ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 11 (534)

УДК 517.547

А. Е. ЧОКЕ РИВЕРО

ЗАДАЧА КАРАТЕОДОРИ В КЛАССЕ $\mathcal{S}[a, b]$

1. Введение

В данной работе решается матричная задача интерполяции Каратеодори в классе $\mathcal{S}[a, b]$, т. е. отыскиваются все функции, принадлежащие $\mathcal{S}[a, b]$ с предопределенными первыми n производными в заданной точке. Класс $\mathcal{S}[a, b]$ голоморфных функций был введен в [1] для описания всех решений степенной проблемы моментов на компактном интервале, которая может быть интерпретирована как задача интерполяции, а именно, задача интерполяции Каратеодори, имеющая кратный полюс в бесконечности. Матричная версия задачи Неванлинна–Пика в $\mathcal{S}[a, b]$ была решена в [2]. В работах [3], [4] класс $\mathcal{S}[a, b]$ был использован для описания множества параметров решения матричной степенной проблемы моментов на конечном интервале. Здесь используется метод, разработанный В.П. Потаповым для решения задач интерполяции [5], и некоторые обобщения для функций Неванлинна [6] и Стилтьеса [7], [8]–[10]. Основным результатом является теорема 7.2, в которой получено описание всех решений полностью неопределенной задачи интерполяции Каратеодори в классе $\mathcal{S}[a, b]$. В теореме 7.3 получен критерий разрешимости задачи интерполяции (3.1).

2. Некоторые подклассы голоморфных матричнозначных функций и неотрицательные пары столбцов

Пусть m — положительное целое число, $\Pi_+ := \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w \in (0, +\infty)\}$, $\Pi_- := \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w \in (-\infty, 0)\}$, $\mathfrak{B}$ — борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}$, Λ — непустое множество, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра на Λ, $\mathcal{M}^m_{\geq}(\Lambda, \mathfrak{A})$ — множество всех неотрицательных эрмитовых $m \times m$-мер на $(\Lambda, \mathfrak{A})$. Если $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{Y}$ — непустые множества, $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ — отображение, $\mathcal{Z}$ — непустое подмножество $\mathfrak{X}$, то $\operatorname{Rstr.}_{\mathcal{Z}} f$ означает сужение f на $\mathcal{Z}$. Пусть $\mathcal{R}$ — множество всех матричнозначных функций $F : \Pi_+ \to \mathbb{C}^{m\times m}$, которые являются голоморфными в Π_+ и удовлетворяют $\operatorname{Im} F(w) \geq 0$ для всех $w \in \Pi_+$. Каждая функция F, принадлежащая $\mathcal{R}$, допускает единственное интегральное представление, которое в скалярном случае получено Р. Неванлинна. Напомним некоторые предложения из [11].

Теорема 2.1. (a) *Для каждой матричнозначной функции F, принадлежащей классу $\mathcal{R}$, существуют единственные эрмитова комплексная $m \times m$-матрица α, единственная неотрицательная эрмитова комплексная матрица β и неотрицательная эрмитова $m \times m$-мера $\nu \in \mathcal{M}^m_{\geq}(\mathbb{R}, \mathfrak{B} \cap \mathbb{R})$ такие, что*

$$F(z) = \alpha + \beta z + \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + tz}{t - z} \nu(dt) \tag{2.1}$$

выполняется для любого $z \in \Pi_+$.

(b) *Каждая матричнозначная функция $F : \Pi_+ \to \mathbb{C}^{m\times m}$, для которой существуют эрмитова комплексная $m \times m$-матрица α, неотрицательная эрмитова комплексная $m \times m$-матрица β и единственная неотрицательная эрмитова $m \times m$-мера $\nu \in \mathcal{M}^m_{\geq}(\mathbb{R}, \mathfrak{B} \cap \mathbb{R})$ такие, что* (2.1) *выполняется для всех $z \in \Pi_+$, принадлежит классу $\mathcal{R}$.*

Для каждого $F \in \mathcal{R}$, назовем (α, β, ν), заданное в (2.1), параметризацией Неванлинна F.

Предложение 2.1. *Пусть M — конечное объединение открытых интервалов $\mathbb{R}$ и $\varphi : \Pi_+ \cup M \cup \Pi_- \to \mathbb{C}^{m\times m}$ — матричнозначная функция, удовлетворяющая условиям*

(i) *φ голоморфна в $\Pi_+ \cup M \cup \Pi_-$,*

(ii) $\mathrm{Rstr.}_{\Pi_+}\varphi \in \mathcal{R}$,

(iii) *для всех $x \in M$, матрица $\varphi(x)$ является эрмитовой.*

Если (α, β, ν) — параметризация Неванлинна $\mathrm{Rstr.}_{\Pi_+}\varphi$, то

$$\varphi(z) = \alpha + \beta z + \int_{\mathbb{R}\setminus M} \frac{1+tz}{t-z}\nu(dt)$$

для всех $z \in \Pi_+ \cup M \cup \Pi_-$.

Пусть $[a,b]$ — конечный интервал действительной оси. Обозначим через $\mathcal{S}[a,b]$ множество $m\times m$-матричных функций $s(z)$, удовлетворяющих условиям

1. $s(z) \in \mathcal{R}$,
2. $s(x)$ непрерывна и $s(x) \geq 0$ во всех точках $x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$.

В силу принципа симметрии Шварца $s(z) = s^*(\overline{z})$ матричные функции $s(z) \in \mathcal{S}[a,b]$ могут быть аналитически продолжены через $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ на нижнюю полуплоскость. Поэтому они определены и голоморфны в $z \in \mathbb{C} \setminus [a,b]$.

Теорема 2.2 ([4], теорема 5.3). *Для того чтобы матричная функция $s(z)$ принадлежала классу $\mathcal{S}[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала интегральное представление*

$$s(z) = (b-z)\int_{[a,b]} \frac{\sigma(dt)}{t-z} \tag{2.2}$$

для любого $z \in \mathbb{C}\setminus[a,b]$, где σ принадлежит множеству $\mathcal{M}^m_{\geq}([a,b], \mathfrak{B}\cap[a,b])$ всех неотрицательных эрмитовых $m\times m$-мер σ, определенных на борелевской σ-алгебре $\mathfrak{B}\cap[a,b]$ на интервале $[a,b]$.

Обозначим через I единичную $m\times m$-матрицу.

Лемма 2.1 ([4], лемма 5.5). *Пусть $s_1 \in \mathcal{S}[a,b]$, $s_1 := s$, $s_2(z) = \frac{z-a}{b-z}s_1(z)$ и σ — неотрицательная эрмитова $m\times m$-мера $\sigma \in \mathcal{M}^m_{\geq}([a,b], \mathfrak{B}\cap[a,b])$ такая, что (2.2) выполняется для всех $z \in \mathbb{C}\setminus[a,b]$. Тогда*

(a) *для $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$*

$$\frac{s_1(z)-s_1^*(z)}{z-\overline{z}} = \int_{[a,b]} \left(\frac{\sqrt{b-t}}{t-z}I\right)\sigma(dt)\left(\frac{\sqrt{b-t}}{t-z}I\right)^* \tag{2.3}$$

и

$$\frac{s_2(z)-s_2^*(z)}{z-\overline{z}} = \int_{[a,b]} \left(\frac{\sqrt{t-a}}{t-z}I\right)\sigma(dt)\left(\frac{\sqrt{t-a}}{t-z}I\right)^*, \tag{2.4}$$

(b) *матричнозначные функции s_1 и s_2 являются голоморфными в $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ и для каждого $w \in \Pi_+$ матрицы $\mathrm{Im}\, s_1(w)$ и $\mathrm{Im}\, s_2(w)$ являются неотрицательными эрмитовыми.*

Лемма 2.2. *Пусть s — комплексная $m\times m$-матричнозначная функция, определенная на $\mathbb{C}\setminus[a,b]$. Тогда эквивалентны утверждения*

(i) *s принадлежит $\mathcal{S}[a,b]$,*

(ii) *матричнозначные функции $s = s_1$ и s_2 голоморфны в $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ и неравенства $\mathrm{Im}\, s_1(w) \geq 0$ и $\mathrm{Im}\, s_2(w) \geq 0$ выполняются для всех $w \in \Pi_+$.*

Доказательство. Лемма 2.1 показывает, что из (i) следует (ii). Предположим, что (ii) выполняется. Пусть теперь $t \in (-\infty, a)$. В силу (ii) получим

$$\operatorname{Im} s_1(t) = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \operatorname{Im} s_1(t + i\varepsilon) \geq 0 \tag{2.5}$$

и

$$\frac{t-a}{b-t} \operatorname{Im} s_1(t) = \operatorname{Im} s_2(t) = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \operatorname{Im} s_2(t + i\varepsilon) \geq 0. \tag{2.6}$$

Поскольку $t - a < 0$, то согласно (2.5) и (2.6) получим $\operatorname{Im} s_1(t) = 0$. Далее, для каждого $\varepsilon \in (0, +\infty)$ имеем

$$0 \leq \operatorname{Im} s_2(t + i\varepsilon) = \frac{\varepsilon(b-a) \operatorname{Re} s_1(t+i\varepsilon) + ((t-a)(b-t) - \varepsilon^2) \operatorname{Im} s_1(t+i\varepsilon)}{(b-t)^2 + \varepsilon^2} \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon(b-a) \operatorname{Re} s_1(t+i\varepsilon)}{(b-t)^2 + \varepsilon^2}$$

и, следовательно, $s_1(t) = \operatorname{Re} s_1(t) = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \operatorname{Re} s_1(t + i\varepsilon) \geq 0$. Подобным образом следует $s_1(x) \geq 0$ для всех $x \in (b, +\infty)$, отсюда (i) выполняется. □

Если f — мероморфная матричнозначная функция, то $\mathbb{H}_f$ — множество всех точек, в которых f голоморфна. Следующая лемма может быть доказана подобно импликации "(ii)⇒(i)" в доказательстве леммы 2.2.

Лемма 2.3. *Пусть φ — $m \times m$-матричнозначная функция, мероморфная в $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ и удовлетворяющая $\operatorname{Im} \varphi(z) \geq 0$ для всех $z \in \Pi_+ \cap \mathbb{H}_\varphi$. Предположим, что функция $\varphi_1 : \mathbb{H}_\varphi \to \mathbb{C}^{m \times m}$, определенная как $\varphi_1(w) := \frac{w-a}{b-w}\varphi(w)$, удовлетворяет $\operatorname{Im} \varphi_1(z) \geq 0$ для всех $z \in \Pi_+ \cap \mathbb{H}_\varphi$. Тогда для каждого $x \in \mathbb{C} \setminus [a, b] \cap \mathbb{H}_\varphi$ матрица $\varphi(x)$ является неотрицательной эрмитовой.*

Введем понятие J-неотрицательных пар столбцов. Пусть

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

— $2m \times 2m$-сигнатурная матрица.

Определение 2.1. Пусть p и q — $m \times m$–матричные функции, мероморфные в $\mathbb{C} \setminus [a, b]$. Тогда $\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}$ называется парой столбцов, неотрицательной по отношению к $(-J)$ и $[a, b]$, если существует дискретное подмножество $\mathcal{D} \subset \mathbb{C} \setminus [a, b]$ такое, что выполняются следующие условия:

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} = m, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{[a, b] \cup \mathcal{D}\}, \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{2 \operatorname{Im} z} \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}^* (-J) \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R} \cup \mathcal{D}\}, \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{2 \operatorname{Im} z} \begin{bmatrix} \frac{z-a}{b-z} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}^* (-J) \begin{bmatrix} \frac{z-a}{b-z} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R} \cup \mathcal{D}\}. \tag{2.10}$$

Множество пар, удовлетворяющих условиям (2.8)–(2.10), непусто. Например, пары вида $\begin{bmatrix} s(z) \\ I \end{bmatrix}$, $s(z) \in \mathcal{S}[a, b]$ удовлетворяют условиям (2.8)–(2.10).

Введем отношение эквивалентности на множестве пар.

Определение 2.2. Говорят, что пара $\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}$ эквивалентна паре $\begin{bmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{bmatrix}$, если существует матричнозначная функция $Q(z)$, $\det Q(z) \not\equiv 0$, мероморфная на $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ такая, что $p_1(z) = p(z)Q(z)$, $q_1(z) = q(z)Q(z)$.

Отношение, которое ввели, очевидно, является отношением эквивалентности и, следовательно, множество пар разбивается на классы эквивалентности. Пусть $\mathcal{S}^\infty[a,b]$ означает множество классов эквивалентности пар.

Предложение 2.2. *Пусть p и q — $m\times m$-матричнозначные функции, мероморфные в $\mathbb{C}\setminus[a,b]$, $\left[\begin{smallmatrix}p\\q\end{smallmatrix}\right]$ — пара столбцов, неотрицательная по отношению к $(-J)$ и $[a,b]$; функция $\det q$ не обращается тождественно в нуль в $\mathbb{C}\setminus[a,b]$. Тогда $s:=pq^{-1}$ принадлежит $\mathcal{S}[a,b]$.*

Доказательство. Очевидно, $\left[\begin{smallmatrix}s\\I\end{smallmatrix}\right]$ принадлежит множеству всех пар столбцов, которые неотрицательны по отношению к $-J$ и $[a,b]$. Отсюда существует дискретное подмножество $\mathcal{D}$ множества $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ такое, что s голоморфно в $\mathbb{C}\setminus([a,b]\cup\mathcal{D})$ и что

$$\frac{1}{2\operatorname{Im}z}\begin{pmatrix}s(z)\\I\end{pmatrix}^*(-J)\begin{pmatrix}s(z)\\I\end{pmatrix}\geq 0 \tag{2.11}$$

и

$$\frac{1}{2\operatorname{Im}z}\begin{pmatrix}\frac{z-a}{b-z}s(z)\\I\end{pmatrix}^*(-J)\begin{pmatrix}\frac{z-a}{b-z}s(z)\\I\end{pmatrix}\geq 0 \tag{2.12}$$

выполняются для всех $z\in\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}\cup\mathcal{D})$. Пусть $\varphi_1:\mathbb{H}_s\to\mathbb{C}^{m\times m}$ и $\varphi_2:\mathbb{H}_s\to\mathbb{C}^{m\times m}$ заданы как $\varphi_1(z):=s(z)$ и $\varphi_2(z):=\frac{z-a}{b-z}s(z)$ для всех $z\in\mathbb{H}_s$. Для каждого $z\in\Pi_+\setminus\mathcal{D}$ из (2.11) и (2.12) получим

$$\frac{1}{\operatorname{Im}z}\operatorname{Im}\varphi_1(z)=\frac{1}{2\operatorname{Im}z}\begin{pmatrix}s(z)\\I\end{pmatrix}^*(-J)\begin{pmatrix}s(z)\\I\end{pmatrix}\geq 0$$

и

$$\frac{1}{\operatorname{Im}z}\operatorname{Im}\varphi_2(z)=\frac{1}{2\operatorname{Im}z}\begin{pmatrix}\frac{z-a}{b-z}s(z)\\I\end{pmatrix}^*(-J)\begin{pmatrix}\frac{z-a}{b-z}s(z)\\I\end{pmatrix}\geq 0.$$

Таким образом, имеем

$$\operatorname{Im}\varphi_1(z)\geq 0,\quad \operatorname{Im}\varphi_2(z)\geq 0 \tag{2.13}$$

для всех $z\in\Pi_+\setminus\mathcal{D}$. Таким образом, из (2.13) и леммы 2.3 следует

$$s(x)\in\mathbb{C}_{\geq}^{m\times m},\quad x\in(-\infty,a)\setminus\mathcal{D}, \tag{2.14}$$

и

$$s(x)\in\mathbb{C}_{\geq}^{m\times m},\quad x\in(b,+\infty)\setminus\mathcal{D}. \tag{2.15}$$

В силу (2.13) легко видеть, что s голоморфно в Π_+ (ср., напр., с [12], лемма 2.1.9). Другими словами

$$\mathrm{Rstr}._{\Pi_+}s\in\mathcal{R}. \tag{2.16}$$

Пусть $x_0\in(-\infty,a)\setminus\mathcal{D}$. Тогда существует положительное действительное число η такое, что $(x_0-\eta,x_0+\eta)\subseteq(-\infty,a)\setminus\mathcal{D}$. В силу (2.14) и принципа симметрии видим, что s голоморфно в Π_- и удовлетворяет $s(z)=s^*(\overline{z})$ для всех $z\in\Pi_-$. Осталось показать, что s голоморфно в каждой точке, принадлежащей $\mathbb{R}\setminus[a,b]$. Пусть $x_0\in\mathbb{R}\setminus[a,b]$. Тогда существует положительное действительное число η такое, что $(x_0-\eta,x_0+\eta)\subseteq\mathbb{R}\setminus[a,b],(x_0-\eta,x_0)\cap\mathcal{D}=\emptyset$ и $(x_0,x_0+\eta)\cap\mathcal{D}=\emptyset$. В силу (2.16) (α,β,ν) — параметризация Неванлинна $\mathrm{Rstr}._{\Pi_+}s$. Согласно предложению 2.1

$$s(z)=\alpha+\beta z+\int_{\mathbb{R}\setminus E}\frac{1+tz}{t-z}\nu(dt)$$

для всех $z \in \Pi_+ \cup E \cup \Pi_-$, где $E := (x_0 - \eta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \eta)$. Матричнозначная функция $\psi : \Pi_+ \cup (x_0 - \eta, x_0 + \eta) \cup \Pi_- \to \mathbb{C}^{m\times m}$, определенная как

$$\psi(z) := \alpha + \beta z + \int_{\mathbb{R}\setminus(x_0-\eta,x_0+\eta)} \frac{1+tz}{t-z}\nu(dt), \tag{2.17}$$

голоморфна в $\Pi_+ \cup (x_0 - \eta, x_0 + \eta) \cup \Pi_-$. Тогда

$$s(z) = \psi(z) + \frac{1+x_0 z}{x_0 - z}\nu(\{x_0\}) \tag{2.18}$$

для всех $z \in \Pi_+ \cup E \cup \Pi_-$. Пусть $u \in \mathbb{C}^m$. Из уравнения (2.18) видим, что

$$u^* s(x) u = u^*\psi(x)u + \frac{1+x_0 x}{x_0 - x}u^*\nu(\{x_0\})u$$

выполняется для каждого $x \in E$. Если $u^*\nu(\{x_0\})u > 0$, то

$$\lim_{x\to x_0+0} u^* s(x) u = -\infty,$$

что противоречит (2.14) и (2.15). Отсюда имеем $u^*\nu(\{x_0\})u = 0$ и, следовательно, $\nu(\{x_0\}) = 0$. Таким образом, $s(z) = \psi(z)$ выполняется при любом выборе z из $\Pi_+ \cup E \cup \Pi_-$. Поскольку x_0 произвольно выбрано из $\mathbb{R} \setminus [a,b]$, видим, что s не имеет полюсов в $\mathbb{R} \setminus [a,b]$. Следовательно, s принадлежит $\mathcal{S}[a,b]$. $\square$

3. Постановка задачи Каратеодори в классе $\mathcal{S}[a,b]$

Задача интерполяции Каратеодори в классе $\mathcal{S}[a,b]$ (KSab) может быть сформулирована следующим образом. Пусть z_0 — комплексное число такое, что $\operatorname{Im} z_0 > 0$, и задана последовательность $m\times m$-матриц $s_0, \dots, s_{n-1}$. Требуется описать множество матричных функций $s(z) \in \mathcal{S}[a,b]$ таких, что

$$s(z) = s_0 + (z - z_0)s_1 + \dots + (z - z_0)^{n-1}s_{n-1} + \cdots \tag{3.1}$$

Множество всех решений этой задачи обозначим через $\mathcal{L}$.

4. Система основных матричных неравенств В.П. Потапова (ОМН)

Вместе с каждым решением $s(z)$ задачи KSab будем рассматривать матричные функции

$$s_1(z) = s(z), \quad s_2(z) = \frac{z-a}{b-z}s(z). \tag{4.1}$$

Введем блочные матрицы

$$T = \begin{bmatrix} z_0 I & 0 & \dots & 0 \\ I & z_0 I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & I & z_0 I \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

$$R_T(z) = (T - zI_n)^{-1} \begin{bmatrix} (z_0 - z)^{-1}I & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1}(z_0 - z)^{-n}I & \dots & (z_0 - z)^{-1}I \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

$$v = \begin{pmatrix} I \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \widetilde{s}_0 \\ \widetilde{s}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{s}_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

где

$$\widetilde{s}_k = \sum_{j=0}^{k}(b-z_0)^{-j-1}s_{k-1-j} + (z_0-a)\sum_{j=0}^{k}(b-z_0)^{-j-1}s_{k-j}, \quad k=0,\dots,n-1, \tag{4.5}$$

при $s_{-1}=0$. Далее, пусть

$$K_1 = \{P_{jk}\}_{j,k=0}^{n-1},, \quad K_2 = \{Q_{jk}\}_{j,k=0}^{n-1} \tag{4.6}$$

при

$$\begin{aligned} P_{00} &= \frac{s_0 - s_0^*}{z_0 - \overline{z}_0}, \quad P_{0k} = \frac{P_{0\,k-1} - s_k^*}{z_0 - \overline{z}_0}, \quad 1 \le k \le n-1, \\ P_{j0} &= \frac{-P_{j-1\,0} + s_j}{z_0 - \overline{z}_0}, \quad 1 \le j \le n-1, \\ P_{jk} &= \frac{P_{j\,k-1} - P_{j-1\,k}}{z_0 - \overline{z}_0}, \quad 1 \le j,k \le n-1. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Элементы Q_{jk} определены подобным образом с помощью $\widetilde{s}_0,\dots,\widetilde{s}_{n-1}$. Символ I_n означает единичную $mn \times mn$-матрицу.

Теорема 4.1. *Если $s(z)$ — решение задачи* KSab, *то $s_1(z)$ и $s_2(z)$, определенные как в* (4.1), *удовлетворяют системе ОМН* ($\operatorname{Im} z \neq 0$)

$$A_r(z) = \left[\begin{array}{c|c} K_r & R_T(z)[vs_r(z) - u_r] \\ \hline (R_T(z)[vs_r(z)-u_r])^* & \{s_r(z) - s_r^*(z)\}/\{z-\overline{z}\} \end{array}\right] \ge 0, \quad r=1,2. \tag{4.8}$$

Доказательство. Получим интегральное представление блоков неравенства (4.8). Пусть $r=1$, согласно лемме 2.1 и в силу (2.2) имеем

$$P_{00} = \frac{s_0 - s_0^*}{z_0 - \overline{z}_0} = \frac{s_1(z_0) - s_1^*(z_0)}{z_0 - \overline{z}_0}\int_{[a,b]} \frac{b-t}{(t-z_0)(t-\overline{z}_0)}\sigma(dt).$$

Применяя метод математической индукции, покажем, что

$$P_{0k} = \frac{P_{0\,k-1} - s_k^*}{z_0 - \overline{z}_0} = \int_{[a,b]} \frac{(b-t)\sigma(dt)}{(t-z_0)(t-\overline{z}_0)^{k+1}}, \quad 1 \le k \le n-1. \tag{4.9}$$

Вышеуказанное утверждение истинно для $k=0$. Теперь покажем, что (4.9) выполняется для $k=\ell+1$, если предположим, что оно выполняется для $k=\ell$. Здесь принимаем во внимание, что

$$s_\ell = \frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{dz^\ell}\left((b-z)\int_{[a,b]}\frac{\sigma(dt)}{t-z}\right)\Bigg|_{z=z_0} = \int_{[a,b]}\frac{(b-t)\sigma(dt)}{(t-z_0)^{\ell+1}}, \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} P_{0\,\ell+1} &= \frac{P_{0\,\ell} - s_{\ell+1}^*}{z_0 - \overline{z}_0} = \frac{1}{z_0 - \overline{z}_0}\left(\int_{[a,b]}\frac{(b-t)\sigma(dt)}{(t-z_0)(t-\overline{z}_0)^{\ell+1}} - \int_{[a,b]}\frac{(b-t)\sigma(dt)}{(t-\overline{z}_0)^{\ell+2}}\right) = \\ &= \int_{[a,b]}\frac{(b-t)\sigma(dt)}{(t-z_0)(t-\overline{z}_0)^{\ell+2}}. \end{aligned}$$

Подобным образом можно показать, что

$$\begin{aligned} P_{j0} &= \int_{[a,b]}\frac{(b-t)\sigma(dt)}{(t-z_0)^{j+1}(t-\overline{z}_0)}, \\ P_{jk} &= \int_{[a,b]}\frac{(b-t)\sigma(dt)}{(t-z_0)^{j+1}(t-\overline{z}_0)^{k+1}}, \quad 1 \le j,k \le n-1. \end{aligned}$$

Следовательно, $K_1 = \int\limits_{[a,b]} R_T(t)v(b-t)\sigma(dt)v^* R_T^*(t)$, где $R_T(t)v = \operatorname{column}\big((z_0-t)^{-1}I, \dots, (-1)^{n-1}(z_0-t)^{-n}I\big)$.

В силу (4.3), (4.4) и (4.10) имеем

$$u_1 = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b-z_0)\int\limits_{[a,b]} \frac{\sigma(dt)}{t-z_0} \\ \int\limits_{[a,b]} \frac{(b-t)\sigma(dt)}{(t-z_0)^2} \\ \dots \\ \int\limits_{[a,b]} \frac{(b-t)\sigma(dt)}{(t-z_0)^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int\limits_{[a,b]} \frac{(b-t)\sigma(dt)}{t-z_0} \\ \int\limits_{[a,b]} \frac{(b-t)\sigma(dt)}{(t-z_0)^2} \\ \dots \\ \int\limits_{[a,b]} \frac{(b-t)\sigma(dt)}{(t-z_0)^n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int\limits_{[a,b]} \sigma(dt) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -\int_{[a,b]} (b-t)R_T(t)v\sigma(dt) + \int_{[a,b]} v\sigma(dt). \quad (4.11)$$

Поэтому из (2.2), (4.11) и (4.3) следует

$$R_T(z)[vs_1(z) - u_1] = R_T(z)\left[v(b-z)\int_{[a,b]} \frac{\sigma(dt)}{t-z} + \int_{[a,b]} R_T(t)v(b-t)\sigma(dt) - v\int_{[a,b]} \sigma(dt)\right] =$$

$$= R_T(z)\int_{[a,b]} [(b-z)(T-tI) + (b-t)(t-z)I - (t-z)(T-tI)]R_T(t)v\frac{\sigma(dt)}{t-z} =$$

$$= \int_{[a,b]} R_T(t)v(b-t)\frac{\sigma(dt)}{t-z}.$$

Значит,

$$A_1(z) = \int_{[a,b]} \begin{bmatrix} R_T(t)v \\ (t-\overline{z})^{-1}I \end{bmatrix} (b-t)\sigma(dt)[v^* R_T^*(t),\ (t-z)^{-1}I] \geq 0.$$

Подобным образом для $r = 2$

$$A_2(z) = \int_{[a,b]} \begin{bmatrix} R_T(t)v \\ (t-\overline{z})^{-1}I \end{bmatrix} (t-a)\sigma(dt)[v^* R_T^*(t),\ (t-z)^{-1}I] \geq 0. \quad \square$$

Докажем обратную теорему.

Теорема 4.2. *Пусть $s(z)$ — матричная функция, голоморфная в $\operatorname{Im} z > 0$ и построенные с помощью $s(z)$ матричные функции $s_1(z)$, $s_2(z)$ (см. (4.1)) удовлетворяют ОМН (4.8) в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Тогда $s(z)$ — решение задачи KSab.*

Доказательство. Из ОМН следует, что $\{s_r(z)-s_r^*(z)\}/\{z-\overline{z}\} \geq 0$, $r = 1,2$. Отсюда $s_r(z) \in \mathcal{R}$. Согласно лемме 2.2 имеем $s(z) \in \mathcal{S}[a,b]$. Далее в силу ОМН для $r = 1$

$$\left[\begin{array}{c|c} P_{n-1\,n-1} & \frac{-1}{(z-z_0)^n}[s(z) - (s_0 + (z-z_0)s_1 + \dots + (z-z_0)^{n-1}s_{n-1})] \\ \hline * & \{s_1(z) - s_1^*(z)\}/\{z-\overline{z}\} \end{array}\right] \geq 0.$$

Пусть $s_1(z) = d_0 + (z-z_0)d_1 + \dots + (z-z_0)^{n-1}d_{n-1} + \cdots$ Обозначим $d_0 - s_0 = c_0$, $d_1 - s_1 = c_1, \dots, d_{n-1} - s_{n-1} = c_{n-1}$ и рассмотрим неравенство

$$\left[\begin{array}{c|c} P_{n-1\,n-1} & \frac{-1}{(z-z_0)^n}[c_0 + (z-z_0)c_1 + \dots + (z-z_0)^{n-1}c_{n-1} + \cdots] \\ \hline * & \{s_1(z) - s_1^*(z)\}/\{z-\overline{z}\} \end{array}\right] \geq 0.$$

Пусть e и d — произвольные m-размерные вектор-столбцы такие, что $\|e\| \leq 1$ и $\|f\| \leq 1$. Тогда

$$\left[\begin{array}{c|c} f^* P_{n-1\,n-1} f & -f^* \frac{1}{(z-z_0)^n}[c_0 + (z-z_0)c_1 + \dots + (z-z_0)^{n-1}c_{n-1} + \cdots]e \\ \hline * & e^*\{s_1(z) - s_1^*(z)\}/\{z-\overline{z}\}e \end{array}\right] \geq 0.$$

Отсюда

$$\left|f^* \frac{1}{(z-z_0)^n}[c_0 + (z-z_0)c_1 + \cdots + (z-z_0)^{n-1}c_{n-1} + \cdots]e\right|^2 \le$$
$$\le [f^* P_{n-1\,n-1} f][e^* \{s_1(z) - s_1^*(z)\}/\{z - \overline{z}\}e].$$

Поскольку правая часть этого неравенства ограничена при $z \to z_0$, то $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$. Следовательно, $s_1(z) = s(z) = s_0 + (z-z_0)s_1 + \cdots + (z-z_0)^{n-1}s_{n-1} + \cdots$ □

5. Основные алгебраические тождества

В этом разделе рассмотрим существенные тождества, касающиеся блочных матриц, введенных в разделе 4.

Лемма 5.1. *Пусть $(s_j)_{j=0}^{n-1}$ — последовательность комплексных $m \times m$-матриц. Пусть $(\widetilde{s}_j)_{j=0}^{n-1}$, P_{ij}, Q_{ij} определены как в разделе 3. Тогда выполняются тождества*

$$s_k + \widetilde{s}_k + (z_0 - a)s_{k+1} - (b - z_0)\widetilde{s}_{k+1} = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1, \tag{5.1}$$

$$s_k + \widetilde{s}_k = (b-a)\sum_{j=0}^{k}(b-z_0)^{-j-1}s_{k-j}, \quad k = 0, \ldots, n-1, \tag{5.2}$$

$$(z_0 - a)P_{0k} - (b - z_0)Q_{0k} + s_k^* + \widetilde{s}_k^* = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1, \tag{5.3}$$

$$P_{j-1,k} + Q_{j-1,k} + (z_0 - a)P_{jk} - (b - z_0)Q_{jk} = 0, \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad k = 0, \ldots, n-1. \tag{5.4}$$

Доказательство. Напомним, что $s_{-1} = 0$. Тождества (5.1) и (5.2) следуют из (4.5).

Докажем тождество (5.3), используя математическую индукцию. Пусть $k = 0$. Из (4.7) имеем

$$(z_0 - a)P_{00} - (b - z_0)Q_{00} + s_0^* + \widetilde{s}_0^* =$$
$$= \frac{1}{z_0 - \overline{z}_0}\left((z_0 - a)(s_0 - s_0^*) - (b - z_0)\left(\frac{z_0 - a}{b - z_0}s_0 - \frac{\overline{z}_0 - a}{b - \overline{z}_0}s_0^*\right) + (z_0 - \overline{z}_0)\left(s_0^* + \frac{\overline{z}_0 - a}{b - \overline{z}_0}s_0^*\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{z_0 - \overline{z}_0}\frac{1}{b - \overline{z}_0}(-(z_0 - a)(b - \overline{z}_0) + (b - z_0)(\overline{z}_0 - a) + (z_0 - \overline{z}_0)(\overline{z}_0 - a))s_0^* = 0.$$

Теперь покажем, что (5.3) выполняется для $k = \ell + 1$, если предположим, что оно выполняется для $k = \ell$. Используя (4.7) и (5.1), имеем

$$(z_0 - a)P_{0\,\ell+1} - (b - z_0)Q_{0\,\ell+1} + s_{\ell+1}^* + \widetilde{s}_{\ell+1}^* =$$
$$= \frac{1}{z_0 - \overline{z}_0}((z_0 - a)P_{0\,\ell} - (b - z_0)Q_{0\,\ell} - (z_0 - a)s_{\ell+1}^* + (b - z_0)\widetilde{s}_{\ell+1}^* + (s_{\ell+1}^* + \widetilde{s}_{\ell+1}^*)(z_0 - \overline{z}_0)) =$$
$$= \frac{1}{z_0 - \overline{z}_0}(-s_\ell^* - \widetilde{s}_\ell^* - (\overline{z}_0 - a)s_{\ell+1}^* + (b - \overline{z}_0)\widetilde{s}_{\ell+1}^*) = 0.$$

Тождество (5.4) можем доказать подобным образом, используя (5.1), (5.3) и математическую индукцию. □

Замечание 5.1. Пусть K_1 и K_2 определены в (4.6). Тогда K_1 и K_2 — эрмитовы матрицы.

Доказательство. Докажем, что K_1 — эрмитова матрица, т. е. $K_1 = K_1^*$. В силу (4.7) следует доказать, что

$$P_{jk} = P_{kj}^*, \quad k, j = 0, \ldots, n-1. \tag{5.5}$$

Используя математическую индукцию, прежде всего покажем, что

$$P_{0k} = P_{k0}^*, \quad k = 0, \ldots, n-1. \tag{5.6}$$

Это утверждение истинно для $k=0$. Покажем, что (5.6) выполняется для $k=\ell+1$, если предположим, что оно выполняется для $k=\ell$. Из (4.7) имеем

$$P_{0\,\ell+1}=\frac{P_{0\,\ell}-s_{\ell+1}^*}{z_0-\overline{z}_0}=\frac{P_{\ell\,0}^*-s_{\ell+1}^*}{z_0-\overline{z}_0}=\left(\frac{-P_{\ell\,0}+s_{\ell+1}}{z_0-\overline{z}_0}\right)^*=P_{\ell+1\,0}^*.$$

Далее покажем, что (5.5) выполняется для $k=\ell+1$, и $j=r$ в предположении, что оно выполняется для $k=\ell$ при $0\le r\le n-1$ и для $k=\ell+1$ при $0\le r\le j-1$. Из (4.7) имеем

$$P_{r\,\ell+1}=\frac{P_{r\,\ell}-P_{r-1\,\ell+1}}{z_0-\overline{z}_0}=\frac{P_{\ell\,r}^*-P_{\ell+1\,r-1}^*}{z_0-\overline{z}_0}=\left(\frac{P_{\ell+1\,r-1}-P_{\ell r}}{z_0-\overline{z}_0}\right)^*=P_{\ell+1\,r}^*.$$

Следовательно, K_1 — эрмитова матрица. Подобным образом, используя определение элементов Q_{jk}, можем показать, что K_2 — эрмитова матрица. □

Предложение 5.1. *Пусть $(s_j)_{j=0}^{n-1}$ — последовательность комплексных $m\times m$-матриц. Тогда выполняются тождества*

$$u_2=-R_T^{-1}(a)R_T(b)u_1, \tag{5.7}$$
$$(b-a)R_T(b)vu_1^*R_T^*(b)=K_2+R_T^{-1}(a)R_T(b)K_1, \tag{5.8}$$
$$(a-b)R_T(a)vu_2^*R_T^*(a)=K_1+R_T^{-1}(b)R_T(a)K_2, \tag{5.9}$$
$$K_rT^*-TK_r=vu_r^*-u_rv^*,\quad r=1,2. \tag{5.10}$$

Доказательство. Пусть δ_{jk} — символ Кронекера, т. е. $\delta_{jk}=1$, если $j=k$, и $\delta_{jk}=0$, если $j\ne k$. Пусть $T_0=\{\delta_{j,k+1}I\}_{j,k=0}^{n-1}$ и $y_{[0,k]}=\operatorname{column}(s_0,\dots,s_k)$, $k=0,\dots,n-1$, тогда из (4.4) получим

$$T_0^0u_1=u_1=y_{[0,n-1]},\quad T_0^ju_1=\begin{pmatrix}0_{m\times mj}\\ y_{[0,n-j-1]}\end{pmatrix},\quad j=1,\dots,n-1. \tag{5.11}$$

Докажем тождество (5.7). Из (4.2)–(4.4) и (5.11) имеем

$$-R_T^{-1}(a)R_T(b)u_1=-(T-aI_n)(T-bI_n)^{-1}u_1=-(T_0+(z_0-a)I_n)(T_0-(b-z_0)I_n)^{-1}u_1=$$
$$=(b-z_0)^{-1}(T_0+(z_0-a)I_n)(I_n-(b-z_0)^{-1}T_0)^{-1}u_1=(T_0+(z_0-a)I_n)\sum_{j=0}^{n-1}(b-z_0)^{-j-1}T_0^ju_1=$$
$$=\sum_{j=0}^{n-1}(b-z_0)^{-(j+1)}T_0^{j+1}u_1+(z_0-a)\sum_{j=0}^{n-1}(b-z_0)^{-j-1}T_0^ju_1=\sum_{j=1}^{n-1}(b-z_0)^{-j}\begin{pmatrix}0_{m\times mj}\\ y_{[0,n-j-1]}\end{pmatrix}+$$
$$+(z_0-a)(b-z_0)^{-1}y_{[0,n-1]}+(z_0-a)\sum_{j=1}^{n-1}(b-z_0)^{-j-1}\begin{pmatrix}0_{m\times mj}\\ y_{[0,n-j-1]}\end{pmatrix}=u_2.$$

Четвертое и шестое равенства в этой цепочке равенств следуют из тождества $R_T(b)=-(b-z_0)^{-1}(I_n-(b-z_0)^{-1}T_0)^{-1}=-\sum\limits_{j=0}^{n-1}(b-z_0)^{-j-1}T_0^j$ и соотношения $T_0^n=0$.

Теперь докажем тождество

$$(b-a)vu_1^*R_T^*(b)=(T-aI_n)K_1+(T-bI_n)K_2, \tag{5.12}$$

которое эквивалентно (5.8). Пусть $\{V_{jk}\}_{jk=0}^{n-1}=(b-a)vu_1^*R_T^*(b)$. Принимая во внимание (4.4) и (4.3), имеем

$$V_{jk}=\begin{cases}-(b-a)\sum\limits_{\ell=0}^{k}(b-\overline{z}_0)^{-\ell-1}s_{k-\ell}^*, & j=0,\quad k=0,\dots,n-1;\\ 0, & j=1,\dots,n-1,\quad k=0,\dots,n-1.\end{cases} \tag{5.13}$$

Пусть $P_{-1,k} = 0$ и $Q_{-1,k} = 0$ для $k = 0, \ldots, n-1$. Используя (4.2), (4.6), (5.2)–(5.4) и (5.13), получим

$$
\begin{aligned}
&(T - aI_n)K_1 + (T - bI_n)K_2 = (T_0 + (z_0 - a)I_n)K_1 + (T_0 - (b - z_0)I_n)K_2 = \\
&= T_0(K_1 + K_2) + (z_0 - a)K_1 - (b - z_0)K_2 = \{P_{j-1,k} + Q_{j-1,k} + (z_0 - a)P_{jk} - (b - z_0)Q_{jk}\}_{j,k=0}^{n-1} = \\
&\qquad = \begin{cases} (z_0 - a)P_{0k} - (b - z_0)Q_{0k}, & j = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1; \\ 0, & j = 1, \ldots, n-1, \quad k = 0, \ldots, n-1, \end{cases} = \\
&\qquad = \begin{cases} -s_k^* - \widetilde{s}_k^*, & j = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1; \\ 0, & j = 1, \ldots, n-1, \quad k = 0, \ldots, n-1, \end{cases} = \{V_{jk}\}_{j,k=0}^{n-1} = (b - a)vu_1^* R_T^*(b).
\end{aligned}
$$

Следовательно, тождество (5.8) доказано.

Докажем тождество (5.9). Используя тождества (5.7) и (5.12), имеем

$$
\begin{aligned}
&(a - b)R_T(a)vu_2^* R_T^*(a) = -(a - b)R_T(a)vu_1^* R_T^*(b) R_T^{-1^*}(a) R_T^*(a) = \\
&\qquad = R_T(a)((T - aI_n)K_1 + (T - bI_n)K_2) = K_1 + R_T^{-1}(b)R_T(a)K_2,
\end{aligned}
$$

что и требовалось.

Напомним, что K_1 и K_2 — эрмитовы матрицы. Теперь докажем тождество (5.10) для $r = 1$. Вычтем соотношение $(b - a)R_T(b)u_1 v^* R_T^*(b) = K_2 + K_1 R_T^*(b) R_T^{-1^*}(a)$ из тождества (5.8), имеем $(b - a)R_T(b)(vu_1^* - u_1 v^*)R_T^*(b) = R_T^{-1}(a)R_T(b)K_1 - K_1 R_T^*(b) R_T^{-1^*}(a) = R_T(b)((T - aI_n)K_1(T^* - bI_n) - (T - bI_n)K_1(T^* - aI_n))R_T^*(b) = (b - a)R_T(b)(K_1 T^* - TK_1)R_T^*(b)$. Тождество (5.10) для $r = 1$ доказано.

Докажем тождество (5.10) для $r = 2$. Вычитая соотношение $(a - b)R_T(a)u_2 v^* R_T^*(a) = K_1 + K_2 R_T^*(a) R_T^{-1^*}(b)$ из тождества (5.9), получим $(a - b)R_T(a)(vu_2^* - u_2 v^*)R_T^*(a) = R_T^{-1}(b)R_T(a)K_2 - K_2 R_T^*(a) R_T^{-1^*}(b) = R_T(a)((T - bI_n)K_2(T^* - aI_n) - (T - aI_n)K_2(T^* - bI_n))R_T^*(a) = (a - b)R_T(a)(K_2 T^* - TK_2)R_T^*(a)$. Тождество (5.10) для $r = 2$ доказано. $\square$

6. J-растягивающие функции, связанные с невырожденной системой ОМН

В дальнейшем ограничимся изучением невырожденного случая, когда

$$
K_1 > 0, \quad K_2 > 0. \tag{6.1}
$$

В этом случае система ОМН связана с двумя функциями, которые являются J-стягивающими в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и J-растягивающими в полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$, по отношению к сигнатурной матрице J (см. (2.7)).

Теорема 6.1. *Пусть*

$$
\begin{aligned}
U_1(z) &= \left\{ I - i(b - z) \begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z) K_1^{-1} R_T(b)[u_1, \ v]J \right\} \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline M_1 & I \end{array} \right], \\
U_2(z) &= \left\{ I - i(b - z) \begin{bmatrix} u_2^* \\ v^* \end{bmatrix}] R_{T^*}(z) K_2^{-1} R_T(b)[u_2, \ v]J \right\} \left[\begin{array}{c|c} I & -M_2 \\ \hline 0 & I \end{array} \right],
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

$$
M_1 = (b - a)v^* R_T^*(b) K_2^{-1} R_T(b) v, \quad M_2 = (b - a)u_1^* R_T^*(b) K_1^{-1} R_T(b) u_1.
$$

Тогда $(r = 1, 2)$

$$
J - U_r(z) J U_r^*(z) = i(\overline{z} - z) \begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z) K_r^{-1} R_{T^*}^*(z)[u_r, \ v]. \tag{6.3}
$$

Доказательство.

$$J - U_r(z)JU_r^*(z) = J - \left\{ I - i(b-z)\begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)K_r^{-1}R_T(b)[u_r,\ v]J \right\} J \times$$

$$\times \left\{ I + i(b-\overline{z})J\begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(b)K_r^{-1}R_{T^*}^*(z)[u_r,\ v] \right\} = -i(b-\overline{z})\begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(b)K_r^{-1}R_{T^*}^*(z)[u_r,\ v] +$$

$$+ i(b-z)\begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)K_r^{-1}R_T(b)[u_r,\ v] - |z-b|^2\begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)K_r^{-1} \times$$

$$\times R_T(b)[u_r,\ v]J\begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(b)K_r^{-1}R_{T^*}^*(z)[u_r,\ v] =$$

$$= i\begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)\Big(-(b-\overline{z})R_{T^*}^{-1}(z)R_T^*(b)K_r^{-1} + (b-z)K_r^{-1}R_T(b) \times$$

$$\times R_{T^*}^{*^{-1}}(z) - |z-b|^2K_r^{-1}R_T(b)\big(K_rT^* - TK_r\big)R_T^*(b)K_r^{-1}\Big)R_{T^*}^*(z)[u_r,\ v] =$$

$$= i(\overline{z}-z)\begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)K_r^{-1}R_{T^*}^*(z)[u_r,\ v].$$

Первое, второе и третье равенства в этой цепочке равенств следуют из очевидных тождеств

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ M_1 & I \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} I & M_1 \\ 0 & I \end{pmatrix} = J, \quad J^2 = J,$$

$$\begin{pmatrix} I & -M_2 \\ 0 & I \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} I & 0 \\ -M_2 & I \end{pmatrix} = J,$$

$$[u_r,\ v]J\begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} = i(K_rT^* - TK_r), \quad r = 1,2 \quad (\text{см. } (5.10)). \quad \square$$

Следствие. Матричные функции $U_1(z)$ и $U_2(z)$ обратимы во всех точках z, исключая узел интерполяции z_0 и комплексную сопряженную точку $\overline{z}_0$. Обратная матричная функция может быть найдена с помощью принципа симметрии

$$U_r^{-1}(z) = JU_r^*(\overline{z})J, \quad r = 1,2. \tag{6.4}$$

Более того,

$$J - U_r^{-1^*}(z)JU_r^{-1}(z) = -i(\overline{z}-z)J\begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)K_r^{-1}R_T(z)[u_r,\ v]J, \quad r = 1,2. \tag{6.5}$$

Доказательство. Пусть $z = \overline{z} = x$ в (6.3). Тогда $U_r(x)JU_r^*(x) - J = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Умножим это равенство справа на J. Получим

$$U_r(x)JU_r^*(x)J - I = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.6}$$

Рассмотрим голоморфную функцию $F(z) = U_r(z)JU_r^*(\overline{z})J - I$. Из (6.6) следует $F(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Из теоремы единственности $F(z) = 0$. Отсюда имеем (6.4). В равенстве (6.3) заменим z на $\overline{z}$ и умножим его слева и справа на J. Тогда для $r = 1,2$ получим

$$J - JU_r(\overline{z})JJJU_r^*(\overline{z})J = i(z-\overline{z})J\begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_{T^*}(\overline{z})K_r^{-1}R_{T^*}^*(\overline{z})[u_r,\ v]J =$$

$$= -i(\overline{z}-z)J\begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)K_r^{-1}R_T(z)[u_r,\ v]J.$$

Из (6.4) вытекает (6.5). $\square$

Обозначим

$$U_r(z) = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_r(z) & \beta_r(z) \\ \hline \gamma_r(z) & \delta_r(z) \end{array}\right], \quad r = 1,2, \tag{6.7}$$

где α_r, β_r, γ_r, δ_r — $m \times m$-матрицы.

Теорема 6.2. *Матричные функции $U_1(z)$, $U_2(z)$ связаны соотношением*

$$U_2(z) = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{z-a}{b-z}\right)I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U_1(z) \begin{pmatrix} \left(\dfrac{b-z}{z-a}\right)I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

Доказательство. В силу (6.7) перепишем соотношение (6.8) в виде

$$\begin{pmatrix} \alpha_2(z) & \beta_2(z) \\ \gamma_2(z) & \delta_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1(z) & (z-a)(b-z)^{-1}\beta_1(z) \\ (b-z)(z-a)^{-1}\gamma_1(z) & \delta_1(z) \end{pmatrix}. \tag{6.9}$$

Покажем, что $\alpha_1(z) = \alpha_2(z)$, из (6.9), (6.2) и (5.8) имеем

$$\begin{aligned} \alpha_1(z) - \alpha_2(z) &= I + (b-z)u_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} R_T(b) v - \\ &- (b-a)(b-z)u_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} R_T(b) u_1 v^* R_T^*(b) K_2^{-1} R_T(b) v - I - (b-z) u_2^* R_{T^*}(z) K_2^{-1} R_T(b) v = \\ &= (b-z) u_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} R_T(b) v - (b-z) u_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1}\{K_2 + K_1 R_T^*(b) R_T^{-1^*}(a)\} K_2^{-1} R_T(b) v - \\ &\qquad - (b-z) u_2^* R_{T^*}(z) K_2^{-1} R_T(b) v = 0. \end{aligned}$$

Докажем, что $\frac{b-z}{z-a}\gamma_1(z) = \gamma_2(z)$. Из (6.9), (6.2) и (5.8) имеем

$$\begin{aligned} \frac{b-z}{z-a}\gamma_1(z) - \gamma_2(z) &= \frac{b-z}{z-a}\{(b-z)v^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} R_T(b) v + (I - (b-z) v^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} \times \\ &\times R_T(b) u_1)(b-a) v^* R_T^*(b) K_2^{-1} R_T(b) v\} - (b-z) v^* R_{T^*}(z) K_2^{-1} R_T(b) v = \\ &= \frac{b-z}{z-a}\{(b-z) v^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} R_T(b) v + (b-a) v^* R_T^*(b) K_2^{-1} R_T(b) v - \\ &- (b-z)(b-a) v^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} R_T(b) u_1 v^* R_T^*(b) K_2^{-1} R_T(b) v\} - (b-z) v^* R_{T^*}(z) K_2^{-1} R_T(b) v = \\ &= \frac{b-z}{z-a}\{(b-a) v^* R_T^*(b) K_2^{-1} R_T(b) v - (b-z) v^* R_{T^*}(z) R_T^*(b) R_T^{-1^*}(a) K_2^{-1} \times \\ &\times R_T(b) v\} - (b-z) v^* R_{T^*}(z) K_2^{-1} R_T(b) v = \\ &= (b-z) v^* R_T^*(b) R_{T^*}(z) \left(\frac{b-a}{z-a} R_{T^*}^{-1}(z) - \frac{b-z}{z-a} R_T^{-1^*}(a) - R_T^{-1^*}(b)\right) K_2^{-1} R_T(b) v = 0. \end{aligned}$$

Подобным образом $\frac{z-a}{b-z}\beta_1(z) = \beta_2(z)$ и $\delta_1(z) = \delta_2(z)$. □

Обозначим

$$U_1(z) = \left[\begin{array}{c|c} I + (b-z) u_2^* R_{T^*}(z) K_2^{-1} R_T(b) v & -(b-z) u_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} R_T(b) u_1 \\ \hline (z-a) v^* R_{T^*}(z) K_2^{-1} R_T(b) v & I - (b-z) v^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} R_T(b) u_1 \end{array}\right] \tag{6.10}$$

и

$$U_2(z) = \left[\begin{array}{c|c} I + (b-z) u_2^* R_{T^*}(z) K_2^{-1} R_T(b) v & -(z-a) u_1^* R_{T^*}(z) K_1^{-1} R_T(b) u_1 \\ \hline (b-z) v^* R_{T^*}(z) K_2^{-1} R_T(b) v & I - (b-z) v^* R_T^*(z) K_1^{-1} R_T(b) u_1 \end{array}\right]. \tag{6.11}$$

7. Решение системы ОМН в невырожденном случае

Теорема 7.1. *В невырожденном случае система ОМН* (4.8) *эквивалентна факторизованной системе*

$$\begin{bmatrix} s_r(z) \\ I \end{bmatrix}^* \frac{U_r^{-1^*}(z) J U_r^{-1}(z)}{i(z-\overline{z})} \begin{bmatrix} s_r(z) \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \quad r = 1, 2. \tag{7.1}$$

Доказательство. Умножим неравенство (4.8) для $r = 1$ слева и справа на матрицы

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -\{s_1(z)^* v^* - u_1^*\} R_T^*(z) K_1^{-1} & I \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c|c} I & -K_1^{-1} R_T(z)\{v s_1(z) - u_1\} \\ \hline 0 & I \end{array}\right].$$

Получим

$$\left[\begin{array}{c|c} K_1 & 0 \\ \hline 0 & \frac{s_1(z) - s_1^*(z)}{z - \overline{z}} - \{s_1^*(z) v^* - u_1^*\} R_T^*(z) K_1^{-1} R_T(z) \{v s_1(z) - u_1\} \end{array}\right] \geq 0.$$

Отсюда имеем

$$\frac{s_1(z) - s_1^*(z)}{z - \overline{z}} - \{s_1^*(z) v^* - u_1^*\} R_T^*(z) K_1^{-1} R_T(z) \{v s_1(z) - u_1\} \geq 0.$$

Последнее неравенство может быть записано следующим образом:

$$\begin{bmatrix} s_1(z) \\ I \end{bmatrix}^* \left\{ \frac{J}{i(z-\overline{z})} + J \begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z) K_1^{-1} R_T(z) [u_1 \ v] J \right\} \begin{bmatrix} s_1(z) \\ I \end{bmatrix} \geq 0.$$

Отсюда и из (6.3) следует

$$\begin{bmatrix} s_1(z) \\ I \end{bmatrix}^* \left\{ \frac{J}{i(z-\overline{z})} + \frac{U_1^{-1^*}(z) J U_1^{-1}(z) - J}{i(z-\overline{z})} \right\} \begin{bmatrix} s_1(z) \\ I \end{bmatrix} \geq 0.$$

Для $r = 1$ доказано, что (4.8) эквивалентно неравенству (7.1). Подобным образом может быть доказан случай $r = 2$. □

Теорема 7.2. *Пусть* $U_1(z)$ *и* $\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}$ *определены, как в* (6.10) *и определении* 2.1 *соответственно. Тогда линейное дробное преобразование*

$$s(z) = \{\alpha_1(z) p(z) + \beta_1(z) q(z)\}\{\gamma_1(z) p(z) + \delta_1(z) p(z)\}^{-1} \tag{7.2}$$

дает взаимно однозначное отображение между классами эквивалентности $\mathcal{S}^\infty[a, b]$ *(см. определение* 2.2*) и решениями задачи Каратеодори* $\mathcal{L}$ (3.1).

Доказательство разбивается на шаги.

Шаг 1. Пусть $p(z)$, $q(z)$ удовлетворяют (2.8)–(2.10), тогда пара

$$\begin{bmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{bmatrix} = U_1(z) \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \tag{7.3}$$

также удовлетворяет (2.8)–(2.10).

Из (6.4) и (6.10) следует, что матричная функция $U_1(z)$ является неособенной во всех точках комплексной плоскости с сечением вдоль интервала $[a, b]$, исключая z_0 и $\overline{z}_0$. Следовательно, пара $\begin{bmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{bmatrix}$ удовлетворяет условию (2.8) вместе с парой $\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}$. Теперь покажем, что (2.9) выполняется для пары $\begin{bmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{bmatrix}$. Для $\operatorname{Im} z \neq 0$, $z \notin \mathcal{D}$, получим

$$\begin{bmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{bmatrix}^* \frac{(-J)}{i(\overline{z}-z)} \begin{bmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}^* U_1^*(z) \frac{(-J)}{i(\overline{z}-z)} U_1(z) \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}^* \frac{(-J)}{i(\overline{z}-z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Здесь использовано неравенство $U_1(z)(-J)U_1^*(z)/i(\overline{z}-z) \geq (-J)/i(\overline{z}-z)$, которое следует из (6.3). Применяя теорему 6.2, подобным образом можно доказать (2.10).

Шаг 2. Теперь покажем, что $\det q_1(z) \not\equiv 0$.

Из (7.3) следует

$$0 \le \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}^* \frac{J}{i(z-\overline{z})} \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{bmatrix}^* \frac{U_1^{-1^*}(z) J U_1^{-1}(z)}{i(z-\overline{z})} \begin{bmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{bmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{bmatrix}^* \frac{U_1^{-1^*}(z) J U_1^{-1}(z)}{i(z-\overline{z})} \begin{bmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{bmatrix} \ge 0. \tag{7.4}$$

Пусть $e \in \mathbb{C}^m$ и z_1 ($\operatorname{Im} z_1 \neq 0$, $z \notin \mathcal{D}$) таковы, что $\det U_1(z_1) \neq 0$, $\det(p_1^*(z_1)p_1(z_1) + q_1^*(z_1)q_1(z_1)) \neq 0$, $q_1(z_1)e = 0$. Из (7.4) следует

$$\begin{bmatrix} p_1(z_1)e \\ 0 \end{bmatrix}^* \frac{J - U_1^{-1^*}(z_1) J U_1^{-1}(z_1)}{i(z_1-\overline{z}_1)} \begin{bmatrix} p_1(z_1)e \\ 0 \end{bmatrix} \le 0.$$

В силу (6.5)

$$\begin{bmatrix} p_1(z_1)e \\ 0 \end{bmatrix}^* J \begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z_1) K_1^{-1} R_T(z_1) [u_1, \ v] J \begin{bmatrix} p_1(z_1)e \\ 0 \end{bmatrix} \le 0.$$

Но ядро в последнем неравенстве строго положительно. Поэтому $p_1(z_1)e = 0$. В силу (2.8) равенства $p_1(z_1)e = q_1(z_1)e = 0$ дают $e = 0$. Значит, $\det q_1(z_1) \neq 0$. Следовательно, $\det q_1(z) \not\equiv 0$.

Шаг 3. Покажем, что линейное дробное преобразование (7.2) определено для всех пар $\left[\begin{smallmatrix} p(z) \\ q(z) \end{smallmatrix}\right]$, которые удовлетворяют (2.8)–(2.10) и $s(z) \in \mathcal{S}[a,b]$.

Из (7.3), используя обозначения (6.7), получим

$$\begin{bmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1(z)p(z) + \beta_1(z)q(z) \\ \gamma_1(z)p(z) + \delta_1(z)q(z) \end{bmatrix}.$$

Согласно шагу 2 $\det q_1(z) \not\equiv 0$. Поэтому $s(z) = p_1(z)q_1^{-1}(z)$ определяется как мероморфная матричная функция и

$$s(z) = \{\alpha_1(z)p(z) + \beta_1(z)q(z)\}\{\gamma_1(z)p(z) + \delta_1(z)q(z)\}^{-1}.$$

Пара $\left[\begin{smallmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{smallmatrix}\right]$ эквивалентна $\left[\begin{smallmatrix} s(z) \\ I \end{smallmatrix}\right]$. Отсюда пара $\left[\begin{smallmatrix} s(z) \\ I \end{smallmatrix}\right]$ удовлетворяет (2.9) и (2.10) в невещественных точках голоморфности, т.е.

$$\frac{s(z) - s^*(z)}{(z-\overline{z})} \ge 0, \quad \frac{\frac{z-a}{b-z}s(z) - \frac{\overline{z}-a}{b-\overline{z}}s^*(z)}{(z-\overline{z})} \ge 0.$$

Первое из неравенств показывает, что все невещественные особенности $s(z)$ являются устранимыми (ср., напр., с [12], лемма 2.1.9). В силу предложения 2.2 s голоморфно в любой точке, принадлежащей $\mathbb{R} \setminus [a,b]$. Отсюда $s(z) \in \mathcal{S}[a,b]$.

Шаг 4. Пары $\left[\begin{smallmatrix} p(z) \\ q(z) \end{smallmatrix}\right]$ и $\left[\begin{smallmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{smallmatrix}\right]$, удовлетворяющие условиям (2.8)–(2.10), дают ту же самую матричную функцию $s(z)$ как результат линейно-дробного преобразования (7.2) тогда и только тогда, когда эти пары эквивалентны.

Очевидно, линейное дробное преобразование (7.2), примененное к эквивалентным парам $\left[\begin{smallmatrix} p(z) \\ q(z) \end{smallmatrix}\right]$ и $\left[\begin{smallmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{smallmatrix}\right]$, приводит к одной и той же матричной функции $s(z)$.

Предположим обратное, что пары $\left[\begin{smallmatrix} p(z) \\ q(z) \end{smallmatrix}\right]$ и $\left[\begin{smallmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{smallmatrix}\right]$ приводят к одной и той же функции $s(z)$, как к результату одного и того же линейного преобразования (7.2). Введем пары

$$\begin{bmatrix} u(z) \\ v(z) \end{bmatrix} = U_1(z) \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u_1(z) \\ v_1(z) \end{bmatrix} = U_1(z) \begin{bmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{bmatrix}.$$

Согласно шагу 2

$$U_1^{-1}(z)\begin{bmatrix} u(z)v^{-1}(z) \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(z)v^{-1}(z) \\ q(z)v^{-1}(z) \end{bmatrix},$$

$$U_1^{-1}(z)\begin{bmatrix} u_1(z)v_1^{-1}(z) \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(z)v_1^{-1}(z) \\ q_1(z)v_1^{-1}(z) \end{bmatrix}.$$

Поскольку $u(z)v^{-1}(z) = u_1(z)v_1^{-1}(z) = s(z)$, то $\left[\begin{smallmatrix} p(z)v^{-1}(z) \\ q(z)v^{-1}(z) \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} p_1(z)v_1^{-1}(z) \\ q_1(z)v_1^{-1}(z) \end{smallmatrix}\right]$. Отсюда $p(z) = p_1(z)v_1^{-1}(z)v(z)$, $q(z) = q_1(z)v_1^{-1}(z)v(z)$.

Шаг 5. Предположим, что $s(z)$ принадлежит $\mathcal{L}$. Тогда $s(z)$ допускает представление (7.2).

Предположим, что $s(z) \in \mathcal{L}$. Согласно теоремам 4.1 и 7.1 неравенство (7.1) выполняется для $r = 1, 2$ и каждого $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Рассмотрим пару

$$\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} = U_1^{-1}(z)\begin{bmatrix} s(z) \\ I \end{bmatrix}. \tag{7.5}$$

Покажем, что (2.8)–(2.10) выполняется для пары (7.5). Действительно, для всех невещественных точек z, отличных от z_0 и $\overline{z}_0$, получим

$$\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(z) \\ I \end{bmatrix}^* U_1^{-1^*}(z)U_1^{-1}(z)\begin{bmatrix} s(z) \\ I \end{bmatrix} \geq 0.$$

Тогда относительно (7.1) получим

$$\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}^* \frac{J}{i(z-\overline{z})}\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(z) \\ I \end{bmatrix}^* \frac{U_1^{-1^*}(z)JU_1^{-1}(z)}{i(z-\overline{z})}\begin{bmatrix} s(z) \\ I \end{bmatrix} \geq 0.$$

Таким образом, условие (2.9) выполнено. По аналогии, в силу теоремы 6.2 можно убедиться, что условие (2.10) также выполняется. Соотношение (7.5) дает

$$\begin{bmatrix} s(z) \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1(z)p(z) + \beta_1(z)q(z) \\ \gamma_1(z)p(z) + \delta_1(z)q(z) \end{bmatrix}.$$

Отсюда $s(z) = \alpha_1(z)p(z)+\beta_1(z)q(z)$, $I = \gamma_1(z)p(z)+\delta_1(z)q(z)$. Эти соотношения означают, что $s(z)$ допускает представление (7.2) для пары $\left[\begin{smallmatrix} p(z) \\ q(z) \end{smallmatrix}\right]$, которая удовлетворяет условиям (2.8)–(2.10).

Шаг 6. Если $\left[\begin{smallmatrix} p(z) \\ q(z) \end{smallmatrix}\right]$ — произвольная, удовлетворяющая (2.8)–(2.10) пара, тогда линейное дробное преобразование (7.2) определяет матричную функцию $s(z)$, которая принадлежит $\mathcal{L}$.

Рассмотрим пару

$$\begin{bmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{bmatrix} = U_1(z)\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}.$$

Матричная функция $q_1(z)$ мероморфно обратима. Поэтому

$$U_1^{-1}(z)\begin{bmatrix} p_1(z)q_1^{-1}(z) \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(z)q_1^{-1}(z) \\ q(z)q_1^{-1}(z) \end{bmatrix}. \tag{7.6}$$

Пусть $s(z) = p_1(z)q_1^{-1}$, $P(z) = p(z)q_1^{-1}(z)$, $Q(z) = q(z)q_1^{-1}(z)$. Поскольку пара $\left[\begin{smallmatrix} P(z) \\ Q(z) \end{smallmatrix}\right]$ эквивалентна $\left[\begin{smallmatrix} p(z) \\ q(z) \end{smallmatrix}\right]$, то она удовлетворяет (2.8)–(2.10). Соотношение (2.9) дает

$$0 \leq \begin{bmatrix} P(z) \\ Q(z) \end{bmatrix}^* \frac{J}{i(z-\overline{z})}\begin{bmatrix} P(z) \\ Q(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(z) \\ I \end{bmatrix}^* \frac{U_1^{-1^*}(z)JU_1^{-1}(z)}{i(z-\overline{z})}\begin{bmatrix} s(z) \\ I \end{bmatrix}.$$

Отсюда $s(z)$ удовлетворяет (7.1) для $r = 1$. По аналогии в силу теоремы 6.2 можно убедиться, что $s(z)$ удовлетворяет (7.1) для $r = 2$. Применяя шаг 3 и теоремы 7.1 и 4.2, имеем $s(z) \in \mathcal{L}$. $\square$

Теорема 7.3. *Условие $K_1 \geq 0$, $K_2 \geq 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы задача* (3.1) *была разрешимой.*

Доказательство этой теоремы следует схеме доказательства теоремы 9 из [2].

Автор выражает благодарность Bernd Fritzsche, Bernd Kirstein за плодотворные обсуждения и рецензенту за полезные советы.

Литература

1. Крейн М.Г., Нудельман А.А. *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Идеи и проблемы П.Л. Чебышева и А.А. Маркова и их дальнейшее развитие.* – М.: Наука, 1973. – 551 с.
2. Дюкарев Ю.М., Чоке Риверо А.Е. *Задача Неванлинны–Пика в классе $S[a, b]$* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 2. – С. 36–45.
3. Дюкарев Ю.М., Чоке Риверо А.Е. *Степенная проблема моментов на компактном интервале* // Матем. заметки. – 2001. – Т. 69. – Вып. 2. – С. 200–213.
4. Choque Rivero A.E., Dyukarev Yu., Fritzsche B., Kirstein B. *A truncated matricial moment problem on a finite interval. The case of an odd number of prescribed moments* // Oper. Theory Adv. Appl.
5. Ковалишина И.В. *Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1983. – Т. 47. – № 3. – С. 455–497.
6. Ivanchenko T.S., Sakhnovich L.A. *An operator approach to the Potapov scheme for the solution of interpolation problems* // Oper. Theory Adv. Appl. – 1994. – V. 72. – P. 48–86.
7. Bolotnikov V., Sakhnovich L. *On an operator approach to interpolation problems for Stieltjes functions* // Integral Equations Operator Theory. – 1999. – V. 35. – № 4. – P. 423–470.
8. Dyukarev Yu. *Integral representations of a pair of nonnegative operators and interpolations problems on the Stieltjes class* // Oper. Theory Adv. Appl. – 1997. – V. 95. – P. 165–184.
9. Дюкарев Ю.М. *Общая схема решения задач интерполяции в классе Стилтьеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов.* I // Матем. физ. Аналитич. геом. – 1999. – Т. 6. – № 1/2. – С. 30–54.
10. Дюкарев Ю.М. *Факторизация операторных функций мультипликативного класса Стилтьеса* // Докл. НАН Украины. Матем. естеств. техн. науки. – 2000. – № 9. – С. 23–26.
11. Choque Rivero A.E., Dyukarev Yu., Fritzsche B., Kirstein B. *A truncated matricial moment problem on a finite interval.* – Interpolation, Schur Functions and Moment Problems, Oper. Theory Adv. Appl. Vol. 165, Birkhaüser, Basel, 2006. – P. 121–173.
12. Dubovoj V.K., Fritzsche B., Kirstein B. *Matricial version of the classical Schur problem.* – Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 129, Teubner, Stuttgart–Leipzig, 1992. – 355 p.

Мичоаканский университет
дэ Сань Николас дэ Идальго
Морелия, Мичоакан, Мексика

Поступили
первый вариант 01.10.2004
окончательный вариант 04.04.2006