x]\overline{\alpha}[l_x,l_y].$$

Второе утверждение нетрудно получить из определений $\widehat{\Psi}_p(X)$, $\omega_\lambda[p,x]$, ψ_l $(l \in S)$.

2. Утверждение следует из равенств $|\varphi_L[x] - \varphi_L[y]| = |\varepsilon_L[x]\rho[p,x_L] - \varepsilon_L[y]\rho[p,y_L]| = \rho[x_L,y_L]$ и непрерывной зависимости $x_L \in L$ от $x \in X$ ([1], с. 22).

3. Докажем методом от противного. Пусть найдутся различные $x, y \in X$ такие, что для каждого $\psi_l \in \Psi_p(X)$ $\psi_l[x] = \psi_l[y]$. Если $x = p$ $(y = p)$, то при $l = l_y$ $(l = l_x)$ найдем $0 = \psi_{l_y}[p] = \psi_{l_y}[y] = \rho[p,y]$ $(0 = \psi_{l_x}[p] = \psi_{l_x}[x] = \rho[p,x])$. Получили противоречие. Если $x \neq p$, $y \neq p$, то из равенств $\psi_{l_x}[x] = \rho[p,x] = \psi_{l_x}[y] = \rho[p,y]\cos\overline{\alpha}[l_x,l_y]$, $\psi_{l_y}[y] = \rho[p,y] = \psi_{l_y}[x] = \rho[p,x]\cos\overline{\alpha}[l_x,l_y]$ следует $x = y$. Получили противоречие.

4. Докажем методом от противного. Пусть найдутся различные $x, y \in X$ такие, что для каждого $\varphi_L \in \Phi_p(X)$ $\varphi_L[x] = \varphi_L[y]$. Если $x = p$ $(y = p)$, то при $L = L_y$ $(L = L_x)$, где ориентация прямой L_y, содержащей точку y, определяется лучом l_y (аналогично для L_x), найдем $0 = \varphi_{L_y}[p] = \varphi_{L_y}[y] = \rho[p,y]$ $(0 = \varphi_{L_x}[p] = \varphi_{L_x}[x] = \rho[p,x])$. Получили противоречие. Если $x \neq p$, $y \neq p$, то $\varphi_{L_x}[x] = \rho[p,x] = \varphi_{L_x}[y] = \varepsilon_{L_x}[y]\rho[p,y_{L_x}] \leq \rho[p,y]$, $\varphi_{L_y}[y] = \rho[p,y] = \varphi_{L_y}[x] = \varepsilon_{L_y}[x]\rho[p,x_{L_y}] \leq \rho[p,x] \Rightarrow y_{L_x} = x$, $x_{L_y} = y$, $\rho[p,x] = \rho[p,y]$. Пусть $\lambda \in (0,1)$. Тогда $(\omega_\lambda[x,y])_{L_x} = x$, $(\omega_\lambda[x,y])_{L_y} = y$, $y_{L_{\omega_\lambda[x,y]}} = x_{L_{\omega_\lambda[x,y]}} = \omega_\lambda[x,y]$ и $\rho[p,x] = \rho[p,y] = \rho[p,\omega_\lambda[x,y]]$. Но замкнутый шар $B[p,\rho[p,x]]$ строго выпуклый. Получили противоречие. □

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим в $\widehat{\Psi}_p(X)$ $(\widehat{\Phi}_p(X))$ замкнутые множества $A_{kn} = \{f : |f[x_n]| \leq k\}$, $A_k = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{kn}$ $(k, n = 1, 2, \dots)$. Для каждого $f \in \widehat{\Psi}_p(X)$ $(f \in \widehat{\Phi}_p(X))$ последовательность $(f[x_n])$ $(n = 1, 2, \dots)$ ограничена, т.к. последовательность (x_n) ψ-сходится (φ-сходится). Тогда $\widehat{\Psi}_p(X) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ $(\widehat{\Phi}_p(X) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k)$. По теореме Бэра ([5], с. 83) найдется замкнутое множество A_{k_0}, плотное в некотором замкнутом шаре $B[f_0,r] \subset \widehat{\Psi}_p(X)$ $(B[f_0,r] \subset \widehat{\Phi}_p(X))$ и, следовательно, содержащее этот шар. Рассмотрим отображение $\pi_1 : X \to \widehat{\Psi}_p^*(X)$ $(\pi_2 : X \to \widehat{\Phi}_p^*(X))$, $\pi_1[x](f) = f[x]$ $(\pi_2[x](f) = f[x])$. Тогда последовательность $(\pi_1[x_n])$ $((\pi_2[x_n]))$ ограничена на шаре $B[f_0,r]$ и, следовательно, на каждом шаре пространства $\widehat{\Psi}_p(X)$ $(\widehat{\Phi}_p(X))$. Кроме того, для каждого луча $l \in S$ $\|\psi_l\| = 1$. Следовательно, $\|\pi_1[x_n]\| = \sup\{\frac{|\psi[x_n]|}{\|\psi\|} : \psi \neq 0\} = \rho[p,x_n]$ и последовательность (x_n) $(n = 1, 2, \dots)$ ограничена. Отметим, что $1 \leq \|\varphi_L\| \leq 2$ для каждой прямой $L \in \widehat{S}$, поскольку первое неравенство очевидно, а второе следует из определения нормы и неравенств $\rho[p,x_L] \leq \rho[p,x] + \rho[x,x_L] \leq 2\rho[p,x]$ для каждого $x \in X$. Следовательно, $\|\pi_2[x_n]\| = \sup\{\frac{|\varphi[x_n]|}{\|\varphi\|} : \varphi \neq 0\} \geq \frac{\rho[p,x_n]}{2}$ и последовательность (x_n) ограничена. □

Доказательство теоремы 2. Пусть f из линейной оболочки множества $\Phi_p(X) \subset \widehat{\Phi}_p(X)$ $(\Psi_p(X) \subset \widehat{\Psi}_p(X))$. Тогда в силу условия (2) $\lim\limits_{n\to\infty} f[x_n] = f[x]$. Для произвольного элемента $f \in \widehat{\Phi}_p(X)$ $(f \in \widehat{\Psi}_p(X))$ найдется последовательность (f_n) из линейной оболочки множества $\Phi_p(X) \subset \widehat{\Phi}_p(X)$ $(\Psi_p(X) \subset \widehat{\Psi}_p(X))$ такая, что $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. Выберем такую константу M, чтобы $\rho[p,x] \leq M$, $\rho[p,x_n] \leq M$ $(n = 1, 2, \dots)$. Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число K, что $\|f - f_k\| < \frac{\varepsilon}{6M}$ для всех $k \geq K$. Фиксируем $k \geq K$. Тогда найдется такое натуральное число N, что $|f_k[x_n] - f_k[x]| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $n \geq N$. Следовательно, $|f[x_n] - f[x]| \leq |f[x_n] - f_k[x_n]| + |f_k[x_n] - f_k[x]| + |f_k[x] - f[x]| \leq \|f - f_k\|(\rho[p,x] + \rho[p,x_n]) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ для всех $n \geq N$. □

Доказательство леммы 2. Рассмотрим замкнутые множества $A_{kn} = \{x \in X : |\psi_n[x]| \leq k\}$ ($A_{kn} = \{x \in X : |\varphi_n[x]| \leq k\}$), $A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{kn}$ $(k, n = 1, 2, \dots)$. Для каждого $x \in X$ последовательность $(\psi_n[x])$ $((\varphi_n[x]))$ ограничена, т. к. последовательность $(\psi_n) \subset \widehat{\Psi}_p(X)$ $((\varphi_n) \subset \widehat{\Phi}_p(X))$ слабо сходится. Тогда $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. По теореме Бэра ([5], с. 83) найдется замкнутое множество A_{k_0}, плотное в некотором замкнутом шаре $B[x_0, r] \subset X$ и, следовательно, содержащее этот шар. Значит, последовательность (ψ_n) $((\varphi_n))$ ограничена на этом шаре. □

Доказательство теоремы 3. Нетрудно проверить, что d является метрикой, удовлетворяющей условию $d[f+h, g+h] = d[f, g]$ $(f, g, f+h, g+h \in B[0,1])$. Следовательно, достаточно проверить, что любой открытый шар $Q_\varepsilon = \{f : d[f, 0] < \varepsilon\}$ в пространстве $\widehat{\Psi}_p(X)$ $(\widehat{\Phi}_p(X))$ содержит пересечение $B[0,1]$ с некоторой окрестностью нуля в топологии τ_ψ (τ_φ). Выберем такое натуральное число N, что $2^{-N} < \varepsilon/2$, и рассмотрим в топологии τ_ψ (τ_φ) следующую окрестность нуля: $V = V_{x_1,\dots,x_N;\,\varepsilon/2} = \{f : |f[x_k]| < \varepsilon/2,\ k = 1, \dots, N\}$ $(W = W_{x_1,\dots,x_N;\,\varepsilon/2} = \{f : \frac{|f[x_k]|}{\rho[p, x_k]} < \varepsilon/2,$ $k = 1, \dots, N\})$. Пусть $f \in B[0,1] \cap V$ $(f \in B[0,1] \cap W)$. Тогда

$$d[f,0] = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}|f[x_n]| + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n}|f[x_n]| \leq \varepsilon/2 \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon$$

$$\left(d[f,0] = \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\frac{|f[x_n]|}{\rho[p,x_n]} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n}\frac{|f[x_n]|}{\rho[p,x_n]} \leq \varepsilon/2 \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon\right).$$

Следовательно, $B[0,1] \cap V \subset Q_\varepsilon$ $(B[0,1] \cap W \subset Q_\varepsilon)$. □

Доказательство теоремы 4. Из утверждения 1 леммы 1 следует $|\psi[x]| \leq \lambda[x]$ $(x \in X,$ $\psi \in K)$. По теореме Тихонова ([8], с. 413) пространство (P, τ) является компактным. Кроме того, $P = \{f : X \to R : \forall x \in X\ (|f[x]| \leq \lambda[x])\}$. Фиксируем $\psi_0 \in K$ и выберем произвольно натуральное число n, $x_i \in X$ $(1 \leq i \leq n)$, $\delta > 0$. Множества $W_1 = \{\psi \in \widehat{\Psi}_p(X) : |\psi[x_i] - \psi_0[x_i]| < \delta,\ 1 \leq i \leq n\}$ $(W_2 = \{f \in P : |f[x_i] - \psi_0[x_i]| < \delta,\ 1 \leq i \leq n\})$ образуют локальную базу топологии τ_ψ (τ) пространства $\widehat{\Psi}_p(X)$ (P) в точке ψ_0. Тогда $W_1 \cap K = W_2 \cap K$, поскольку $K \subset \widehat{\Psi}_p(X) \cap P$. Таким образом, в множестве K топология τ_ψ совпадает с топологией τ. Пусть f_0 принадлежит τ-замыканию множества K. Выберем произвольно $x \in X$, $\beta \in R_+$ и $\varepsilon > 0$. Множество всех $f \in P$, для которых $|(f - f_0)[x]| < \varepsilon$, $|(f - f_0)[\omega_\beta[p, x]]| < \varepsilon$, является τ-окрестностью точки f_0, поэтому K содержит хотя бы одну такую точку ψ из этой окрестности. В силу утверждения 1 леммы 1 получим $|f_0[\omega_\beta[p,x]] - \beta f_0[x]| = |(f_0 - \psi)[\omega_\beta[p,x]] + \beta(\psi - f_0)[x]| < (1+\beta)\varepsilon$. Поскольку ε произвольно, то $f_0[\omega_\beta[p,x]] = \beta f_0[x]$ $(x \in X,\ \beta \in R_+)$. Если $x \in U_p$ и $\varepsilon > 0$, то аналогичное рассуждение показывает, что в K найдется функция ψ, для которой $|\psi[x] - f_0[x]| < \varepsilon$. Но $|\psi[x]| \leq 1$, следовательно, $|f_0[x]| \leq 1$. □

Литература

1. Буземан Г. *Геометрия геодезических.* – М.: Физматгиз, 1962. – 503 с.
2. Ефремович В.А. *Неэквиморфность пространств Евклида и Лобачевского* // УМН. – 1949. – Т. 4. – Вып. 2. – С. 178–179.
3. Берестовский В.Н., Николаев И.Г. *Многомерные обобщенные римановы пространства* / Современ. пробл. матем. Фунд. напр. – 1989. – Т. 70 – С. 190–272.
4. Бурбаки Н. *Общая топология.* – М.: Наука, 1975. – Вып. 3. – 408 с.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука, 1989. – 624 с.
6. Нут Ю.Ю. *Геометрия Лобачевского в аналитическом изложении.* – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 310 с.

7. Сосов Е.Н. *Об одном одуле в геометрии Гильберта* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 5. – С. 78–82.
8. Рудин У. *Функциональный анализ.* – М.: Мир, 1975. – 444 с.

Казанский государственный университет

Поступили
первый вариант 27.11.2001
окончательный вариант 08.05.2003