

*Р. ГАБАСОВ, Ф. М. КИРИЛЛОВА, Н. С. ПАВЛЕНКО*

## ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КЛАССЕ ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЕНИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

В данной работе рассматриваются задачи оптимального управления (ОУ) линейными системами в классе дискретных управлений, которые, в частности, на каждом промежутке квантования представляют многочлены конечной степени. Учет геометрических ограничений на коэффициенты указанных многочленов и на значения управлений в каждый момент времени превращает исследуемые задачи в сложные типы экстремальных задач. Предлагаются методы вычисления оптимальных программ и синтеза ОУ типа обратной связи для двух классов управляющих воздействий (дискретных управлений первой степени с конечным числом периодов квантования времени и для управлений конечной степени с одним периодом квантования). Методы базируются на динамической реализации специального алгоритма линейного программирования (ЛП). Результаты решения задач ОУ используются для синтеза ограниченных стабилизирующих обратных связей по принципу скользящего управления. Методы иллюстрируются на численных примерах.

### 1. Введение

Математическая теория оптимальных процессов [1] базируется на весьма широких классах управлений, включающих, в частности, измеримые и кусочно-непрерывные функции. В конструктивной теории ОУ, нацеленной на решение задач с использованием вычислительной техники, широко применяются более узкие классы управлений. Среди них особое распространение получили дискретные управления. Последние могут менять свои значения лишь в заранее определенные моменты времени, а на промежутках между ними сохраняют постоянные значения. В данной работе подобные управления называются дискретными управлениями нулевой степени. Их естественным обобщением являются дискретные управления конечной степени. В общем случае дискретные управления конечной степени (с постоянным периодом квантования) имеют вид

$$u(t) = \sum_{j=0}^p u_j(t_k) \varphi_j(t - t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}[ , \quad k = \overline{0, N-1},$$

где  $t_k = t_* + kh$ ,  $h = (t^* - t_*)/N$ ;  $\varphi_j(t)$ ,  $t \in [0, h[$ ,  $j = \overline{0, p}$ , — заданные линейно независимые функции;  $u_j(t_k)$ ,  $j = \overline{0, p}$ ,  $k = \overline{0, N-1}$ , — параметры дискретной функции. Выбор базисных функций  $\varphi_j(t)$ ,  $t \in [0, h[$ ,  $j = \overline{0, p}$ , зависит от природы исследуемой задачи ОУ. В дальнейшем чаще всего используется простейший тип базисных функций  $\varphi_j(t) = t^j$ ,  $j = \overline{0, p}$ . Совокупность соответствующих им управлений обозначим через  $U_N^p$ .

Расширение классического типа дискретных управлений (нулевой степени) полезно и в качественной теории управления. Известно, что исследование непрерывной системы управления

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (A \in R^{n \times n}, \quad b \in R^n) \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ Ф03М-031, Ф02Р-008) и государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь “Математические структуры”.

в классе дискретных управлений нулевой степени эквивалентно исследованию дискретной системы

$$x(t+h) = A_h x(t) + b_h u(t), \quad t \in T_h = \{t_*, t_* + h, \dots, t^* - h\} \quad (2)$$

$$\left( A_h = \exp(Ah), \quad b_h = \int_0^h \exp(A\xi) d\xi b \right),$$

если за состояниями системы (1) следить только в моменты  $t \in T_h$ . Доказано, что существует такое число  $h_0 > 0$ , что при всех  $0 < h < h_0$  для управляемости непрерывной системы (1) ( $\text{rank}(b, Ab, \dots, A^{(n-1)}b) = n$ ) в классе кусочно-непрерывных функций необходимо и достаточно управляемости дискретной системы (2) ( $\text{rank}(b_h, A_h b_h, \dots, A_h^{(n-1)} b_h) = n$ ). Принципиальное отличие свойства управляемости системы (1) от аналогичного свойства системы (2) состоит в том, что если управляемую непрерывную систему (1) можно перевести из одного произвольного состояния в другое за сколь угодно малое время, то для дискретной системы (2) это время не меньше  $nh$ .

Ситуация меняется при использовании дискретных управлений ненулевой степени. Если управляемость системы (1) исследовать в классе дискретных функций степени  $p \geq n - 1$ , то при любом  $h$  система (1) управляема в классе кусочно-непрерывных функций тогда и только тогда, когда она управляема в классе дискретных функций степени  $p$ . При этом управляемую систему (2) можно перевести из одного состояния в любое другое за минимально возможное время  $h$ .

*Структура работы.* В п. 2 ставится задача построения алгоритмов вычисления оптимальных программ и синтеза оптимальных управлений типа обратной связи, приводится эквивалентная функциональная форма этой задачи (п. 3). Поставленная задача решается в классе дискретных управлений первой степени (п. 4). Здесь описывается динамическая реализация адаптивного метода ЛП [2] для вычисления оптимальных программ, затем приводится метод реализации в режиме реального времени оптимальных управлений типа обратной связи. Задача оптимизации динамических систем в классе дискретных управлений произвольной конечной степени исследуется в п. 5. Рассматривается случай, когда период квантования времени совпадает со всем промежутком управления. Задача ОУ сводится к задаче ЛП с континуумом ограничений [3]. Описывается быстрый алгоритм вычисления оптимальных программ. Для рассматриваемой задачи принцип оптимальности Беллмана не имеет места. Однако классический способ построения оптимальных обратных связей можно использовать и для нее.

Работа завершается приложением предложенных методов ОУ к задаче синтеза по принципу скользящего управления ограниченных стабилизирующих обратных связей. Этот принцип известен инженерам, видимо, давно. Он состоит в следующем. При многоэтапном управлении физическим процессом по доступным к текущему этапу измерениям процесса составляется его математическая модель на некоторый конечный будущий промежуток времени (горизонт). Для этой модели производится расчет управления, обладающего желаемыми свойствами. Результат используется для управления физическим процессом вплоть до следующего этапа. Двойственный вариант метода скользящего управления в теории случайных процессов называется методом скользящих средних. После получения первых результатов по оптимальному управлению в режиме реального времени [4] авторы данной работы стали использовать прямой вариант этого метода для стабилизации динамических систем [5]. Докладывая о полученных результатах на семинаре проф. К. Малиновского (Варшава, 1992), авторы узнали о работах по МРС (Model Predictive Control) [6], в которых для стабилизации динамических систем использовалось решение линейно-квадратичной задачи Летова-Калмана. Как следует из [7], эти работы, в которых не учитывались геометрические ограничения на управления, не привлекли внимания практиков. Интерес к МРС сильно возрос и началось интенсивное его внедрение в практику управления реальными процессами после того, как в этой методологии стали использовать задачи ОУ с геометрическими ограничениями на управление. В отличие от работ авторов, для решения задач ОУ в МРС не создавались специальные быстрые алгоритмы, а после полной их дискретизации

использовались стандартные методы квадратичного программирования. Это, конечно, сужает возможности МРС, не позволяя рассматривать большие горизонты и малые периоды дискретизации. Эффективность методов решения задач ОУ, изложенных в данной работе, почти не зависит от величины периода квантования.

## 2. Постановка задачи

Пусть  $T = [t_*, t^*]$  — промежуток управления,  $h = (t^* - t_*)/N$  — период квантования. Функцию  $u(t)$ ,  $t \in T$ , назовем дискретным управлением степени  $p$  с периодом квантования  $h$  ( $u(\cdot) = (u(t), t \in T) \in U_N^p$ ), если

$$u(t) = \sum_{j=0}^p u_j(t_k)(t - t_k)^j, \quad t \in [t_k, t_k + h]; \quad |u_j(t_k)| \leq u_j^*, \quad j = \overline{0, p}, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (3)$$

В классе дискретных управлений класса  $U_N^p$  рассмотрим линейную задачу ОУ

$$\begin{aligned} c'x(t^*) \rightarrow \max; \quad \dot{x} &= A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_0; \\ Hx(t^*) &= g; \quad |u(t)| \leq L, \quad t \in T, \quad u(\cdot) \in U_N^p \\ (H \in R^{m \times n}, \quad \text{rank } H &= m < n, \quad g \in R^m), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $x = x(t)$  —  $n$ -вектор состояния динамической системы в момент времени  $t$ ;  $u = u(t)$  — значение скалярного управляющего воздействия;  $A(t)$ ,  $b(t)$ ,  $t \in T$ , — кусочно-непрерывные  $n \times n$ -матричная и  $n$ -векторная функции.

Понятия допустимого программного управления (программы)  $u(\cdot)$ , оптимального программного управления (оптимальной программы)  $u^0(\cdot)$ ,  $\varepsilon$ -оптимального управления  $u^\varepsilon(\cdot)$  вводятся стандартно [8]. Каждая программа  $u(\cdot)$  порождает допустимую траекторию  $x(t)$ ,  $t \in T$ , системы управления (4) и выходной сигнал  $z(t^*) = Hx(t^*)$ .

Чтобы ввести понятие ОУ типа обратной связи, погрузим задачу (4) в семейство задач

$$\begin{aligned} c'x(t^*) \rightarrow \max; \quad \dot{x} &= A(t)x + b(t)u, \quad x(\tau) = z; \quad Hx(t^*) = g; \\ |u(t)| \leq L, \quad t \in T^\tau &= [\tau, t^*]; \quad u(\cdot) \in U_{N(\tau)}^p \quad (N(\tau) = (t^* - \tau)/h), \end{aligned} \quad (5)$$

зависящее от скаляра  $\tau \in T_h$  и  $n$ -вектора  $z$ . Пусть  $u^0(t | \tau, z)$ ,  $t \in T^\tau$ , — оптимальная программа задачи (5) для позиции  $(\tau, z)$ ;  $Q_\tau \subset R^n$  — множество состояний  $z$  системы управления, для которых задача (5) имеет решение. Функцию

$$u^0(\tau, z) = u^0(\tau | \tau, z), \quad z \in Q_\tau, \quad \tau \in T_h, \quad (6)$$

назовем оптимальным управлением типа (дискретной) обратной связи для задачи (4).

Цель работы — предложить эффективные алгоритмы вычисления оптимальной программы и реализации оптимальной обратной связи (6).

## 3. Эквивалентная функциональная форма задачи

Введем дискретные управления нулевой степени

$$u_j(t) = u_j(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}[, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{0, p}. \quad (7)$$

Положим

$$b_j(t) = b(t)(t - t_k)^j, \quad t \in [t_k, t_{k+1}[, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{0, p}.$$

Подставим управление (3) в систему (4). В результате получим систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + \sum_{j=0}^p b_j(t)u_j$$

с  $p + 1$  дискретными управлениями нулевой степени (7). Ограничения (4) на управление  $u(t)$ ,  $t \in T$ , в терминах (7) примут вид

$$-L \leq \sum_{j=0}^p u_j(t_k)(t - t_k)^j \leq L, \quad t \in [t_k, t_{k+1}[; \quad |u_j(t_k)| \leq u_j^*, \quad j = \overline{0, p}, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (8)$$

Таким образом, задача (4) с одним управлением класса  $U_N^p$  эквивалентна следующей задаче ОУ с  $p + 1$  управлениями класса  $U_N^0$ :

$$c'x(t^*) \rightarrow \max; \quad \dot{x} = A(t)x + \sum_{j=0}^p b_j(t)u_j, \quad x(t_*) = x_0; \quad Hx(t^*) = g; \quad (9)$$

$$-L \leq \sum_{j=0}^p u_j(t_k)(t - t_k)^j \leq L, \quad t \in [t_k, t_{k+1}[; \quad |u_j(t_k)| \leq u_j^*, \quad j = \overline{0, p}, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Главная особенность линейной задачи (9) с многомерным управлением заключается в континууме основных ограничений на управление. Задачу (9) решим для двух случаев: 1)  $p = 1$ ,  $N > 1$ ; 2)  $p > 1$ ,  $N = 1$ . Методы решения задачи в общем случае следуют из методов, разработанных для этих частных случаев.

#### 4. Оптимальное управление в классе дискретных управлений первой степени

В случае дискретных управлений первой степени ( $u(\cdot) \in U_N^1$ ) ограничения (8) примут вид

$$-L \leq u_0(t_k) + (t - t_k)u_1(t_k) \leq L, \quad t \in [t_k, t_{k+1}[; \\ |u_0(t_k)| \leq u_0^*, \quad |u_1(t_k)| \leq u_1^*, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (10)$$

Положим

$$v(t_k) = u_0(t_k), \quad w(t_k) = u_1(t_k), \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Тогда из (10) получим

$$-L \leq v(t_k) + (t - t_k)w(t_k) \leq L, \quad t \in [t_k, t_{k+1}[; \\ |v(t_k)| \leq u_0^*, \quad |w(t_k)| \leq u_1^*, \quad k = \overline{0, N-1}. \quad (11)$$

Неравенства (11) выполняются тогда и только тогда, когда

$$|v(t_k)| \leq L, \quad |v(t_k) + hw(t_k)| \leq L, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Вводя обозначения

$$v(t) = v(t_k), \quad w(t) = w(t_k), \quad b_v(t) = b(t), \quad b_w(t) = b(t)(t - t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}[; \quad k = \overline{0, N-1}, \\ L = u_0^*, \quad M = u_1^*,$$

запишем задачу (4) в виде

$$c'x(t^*) \rightarrow \max; \quad \dot{x} = A(t)x + b_v(t)v + b_w(t)w, \quad x(t_*) = x_0; \quad (12) \\ Hx(t^*) = g; \quad (v, w) \in \Omega,$$

где

$$\Omega = \{(v, w) : |v + hw| \leq L, \quad |v| \leq L, \quad |w| \leq M\}. \quad (13)$$

Рассмотрим три характерных вида множества  $\Omega$ : а)  $Mh > 2L$ ; б)  $L < Mh < 2L$ ; в)  $Mh < L$  (рис. 1).

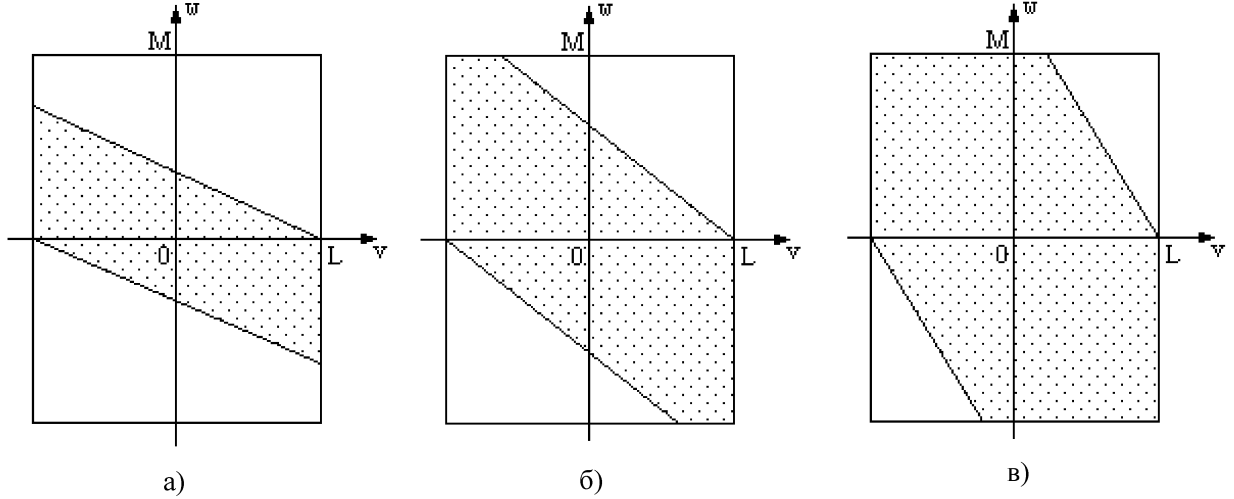


Рис. 1

Заметный эффект дискретных управлений ненулевой степени (по сравнению с дискретными управлениями нулевой степени) проявляется при больших  $Mh$ , поэтому исследуем подробно лишь случай а).

Задачи ОУ с полиэдральными ограничениями на управление исследованы в [9]. Специальный вид полиэдральных ограничений (13) позволяет существенным образом упростить конструкции [9].

Прежде всего, используя формулу Коши [10], запишем задачу (12) в эквивалентной функциональной форме

$$\begin{aligned} \sum_{t \in T_h} c_v(t)v(t) + \sum_{t \in T_h} c_w(t)w(t) &\rightarrow \max; \\ \sum_{t \in T_h} d_{vi}(t)v(t) + \sum_{t \in T_h} d_{wi}(t)w(t) &= \tilde{g}_i, \quad i = \overline{1, m}; \\ |v(t) + hw(t)| \leq L, \quad |v(t)| \leq L, \quad |w(t)| \leq M, \quad t \in T_h. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_v(t) &= \int_t^{t+h} \psi'_c(\tau)b_v(\tau)d\tau, \quad c_w(t) = \int_t^{t+h} \psi'_c(\tau)b_w(\tau)d\tau, \\ d_{vi}(t) &= \int_t^{t+h} \psi'_{hi}(\tau)b_v(\tau)d\tau, \quad d_{wi}(t) = \int_t^{t+h} \psi'_{hi}(\tau)b_w(\tau)d\tau, \\ \tilde{g}_i &= g_i - \psi'_{hi}(t_*)x_0; \end{aligned} \quad (15)$$

$\psi_c(t)$ ,  $\psi_{hi}(t)$ ,  $t \in T$ , — решения сопряженного уравнения

$$\dot{\psi} = -A'(t)\psi \quad (16)$$

с начальными условиями

$$\psi(t^*) = c$$

и

$$\psi(t^*) = h_i \quad (17)$$

соответственно.

При использовании параллельных вычислений построение элементов (15) имеет такую же трудоемкость, как и построение аналогичных элементов в случае управлений класса  $U_N^0$  [11].

Основным инструментом адаптивного метода [2] является опора. В описанной задаче она строится следующим образом. Из элементов множества  $T_h$  составим множества (рис. 2)  $T_{оп}^v \subset T_h$ ,  $T_{оп}^w = T_h$ ,  $S_{оп} \subset T_h$ . Обозначим  $S_H = T_h \setminus S_{оп}$ ,  $S_H^+ = \{s \in S_H : s \in T_{оп}^v\}$ ,  $S_H^- = \{s \in S_H : s \in T_{оп}^w\}$ . Положим  $T_{оп+}^v = S_H^+$ ,  $T_{H-}^v = S_H^-$ ,  $T_{оп+}^w = S_H^+$ ,  $T_{оп-}^w = S_H^-$ ,  $T_{оп0}^v = T_{оп}^v \setminus T_{оп+}^v$ ,  $T_H^v = T_h \setminus T_{оп}^v$ ,  $T_{H0}^v = T_H^v \setminus T_{H-}^v$ ,  $T_{оп1}^w = T_{оп}^w \setminus T_{оп+}^w$ ,  $T_{оп2}^w = T_H^w \setminus T_{оп-}^w$ ,  $T_{оп0}^w = S_H$ ,  $S_{оп}^1 = T_{оп0}^v$ ,  $S_{оп}^2 = T_{оп2}^w$ , поэтому  $|T_{оп}^v| = m - |S_H|$ .

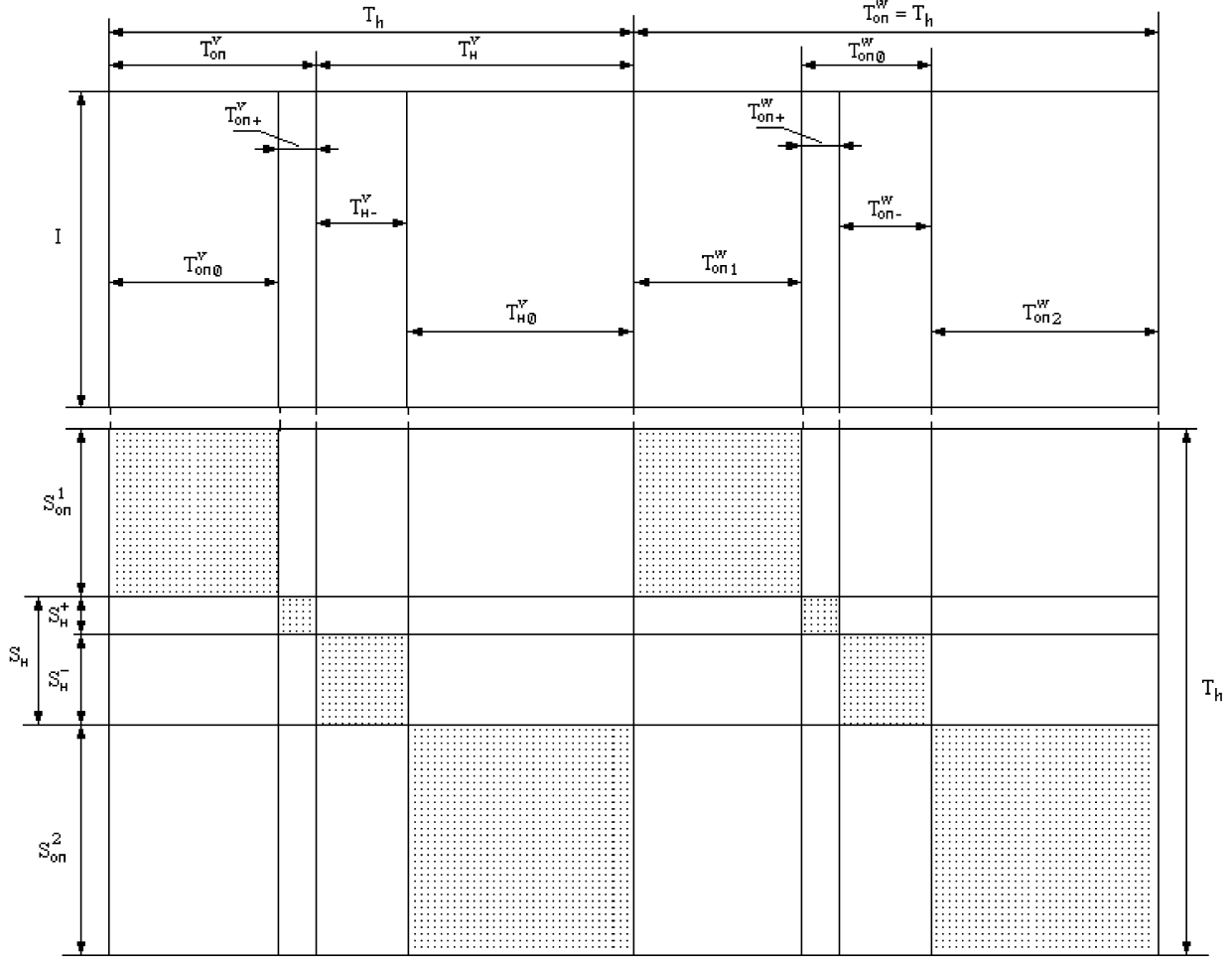


Рис. 2

**Замечание 1.** Равенство  $T_{оп+}^v = S_H^+$  означает, что  $S_H^+$  состоит из элементов  $s \in S_H^+$ , номера которых совпадают с номерами элементов  $t \in T_{оп+}^v$ .

Сформируем  $(|S_{оп}| + m) \times (|T_{оп}^v| + |T_{оп}^w|)$ -матрицу

$$D_{оп} = \begin{pmatrix} d_v(t) & t \in T_{оп}^v & \vdots & d_w(t) & t \in T_{оп}^w \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{st} & t \in T_{оп}^v & \vdots & h e_{st} & t \in T_{оп}^w \\ s \in S_{оп} & \vdots & s \in S_{оп} & \vdots & s \in S_{оп} \end{pmatrix},$$

где  $e_{st} = 1$  при  $s = t$ ,  $e_{st} = 0$  при  $s \neq t$ . Совокупность  $K_{оп} = \{S_{оп}, T_{оп}\}$  с  $S_{оп} \neq \emptyset$ ,  $T_{оп}^v \neq \emptyset$  назовем опорой, если  $\det D_{оп} \neq 0$ . Матрица  $D_{оп}$  имеет специальную структуру, что позволяет просто проверить ее невырожденность.

**Лемма.** Матрица  $D_{\text{оп}}$  невырождена тогда и только тогда, когда невырождена  $m \times m$ -матрица

$$D_{\text{оп}}^R = (d_v(t), t \in T_{\text{оп}+}^v; d_v(t) - d_w(t)/h, t \in T_{\text{оп}0}^v; d_w(t), t \in T_{\text{оп}0}^w).$$

Из определения (15) элементов (рабочей опорной) матрицы  $D_{\text{оп}}^R$  следует динамический способ ее построения, при котором элементы матрицы получаются путем параллельного интегрирования сопряженной системы (16) с начальными условиями (17),  $i = \overline{1, m}$ .

Опору  $K_{\text{оп}}$  сопровождают три элемента со следующими характеристиками.

1. Вектор потенциалов (вектор Лагранжа)  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ . Построим его, решив систему из  $m$  уравнений

$$\mu' D_{\text{оп}}^R = (c_v(t), t \in T_{\text{оп}+}^v; c_v(t) - c_w(t)/h, t \in T_{\text{оп}0}^v; c_w(t), t \in T_{\text{оп}0}^w)'$$

Такую же систему из  $m$  уравнений приходится решать для построения вектора потенциалов в случае управлений класса  $U_N^0$ .

2. Коуправление  $\delta_h(t)$ ,  $t \in T_h$ , и его составляющие  $\delta_h^v(t)$ ,  $\delta_h^w(t)$ ,  $t \in T_h$ . Неопорные значения коуправления положим равными нулю<sup>1</sup>:  $\delta_h(t) = 0$ ,  $t \in S_{\text{н}}$ . Опорные значения  $\delta_h(t)$ ,  $t \in S_{\text{оп}}$ , вычислим по формуле

$$\delta_h(t) = \int_t^{t+h} \delta(\tau) d\tau / h, \quad t \in S_{\text{оп}}, \quad \delta(\tau) = \psi'(\tau) b_w(\tau),$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , — котраектория — решение сопряженного уравнения (16) с начальным условием

$$\psi(t^*) = c - H' \mu. \quad (18)$$

Эти вычисления аналогичны вычислениям неопорных компонент коуправления в случае  $U_N^0$ .

Положим

$$\delta_h^w(t) = 0, \quad t \in T_h; \quad \delta_h^v(t) = 0, \quad t \in T_{\text{оп}}^v.$$

Неопорные значения  $\delta_h^v(t)$ ,  $t \in T_{\text{н}}^v$ , составляющих коуправления вычислим по формуле

$$\delta_h^v(t) = \int_t^{t+h} \delta^v(\tau) d\tau, \quad t \in T_{\text{н}}^v \quad \left( \begin{array}{l} \delta^v(\tau) = \psi'(\tau)(b_v(\tau) - b_w(\tau)/h), \quad t \in T_{\text{н}0}^v, \\ \delta^v(\tau) = \psi'(\tau) b_v(\tau), \quad t \in T_{\text{н}-}^v \end{array} \right),$$

где  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , — решение сопряженного уравнения (16) с начальным условием (18). Трудоемкость параллельного вычисления коуправлений в случае  $U_N^0$  такая же, как и в случае  $U_N^0$ .

3. Псевдоуправление  $\omega(t)$ ,  $t \in T$ , и его составляющие  $\omega_v(t)$ ,  $\omega_w(t)$ ,  $t \in T$ . Их построение начнем с задания неопорных значений  $\omega_v(t)$ ,  $t \in T_{\text{н}}^v$ , первой составляющей псевдоуправления

$$\omega_v(t) = L \text{sign } \delta_h^v(t), \quad \text{если } \delta_h^v(t) \neq 0; \quad \omega_v(t) \in [-L; L], \quad \text{если } \delta_h^v(t) = 0, \quad t \in T_{\text{н}}^v,$$

и опорных значений  $\omega(t)$ ,  $t \in S_{\text{оп}}$ , псевдоуправления

$$\omega(t) = L \text{sign } \delta_h(t), \quad \text{если } \delta_h(t) \neq 0; \quad \omega(t) \in [-L; L], \quad \text{если } \delta_h(t) = 0, \quad t \in S_{\text{оп}}.$$

Вычислим

$$\omega_w(t) = (\omega(t) - \omega_v(t))/h, \quad t \in T_{\text{оп}2}^w.$$

Опорную компоненту  $\omega_{\text{оп}} = (\omega_v(t), t \in T_{\text{оп}}^v; \omega_w(t), t \in T_{\text{оп}0}^w)$  найдем, решив систему из  $m$  уравнений

$$D_{\text{оп}}^R \omega_{\text{оп}} = g - H \varkappa_0(t^*),$$

где  $\varkappa_0(t)$ ,  $t \in T$ , — траектория системы управления (12) с  $v(t) = \omega_v(t)$ ,  $t \in T_{\text{н}}^v$ ;  $w(t) = (\omega(t) - \omega_v(t))/h$ ,  $t \in T_{\text{оп}2}^w$ ;  $w(t) = \omega(t)/h$ ,  $t \in T_{\text{оп}1}^w$ ;  $v(t) = 0$ ,  $t \in T_{\text{оп}}^v$ ;  $w(t) = 0$ ,  $t \in T_{\text{оп}0}^w$ .

Аналогичную систему из  $m$  уравнений приходится решать при построении опорных компонент псевдоуправления в случае управлений класса  $U_N^0$ . Значения  $\omega_w(t)$ ,  $t \in T_{\text{оп}1}^w$ , вычислим по формуле

$$\omega_w(t) = (\omega(t) - \omega_v(t))/h, \quad t \in T_{\text{оп}1}^w.$$

<sup>1</sup>Здесь коуправление  $\delta_h(t)$ ,  $t \in T_h$ , играет роль функции потенциалов.

Неопорные значения  $\omega(t)$ ,  $t \in S_n$ , псевдоуправления равны

$$\omega(t) = \omega_v(t) + h\omega_w(t), \quad t \in S_n.$$

Опору  $K_{\text{оп}}$  назовем регулярной, если  $\delta_h(t) \neq 0$ ,  $t \in S_{\text{оп}}$ ;  $\delta_h^v(t) \neq 0$ ,  $t \in T_n^v$ . Регулярную опору сопровождают единственные псевдоуправление и его компоненты.

Следуя [8], опору используем прежде всего для идентификации оптимальных и  $\varepsilon$ -оптимальных программ.

**Принцип максимума.** Для оптимальности программы  $u(\cdot)$  необходимо и достаточно существования такой опоры  $K_{\text{оп}} = \{S_{\text{оп}}, T_{\text{оп}}\}$ , что на сопровождающих ее коуправлении  $\delta_h(t)$ ,  $t \in T_h$ , и его первой составляющей  $\delta_h^v(t)$ ,  $t \in T_h$ , выполняются следующие условия:

1) условие максимума по управлению

$$\delta_h(t)u(t) = \max_{-L \leq u \leq L} \delta_h(t)u, \quad t \in S_{\text{оп}};$$

2) условие максимума по первой составляющей управления

$$\delta_h^v(t)v(t) = \max_{-L \leq v \leq L} \delta_h^v(t)v, \quad t \in T_n^v.$$

Опору  $K_{\text{оп}}$ , которая идентифицирует оптимальную программу, будем называть оптимальной, ее сопровождают оптимальные элементы.

**Принцип  $\varepsilon$ -максимума.** При любом  $\varepsilon \geq 0$  для  $\varepsilon$ -оптимальности программы  $u(\cdot)$  необходимо и достаточно существования такой опоры  $K_{\text{оп}} = \{S_{\text{оп}}, T_{\text{оп}}\}$ , что на сопровождающих ее коуправлении  $\delta_h(t)$ ,  $t \in T_h$ , и первой его составляющей  $\delta_h^v(t)$ ,  $t \in T_h$ , выполняются следующие условия:

1) условие квазимаксимума по управлению

$$\delta_h(t)u(t) = \max_{-L \leq u \leq L} \delta_h(t)u - \varepsilon_u(t), \quad t \in S_{\text{оп}};$$

2) условие квазимаксимума по первой составляющей управления

$$\delta_h^v(t)v(t) = \max_{-L \leq v \leq L} \delta_h^v(t)v - \varepsilon_v(t), \quad t \in T_n^v;$$

3) условие  $\varepsilon$ -точности

$$\sum_{t \in S_{\text{оп}}} \varepsilon_u(t) + \sum_{t \in T_n^v} \varepsilon_v(t) \leq \varepsilon.$$

В дальнейшем важную роль играет

**Критерий оптимальности опоры.** Для оптимальности опоры  $K_{\text{оп}}$  необходимо и достаточно, чтобы на некоторых сопровождающих ее псевдоуправлении и его составляющих выполнялись неравенства

$$|\omega(t)| \leq L, \quad t \in S_n; \quad |\omega_v(t)| \leq L, \quad t \in T_{\text{оп}}^v. \quad (19)$$

Псевдоуправление  $\omega(t)$ ,  $t \in T$ , и его составляющие  $\omega^v(t)$ ,  $\omega^w(t)$ , которые сопровождают оптимальную опору, являются оптимальными управлением и его составляющими:  $u^0(t) = \omega(t)$ ,  $v^0(t) = \omega_v(t)$ ,  $w^0(t) = \omega_w(t)$ ,  $t \in T$ .

**Замечание 2.** При выполнении неравенства  $|\omega(t)| \leq L$ ,  $t \in S_n$ , будут выполняться и неравенства  $|\omega_w(t)| \leq M$ ,  $t \in T_{\text{оп}-}^w$ ;  $|\omega_w(t)| \leq M$ ,  $t \in T_{\text{оп}2}^w$ . В случае выполнения неравенства  $|\omega_v(t)| \leq L$ ,  $t \in T_{\text{оп}}^v$ , будет верно неравенство  $|\omega_w(t)| \leq M$ ,  $t \in T_{\text{оп}1}^w$ . Выполнение обоих неравенств (19) обеспечит выполнение и неравенства  $|\omega_w(t)| \leq M$ ,  $t \in T_{\text{оп}+}^w$ . Поэтому неравенство  $|\omega_w(t)| \leq M$ ,  $t \in T_h$ , не включено в формулировку критерия оптимальности опоры.



Опишем *двойственный метод* вычисления оптимальной программы задачи (14). Метод представляет динамическую реализацию двойственного адаптивного метода ЛП [2] и состоит из последовательных преобразований опор, в результате которых получается оптимальная опора.

Пусть известна некоторая опора  $K_{\text{оп}}$  задачи (14). По опоре  $K_{\text{оп}}$  построим сопровождающие ее вектор потенциалов  $\mu$ , коуправление  $\delta_h(t)$ ,  $t \in T_h$ , псевдоуправление  $\omega(t)$ ,  $t \in T$ , и его составляющие  $\omega_v(t)$ ,  $\omega_w(t)$ ,  $t \in T$ .

Обозначим  $\tilde{S}_H = \{t \in S_H : \omega(t) \notin [-L, L]\}$ ,  $\tilde{T}_{\text{оп}}^v = \{t \in T_{\text{оп}}^v : \omega_v(t) \notin [-L, L]\}$ ,  $\tilde{K} = \tilde{S}_H \cup \tilde{T}_{\text{оп}}^v \cup \tilde{T}_{\text{оп}}^w$ . Если  $\tilde{K} = \emptyset$ , то  $K_{\text{оп}}$  — оптимальная опора,  $u^0(t) = \omega(t)$ ,  $v^0(t) = \omega_v(t)$ ,  $w^0(t) = \omega_w(t)$ ,  $t \in T$ , — оптимальные управление и его составляющие. При  $\tilde{K} \neq \emptyset$  выберем из  $\tilde{K}$  произвольный элемент. Возможны два случая: выбранный элемент принадлежит 1)  $\tilde{S}_H : t_0 \in \tilde{S}_H$ ; 2)  $\tilde{T}_{\text{оп}}^v : t_0 \in \tilde{T}_{\text{оп}}^v$ . В процедуре замены опоры для каждого из этих случаев сначала построим вариации вектора потенциалов, коуправления и его составляющих.

1) ( $t_0 \in \tilde{S}_H$ ). Первыми построим приращения неопорных значений коуправления  $\Delta\delta_h(t)$ ,  $t \in S_H$ :

$$\Delta\delta_h(t_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega(t_0) > L; \\ -1, & \text{если } \omega(t_0) < -L, \end{cases} \quad \Delta\delta_h(t) = 0, \quad t \in S_H \setminus t_0. \quad (20)$$

Приращение вектора потенциалов  $\Delta\mu$  найдем из уравнения

$$\Delta\mu' D_{\text{оп}}^R = -(\Delta\delta_h^{t_0}(t), \quad t \in T_{\text{оп}+}^v \cup T_{\text{оп}0}^v \cup T_{\text{оп}0}^w)', \quad (21)$$

$$\text{где } \Delta\delta_h^{t_0}(t) = \begin{cases} \Delta\delta_h(t_0), & \text{если } t \in T_{\text{оп}+}^v \cap t_0; \\ h\Delta\delta_h(t_0), & \text{если } t \in T_{\text{оп}0}^w \cap t_0; \\ 0, & \text{если } t \in \{T_{\text{оп}+}^v \setminus t_0\} \cup T_{\text{оп}0}^v \cup \{T_{\text{оп}0}^w \setminus t_0\}. \end{cases}$$

Опорные значения приращения коуправления вычислим по формуле

$$\Delta\delta_h(t) = \int_t^{t+h} \Delta\delta(\tau) d\tau / h, \quad t \in S_{\text{оп}}; \quad \Delta\delta(\tau) = \Delta\psi'(\tau) b_w(\tau), \quad (22)$$

где  $\Delta\psi(t)$ ,  $t \in T$ , — приращение котраектории — решение сопряженного уравнения (16) с начальным условием

$$\psi(t^*) = -H' \Delta\mu. \quad (23)$$

Вариации составляющих коуправления вычислим по формулам

$$\Delta\delta_h^v(t) = \int_t^{t+h} \Delta\delta^v(\tau) d\tau, \quad t \in T_H^v \quad \left( \begin{array}{l} \Delta\delta^v(\tau) = \Delta\psi'(\tau)(b_v(\tau) - b_w(\tau)/h), \quad t \in T_{\text{н}0}^v, \\ \Delta\delta^v(\tau) = \Delta\psi'(\tau)b_v(\tau), \quad t \in T_{\text{н}-}^v \end{array} \right), \quad (24)$$

$$\Delta\delta_h^v(t) = 0, \quad t \in T_{\text{оп}}^v; \quad \Delta\delta_h^w(t) = 0, \quad t \in T_h.$$

При движении (увеличении  $\sigma \geq 0$ )

$$\mu(\sigma) = \mu + \sigma\Delta\mu, \quad \delta_h(t | \sigma) = \delta_h(t) + \sigma\Delta\delta_h(t), \quad t \in T_h; \quad (25)$$

$$\Delta\delta_h^v(t | \sigma) = \delta_h^v(t) + \sigma\Delta\delta_h^v(t), \quad \Delta\delta_h^w(t | \sigma) = \delta_h^w(t) + \sigma\Delta\delta_h^w(t), \quad t \in T_h, \quad \sigma \geq 0,$$

из  $(\mu, \delta_h(\cdot), \delta_h^v(\cdot), \delta_h^w(\cdot))$  вдоль направления (20)–(24) начальная скорость убывания двойственной целевой функции задачи (14)  $\alpha^1 = L - \omega(t_0)$ , если  $\omega(t_0) > L$ ;  $\alpha^1 = \omega(t_0) + L$ , если  $\omega(t_0) < -L$ .

С увеличением  $\sigma \geq 0$  будут появляться новые нули

$$\begin{aligned}\sigma_u(t) &= \begin{cases} -\delta_h(t)/\Delta\delta_h(t), & \text{если } \delta_h(t)\Delta\delta_h(t) < 0; \\ \infty, & \text{если } \delta_h(t)\Delta\delta_h(t) \geq 0, \quad t \in S_{\text{оп}}, \end{cases} \\ \sigma_v(t) &= \begin{cases} -\delta_h^v(t)/\Delta\delta_h^v(t), & \text{если } \delta_h^v(t)\Delta\delta_h^v(t) < 0; \\ \infty, & \text{если } \delta_h^v(t)\Delta\delta_h^v(t) \geq 0, \quad t \in T_{\text{н}}^v, \end{cases}\end{aligned}\quad (26)$$

функций (25). Трудоемкость описанного вычисления нулей такая же, как и в случае  $U_N^0$  [11].

Упорядочим по возрастанию конечные числа из (26):  $\sigma^1 < \sigma^2 < \dots < \sigma^{k^*}$  (отсутствие таковых означает несовместность ограничений задачи (14)). При движении (25) двойственная целевая функция между соседними нулями коуправления  $\sigma^k < \sigma^{k+1}$  из (26) изменяется линейно относительно  $\sigma$ . Ее скорость  $\alpha^k$  на этом участке в точке  $\sigma^{k+1}$  испытывает скачок  $\Delta\alpha^k = \sum_{t \in S^k} 2L|\Delta\delta_h(t)| + \sum_{t \in T^k} 2L|\Delta\delta_h^v(t)|$ ,  $S^k = \{t \in S_{\text{оп}} : \delta_h(t | \sigma^k) = 0\}$ ,  $T^k = \{t \in T_{\text{н}}^v : \delta_h^v(t | \sigma^k) = 0\}$ . Таким образом,  $\alpha^{k+1} = \alpha^k + \Delta\alpha^k$ .

Обозначим через  $k_0$  такой индекс, что  $\alpha^{k_0} < 0$ ,  $\alpha^{k_0+1} \geq 0$ . Число  $\sigma^* = \sigma^{k_0}$  называется коротким двойственным шагом, если  $k_0 = 1$ , в противном случае  $\sigma^*$  — длинный двойственный шаг. Из множества  $S^{k_0} \cup T^{k_0}$  выберем произвольный элемент. Выбранный элемент принадлежит множеству 1а)  $S^{k_0} : t_* \in S^{k_0}$ ; 1б)  $T^{k_0} : t_* \in T^{k_0}$ .

Сформируем компоненты новой опоры  $\bar{K}_{\text{оп}} = \{\bar{S}_{\text{оп}}, \bar{T}_{\text{оп}}\}$ : 1а)  $\bar{S}_{\text{оп}} = (S_{\text{оп}} \setminus t_*) \cup t_0$ ,  $\bar{T}_{\text{оп}}^v = T_{\text{оп}}^v$ ,  $\bar{T}_{\text{оп}}^w = T_{\text{оп}}^w$ ; 1б)  $\bar{S}_{\text{оп}} = S_{\text{оп}} \cup t_0$ ,  $\bar{T}_{\text{оп}}^v = T_{\text{оп}}^v \cup t_*$ ,  $\bar{T}_{\text{оп}}^w = T_{\text{оп}}^w$ .

2) ( $t_0 \in \tilde{T}_{\text{оп}}^v$ ). Сначала построим приращения опорных значений первой составляющей коуправления  $\Delta\delta_h^v(t)$ ,  $t \in T_{\text{оп}}^v$ :

$$\Delta\delta_h^v(t_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega_v(t_0) > L; \\ -1, & \text{если } \omega_v(t_0) < -L, \end{cases} \quad \Delta\delta_h^v(t) = 0, \quad t \in T_{\text{оп}}^v \setminus t_0. \quad (27)$$

Им соответствуют нулевые приращения неопорных значений коуправления

$$\Delta\delta_h(t) = 0, \quad t \in S_{\text{н}}, \quad (28)$$

и всех значений второй составляющей коуправления

$$\Delta\delta_h^w(t) = 0, \quad t \in T_{\text{н}}. \quad (29)$$

Приращения вектора потенциалов  $\Delta\mu$  найдем из уравнения

$$\Delta\mu' D_{\text{оп}}^R = -(\Delta\delta_h^{vt_0}(t), t \in T_{\text{оп}+}^v \cup T_{\text{оп}0}^v \cup T_{\text{оп}0}^w)', \quad (30)$$

где  $\Delta\delta_h^{vt_0}(t) = \begin{cases} \Delta\delta_h^v(t_0), & \text{если } t \in T_{\text{оп}}^v \cap t_0; \\ 0, & \text{если } t \in \{T_{\text{оп}}^v \setminus t_0\} \cup T_{\text{оп}0}^w. \end{cases}$

Опорные значения приращения коуправления вычислим по формуле (22).

Вариации неопорных значений первой составляющей коуправления вычислим по первой формуле из (24).

Трудоемкость вычисления нулей (26) и в этом случае такая же, как и в случае  $U_N^0$  [11].

При движении (25) вдоль направления (22), (27)–(30) начальная скорость убывания двойственной целевой функции задачи (14)  $\alpha^1 = L - \omega_v(t_0)$  при  $\omega_v(t_0) > L$ ;  $\alpha^1 = \omega_v(t_0) + L$  при  $\omega_v(t_0) < -L$ .

Далее поступаем аналогично случаю 1).

Новая опора имеет вид  $\bar{K}_{\text{оп}} = \{\bar{S}_{\text{оп}}, \bar{T}_{\text{оп}}\}$ , где 2а)  $\bar{S}_{\text{оп}} = S_{\text{оп}} \setminus t_*$ ,  $\bar{T}_{\text{оп}}^v = T_{\text{оп}}^v$ ,  $\bar{T}_{\text{оп}}^w = T_{\text{оп}}^w$ ; 2б)  $\bar{S}_{\text{оп}} = S_{\text{оп}}$ ,  $\bar{T}_{\text{оп}}^v = (T_{\text{оп}}^v \setminus t_0) \cup t_*$ ,  $\bar{T}_{\text{оп}}^w = T_{\text{оп}}^w$ .

Из приведенного описания итерации двойственного метода построения программного решения задачи (14) видно, что она такая же, какой была для задачи ОУ в классе  $U_N^0$  [11].

В каждом случае новую опору  $\overline{K}_{\text{оп}}$  сопровождают 1) вектор потенциалов  $\overline{\mu} = \mu + \sigma^* \Delta \mu$ ; 2) коуправление  $\overline{\delta}_h(t) = \delta_h(t) + \sigma^* \Delta \delta_h(t)$ ,  $t \in T_h$ ; 3) составляющие коуправления  $\overline{\delta}_h^v(t) = \delta_h^v(t) + \sigma^* \Delta \delta_h^v(t)$ ,  $\overline{\delta}_h^w(t) = \delta_h^w(t) + \sigma^* \Delta \delta_h^w(t)$ ,  $t \in T_h$ .

Согласно [2] предложенный двойственный метод конечен, если в процессе итераций встречаются только регулярные опоры. Там же описана его модификация, которая конечна для любой задачи (14). Метод завершает работу построением оптимальной опоры и сопровождающих ее псевдоуправления и его составляющих, которые будут оптимальными управлением и его составляющими задачи (14).

**Замечание 3.** При использовании параллельных вычислений описанный двойственный метод вычисления оптимальной программы в классе управлений  $U_N^1$  по трудоемкости эквивалентен двойственному методу вычисления оптимальной программы в классе  $U_N^0$  [11].

Для вычисления оптимальной программы в классе  $U_N^1$  можно использовать другой метод, основанный на последовательных вычислениях оптимальной программы в классе  $U_N^0$ . Сначала решим задачу (4) в классе управлений  $U_N^0$ . Пусть  $K_{\text{оп}}^* = \{I, T_{\text{оп}}^*\}$ ,  $u^*(t)$ ,  $t \in T$ , — оптимальные опора и программа такой задачи. Построим множества  $T_k = \{t_k - h, t_k, t_k + h\}$ , если  $t_k \in T_{\text{оп}}^*$ ;  $T_k = \{t_k - h, t_k\}$ , если  $t_k \in T_h \setminus T_{\text{оп}}^*$ ,  $k = \overline{1, k^*}$ ,  $k^*$  — число моментов переключения оптимального управления  $u^*(t)$ ,  $t \in T$ , задачи (4) в классе  $U_N^0$ . Положим  $\overline{T} = \bigcup_{k=1}^{k^*} T_k$ . Затем “заморозим” значения  $v(t) = u^*(t)$ ,  $w(t) = 0$ ,  $t \in T_h \setminus \overline{T}$ , и решим задачу ЛП:

$$\begin{aligned} \sum_{t \in \overline{T}} c_v(t)v(t) + \sum_{t \in \overline{T}} c_w(t)w(t) &\rightarrow \max; \\ \sum_{t \in \overline{T}} d_{vi}(t)v(t) + \sum_{t \in \overline{T}} d_{wi}(t)w(t) &= \check{g}_i, \quad i = \overline{1, m}; \\ |v(t) + hw(t)| \leq L, \quad |v(t)| \leq L, \quad |w(t)| \leq M, \quad t \in \overline{T}, \end{aligned}$$

где  $\check{g}_i = g_i - \psi'_{hi}(t_*)x_0 - \sum_{t \in T_h \setminus \overline{T}} \int_t^{t+h} \psi'_{hi}(\tau)b(\tau)d\tau u^*(t)$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Из полученных решений  $v^*(t)$ ,  $w^*(t)$ ,  $t \in T_h$ , сформируем оптимальную программу задачи (12) в классе управлений  $U_N^1$ :

$$u^0(t) = u^*(t), \quad t \in T \setminus \overline{T}; \quad u^0(t) = v^*(t_k) + w^*(t_k)(t - t_k), \quad t \in [t_k, t_k + h[, \quad t_k \in T_k, \quad k = \overline{1, k^*}.$$

Перейдем к построению позиционного решения задачи (4) в классе управлений  $U_N^1$ . В классической теории ОУ [1] под позиционным решением (синтезом оптимальных систем) понимается конструирование в явной (замкнутой, формульной) форме оптимальных управлений типа обратной связи (6). Пятидесятилетняя история теории ОУ показывает, что эта задача в нетривиальных случаях неразрешима. Анализ сложившейся ситуации привел авторов данной работы к новому подходу в решении проблемы синтеза оптимальных систем, который базируется на достижениях как математической теории, так и вычислительной техники.

Обратная связь (6) определена по математической модели (4), но предназначена для управления реальной (физической) системой, поведение которой отличается от поведения математической модели. Запишем уравнение движения физического прототипа математической модели (4) в виде

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u + w, \quad x(t_*) = x_0,$$

где  $w$  — совокупность членов, описывающих неточности математического моделирования и возмущения, действующие на объект управления по ходу процесса управления.

Предположим, что оптимальная обратная связь (6) построена. Замкнем ею систему (4)

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u^0(t, x) + w(t), \quad x(t_*) = x_0. \quad (31)$$

Под траекторией замкнутой системы (31) будем понимать траекторию уравнения

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u(t) + w(t), \quad x(t_*) = x_0,$$

с управлением  $u(t) = u(t_* + kh, x(t_* + kh))$ ,  $t \in [t_* + kh, t_* + (k+1)h]$ ,  $k = \overline{0, N-1}$ .

Рассмотрим конкретный процесс управления, по ходу которого реализуется возмущение  $w^*(t)$ ,  $t \in T$ . Это возмущение породит в (31) процесс  $x^*(t)$ ,  $t \in T$ , вдоль которого будет выполняться тождество

$$\dot{x}^*(t) \equiv A(t)x^*(t) + b(t)u^*(t) + w^*(t), \quad t \in T, \quad x(t_*) = x_0^*.$$

Из него видно, что в изучающемся процессе управления оптимальная обратная связь (6) используется неполностью, нужны ее значения  $u^*(\tau) = u^0(\tau, x^*(\tau))$ ,  $\tau \in T_h$ , лишь вдоль изолированной кривой  $x^*(t)$ ,  $t \in T$ . При этом в каждый текущий момент времени  $\tau$  достаточно уметь вычислять значение  $u^*(\tau)$  по значению  $x^*(\tau)$  за время, не превосходящее  $h$  (в режиме реального времени). Функцию  $u^*(t)$ ,  $t \in T$ , назовем реализацией оптимальной обратной связи, а устройство, способное вычислять ее значения в режиме реального времени, — оптимальным регулятором.

Таким образом, проблема позиционного решения задачи (4) в классе  $U_N^1$  свелась к построению алгоритма работы оптимального регулятора.

*Алгоритм работы оптимального регулятора.* На стартовом промежутке  $[t_*, t_* + h]$  оптимальный регулятор подает в систему (4) управление  $u^*(t) = u^0(t_*, x_0) = u^0(t_* | t_*, x_0)$ ,  $t \in [t_*, t_* + h]$ , взятое из оптимальной программы  $u^0(t | t_*, x_0)$ ,  $t \in T$ , которую регулятор строит до начала процесса управления без каких-либо ограничений на время вычисления. Рассмотрим ситуацию, которая возникает в произвольный текущий момент  $\tau \in T_h$  процесса управления. Предположим, что оптимальный регулятор проработал на промежутке времени  $[t_*, \tau[$  и выработал управления  $u^*(t_*), \dots, u^*(\tau - h)$ . В момент  $\tau - h$  оптимальный регулятор построил оптимальную опору  $K_{\text{оп}}(\tau - h)$  и вычислил оптимальную программу  $u^0(t | \tau - h, x^*(\tau - h))$ ,  $t \in [\tau - h, t^*]$ . Обозначим через  $x^0(\tau)$  состояние физической системы, в которое она перешла бы в момент  $\tau$  из состояния  $x^*(\tau - h)$  при отсутствии возмущения. Реальное состояние  $x^*(\tau)$  будет отличаться от идеального  $x^0(\tau)$  на вектор  $\int_{\tau-h}^{\tau} F(\tau)F^{-1}(s)w^*(s)ds$ . При ограниченном возмущении величина

$\left\| \int_{\tau-h}^{\tau} F(\tau)F^{-1}(s)w^*(s)ds \right\|$  тем меньше, чем меньше  $h$ . Поэтому оптимальный регулятор, используя описанный выше двойственный метод, берет опору  $K_{\text{оп}}(\tau - h)$  в качестве начальной и быстро корректирует ее до построения оптимальной опоры  $K_{\text{оп}}(\tau)$ . Детали реализации оптимальной обратной связи аналогичны приведенным в [11] и поэтому здесь опущены.

Описанный алгоритм работы оптимального регулятора реализует современный принцип управления — управление в режиме реального времени. В отличие от классического принципа управления по замкнутому контуру в нем оптимальная обратная связь не строится заранее, до начала процесса управления, как это принято в классическом принципе управления. Вместо этого текущие значения оптимальной обратной связи вычисляются по ходу процесса управления. Понятно, что переход к новому принципу управления стал возможен после успехов, достигнутых в вычислительной технике. Однако в конечном успехе большую роль играют и эффективные математические методы (в рассматриваемой задаче — это двойственный метод).

Приведем результаты численного эксперимента.

**Пример 1.** В качестве примера рассмотрим задачу ОУ двухмассовой колебательной системой (рис. 3) в классе  $U_{200}^1$ :

$$\begin{aligned} x_1(20) \rightarrow \min, \quad \dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + u, \quad \dot{x}_4 = 0.1x_1 - 1.02x_2, \\ x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0; \quad x_2(20) = x_3(20) = x_4(20) = 0; \\ u(t) = v(t) + (t - kh)w(t), \quad t \in [kh, (k+1)h], \quad k = \overline{0, 199}, \quad h = 0.1, \\ -1 \leq v(t) \leq 1, \quad -100 \leq w(t) \leq 100, \quad t \in [0, 20], \end{aligned} \quad (32)$$

где  $x_1 = x_1(t)$  — отклонение от положения равновесия первой массы,  $x_2 = x_2(t)$  — отклонение от положения равновесия второй массы;  $x_3 = dx_1/dt$ ,  $x_4 = dx_2/dt$ .

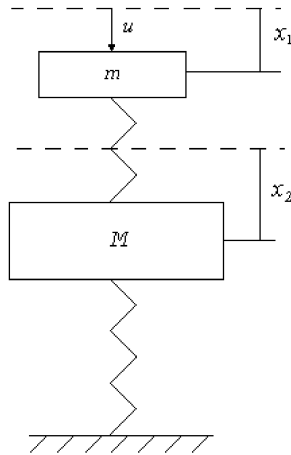
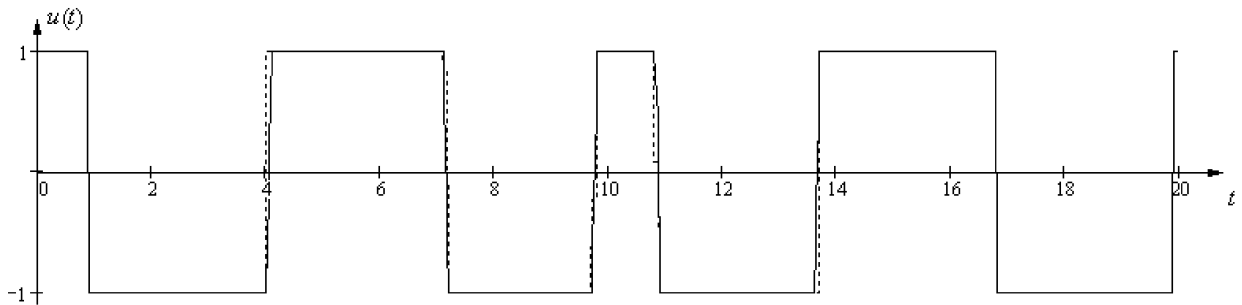
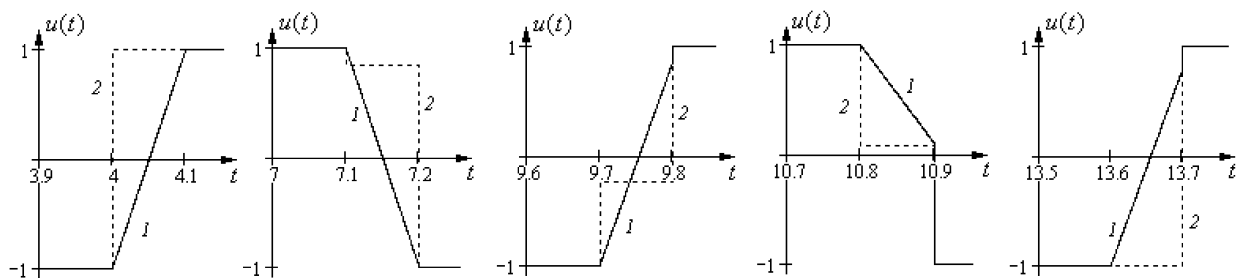


Рис. 3

Значение критерия качества для этой задачи (в классе управлений  $U_{200}^1$ ) оказалось равным  $-8.10839359$ . Значение критерия качества для аналогичной задачи в классе управлений  $U_{200}^0$  хуже и равно  $-8.0567108$ . Оптимальные программы для задач ОУ в классах управлений  $U_{200}^1$  и  $U_{200}^0$  совпадают (рис. 4а), сплошная кривая — оптимальная программа в классе управлений  $U_{200}^1$ , пунктирная — в классе управлений  $U_{200}^0$ , кроме окрестностей точек  $t \in \{4, 7.1, 9.7, 10.8, 13.6\}$ . Различия изображены на рис. 4б) (кривые 1 — фрагменты управлений в классе  $U_{200}^1$ , кривые 2 — в классе  $U_{200}^0$ ).



а)



б)

Рис. 4

Для задачи (32) построим реализацию оптимальной обратной связи, считая, что на систему в процессе управления действует (не известное оптимальному регулятору) ограниченное кусоч-

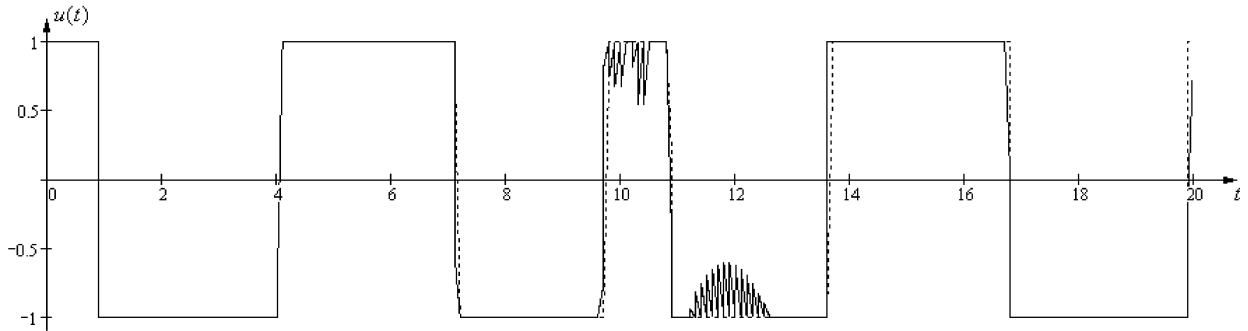
но-непрерывное возмущение, в силу чего поведение системы описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + u + w, \quad \dot{x}_4 = 0.1x_1 - 1.02x_2. \quad (33)$$

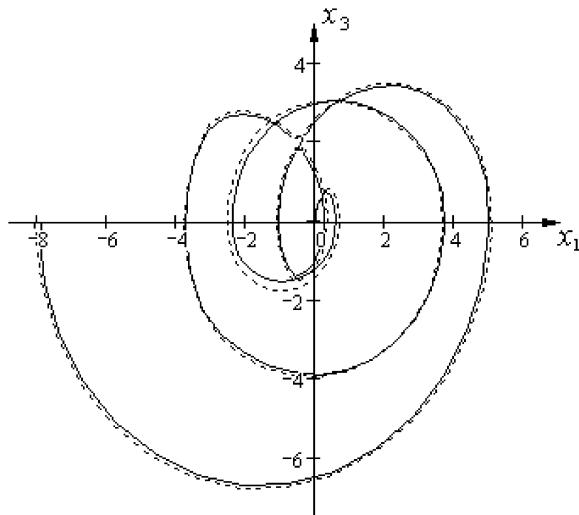
В качестве реализующегося возмущения была взята функция

$$w^*(t) = 0.2 \sin 2t, \quad t \in [0, 12.5[; \quad w^*(t) = 0, \quad t \in [12.5, 20].$$

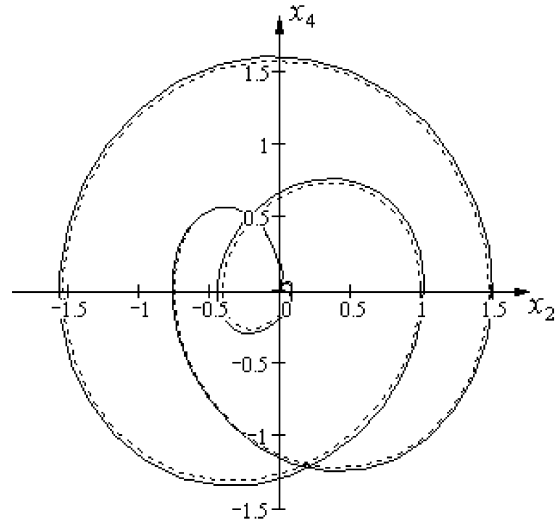
Оптимальный регулятор строит реализацию  $u^*(\tau)$ ,  $\tau \in T$ , оптимальной обратной связи задачи (32), основываясь на известных текущих состояниях  $x^*(\tau)$ ,  $\tau \in T_h$ . Соответствующее управление  $u^*(\tau)$ ,  $\tau \in T$ , представлено на рис. 5а) (сплошная кривая — оптимальная обратная связь, пунктирная — оптимальная программа в том же классе управлений). Оптимальное значение критерия качества для задачи (32) оказалось равным  $-8.005249$ . На рис. 5б) и 5в) изображены траектории систем (32) и (33). Пунктирные кривые — оптимальные программные траектории системы (32), сплошные кривые — траектории системы (33), порожденные управлением  $u^*(\tau)$ ,  $\tau \in T$ , и возмущением  $w^*(\tau)$ ,  $\tau \in T$ .



а)



б)



в)

Рис. 5

Наряду с задачей (32) рассмотрим задачу ОУ без терминальных ограничений в классе упра-

влений  $U_{200}^1$ :

$$\begin{aligned} x_1(20) \rightarrow \min, \quad \dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + u, \quad \dot{x}_4 = 0.1x_1 - 1.02x_2, \\ x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0; \\ u(t) = v(t) + (t - kh)w(t), \quad t \in [kh, (k+1)h[, \quad k = \overline{0, 199}, \quad h = 0.1, \\ -1 \leq v(t) \leq 1, \quad -100 \leq w(t) \leq 100, \quad t \in [0, 20]. \end{aligned}$$

Значение критерия качества в этом случае равно  $-8.743398$ .

Решим теперь две задачи ОУ без терминальных ограничений в классе управлений  $U_{200}^0$  и  $U_{40}^0$ :

$$\begin{aligned} x_1(20) \rightarrow \min, \quad \dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + u, \quad \dot{x}_4 = 0.1x_1 - 1.02x_2, \\ x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0; \quad -1 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in [0, 20]. \end{aligned}$$

Значения критерия качества для этих задач равны  $-8.743532$  и  $-8.647678$ , оптимальные программы представлены на рис. 6 (кривые 1 и 2 соответственно).

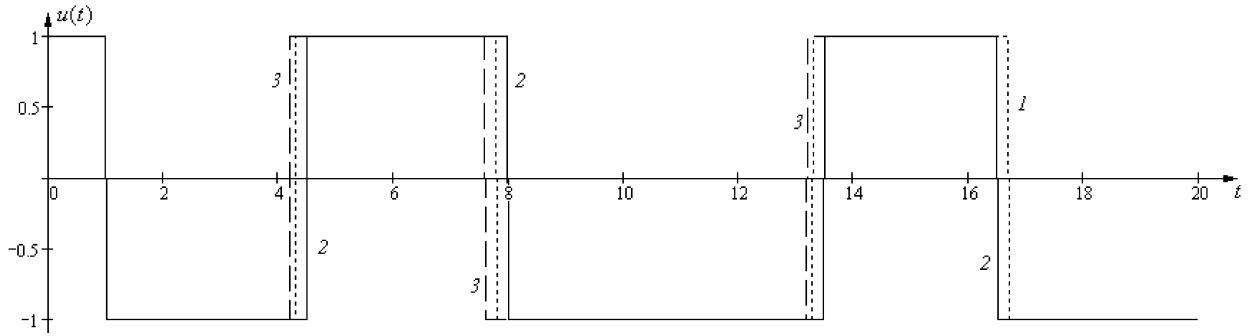


Рис. 6

При оптимальном управлении в режиме реального времени можно использовать и следующую схему. Текущее состояние физической системы измеряется через  $h$ , но в каждый текущий момент времени решается задача с большим периодом дискретизации, например,  $h_c = 5h$ , т. е. более простая задача при стандартном подходе. В результате получим оптимальное управление, изображенное на рис. 6 (кривая 3). В этом случае принцип оптимальности Беллмана не выполняется. При  $h = h_c$  критерий качества сохраняет постоянное значение  $-8.647678$ . Значение критерия качества при применении указанной схемы будет меняться следующим образом:  $x_1(20) \equiv -8.647678$ ,  $\tau \in [0, 4.2[$ ;  $x_1(20) \equiv -8.664775$ ,  $\tau \in [4.2, 7.6[$ ;  $x_1(20) \equiv -8.666939$ ,  $\tau \in [7.6, 13.2[$ ;  $x_1(20) \equiv -8.672634$ ,  $\tau \in [13.2, 19.5[$ .

## 5. Оптимальное управление в классе дискретных управлений степени $p \geq 2$

Рассмотрим второй крайний случай дискретных управлений конечной степени. Будем считать, что период квантования времени совпадает со всем промежутком управления, на котором управления выбираются среди ограниченных полиномов степени  $p - 1$  с ограниченными коэффициентами, т. е. выполняются условия

$$u(t) = u_0 + u_1(t - t_*) + u_2(t - t_*)^2 + \dots + u_{p-1}(t - t_*)^{p-1}, \quad |u(t)| \leq L, \quad t \in T; \quad (34)$$

$$|u_j| \leq u_j^*, \quad j = \overline{0, p-1}. \quad (35)$$

В этом случае, после подстановки (34) в систему (4), задача ОУ сводится к оптимизации системы управления по параметрам  $u_j$ ,  $j = \overline{0, p-1}$ , с учетом континуума ограничений

$$\begin{aligned} c'x(t^*) \rightarrow \max; \quad \dot{x} = A(t)x + b_0(t)u_0 + b_1(t)u_1 + \dots + b_{p-1}(t)u_{p-1}, \quad x(t_*) = x_0; \\ -L \leq u_0 + u_1(t - t_*) + \dots + u_{p-1}(t - t_*)^{p-1} \leq L, \quad t \in T; \quad |u_j| \leq u_j^*, \quad j = \overline{0, p-1}, \end{aligned} \quad (36)$$

где  $b_j(t) = b(t)(t - t_*)^j$ ,  $j = \overline{0, p-1}$ .

С помощью формулы Коши задача (36) записывается в эквивалентной функциональной форме

$$\sum_{j=0}^{p-1} q_j u_j \rightarrow \max; \quad -L \leq \sum_{j=0}^{p-1} d_j(t) u_j \leq L, \quad t \in T; \quad |u_j| \leq u_j^*, \quad j = \overline{0, p-1}, \quad (37)$$

где

$$q_j = \int_{t_*}^{t^*} \psi'_c(\tau) b(\tau) (\tau - t_*)^j d\tau, \quad j = \overline{0, p-1};$$

$$d_j(t) = (t - t_*)^j, \quad t \in T_h, \quad j = \overline{0, p-1}.$$

Задача (37) представляет собой полубесконечную задачу ЛП — в ней конечное число переменных и бесконечное (континуум) число основных ограничений. Численные методы решения подобных задач описаны в [3] (см. также [12]). В данном пункте предлагается другой (динамический) подход к решению задачи ОУ в классе  $U_1^p$ .

Управление (34) будем трактовать как выходной сигнал

$$u = d'(t)y \quad (d(t) \equiv (1, 0, \dots, 0) \in R^p) \quad (38)$$

динамического регулятора

$$\dot{y} = A_1(t)y \quad (y \in R^p, \quad A_1(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in R^{p \times p}) \quad (39)$$

с начальным состоянием

$$y_0 = (y_j(t_*), \quad j = \overline{0, p-1}) = (j! u_j, \quad j = \overline{0, p-1}) = Gz, \quad z_* \leq z \leq z^* \quad (G \in R^{p \times q}). \quad (40)$$

Таким образом, будем считать, что динамическая система (4) управляется выходным сигналом (38) динамического регулятора (39) путем выбора его начального состояния (40), удовлетворяющего ограничениям (35). При этом выходные сигналы (38) динамического регулятора (39) должны удовлетворять фазовым ограничениям

$$|d'(t)y(t)| \leq L, \quad t \in T. \quad (41)$$

Хотя излагаемый далее метод решения можно построить для поставленной задачи без всяких упрощений, ниже ограничимся вполне разумным с практической точки зрения предположением — будем считать, что фазовое ограничение (41) проверяется только в дискретные моменты времени  $t \in T_h$ .

**Замечание 4.** Повышение точности выполнения фазового ограничения можно добиться или с помощью процедуры доводки [8], или путем измельчения сетки в окрестности моментов нарушения ограничений (41).

**Замечание 5.** Модель (34), (35) допускает различные обобщения. Можно считать, что  $A_1 = A_1(t)$ ,  $t \in T$ , — кусочно-непрерывная  $p \times p$ -матричная функция. Если использовать  $\delta$ -функцию Дирака, то соотношения (39), (40) можно записать в виде

$$\dot{y} = A_1(t)y + \delta(t - t_*)y_0, \quad y(t_*) = 0.$$

Дальнейшее обобщение

$$\dot{y} = A_1(t)y + B_1(t)v$$



можно получить, если использовать непрерывную матричную функцию  $B_1(t)$ ,  $t \in T$ , и дискретно-импульсные управления

$$v(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta(t - t_k)v(t_k), \quad t \in T,$$

с полиэдральными ограничениями

$$v(t_k) = (v_j(t_k), j = \overline{1, q}) \in V(t_k), \quad t_k \in T_h,$$

где  $V(t_k) \subset R^q$ ,  $t_k \in T_h$ , — заданные полиэдры.

Итак, в данном пункте, не переходя к возможным обобщениям, рассмотрим подробно следующую задачу:

$$c'x(t^*) \rightarrow \max; \quad (42)$$

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \quad x(t_*) = x_0, \quad u = d'(t)y; \quad (43)$$

$$\dot{y} = A_1(t)y, \quad y(t_*) = y_0 = Gz; \quad (44)$$

$$|u(t)| \leq L, \quad t \in T_h, \quad z_* \leq z \leq z^*. \quad (45)$$

Используя формулу Коши, сведем задачу (42)–(45) к эквивалентной функциональной форме

$$\varphi'z \rightarrow \max; \quad -L \leq \xi'(s)z \leq L, \quad s \in T_h, \quad z_* \leq z \leq z^*, \quad (46)$$

параметры которой  $\varphi' = \varphi'_c(t_*)G$ ,  $\xi'(s) = (\xi_j(s), j \in J) = (\xi'(s, t_*)G_j, j \in J) = \xi'(s, t_*)G$ ,  $s \in T_h$  ( $G_j, j \in J$ , — столбцы матрицы  $G$ ) можно генерировать динамически с помощью решений  $\varphi_c(t)$ ,  $\psi_c(t)$ ,  $t \in T$ ;  $\xi(s, t)$ ,  $t_* \leq t \leq s$ ,  $s \in T_h$ , сопряженных уравнений

$$\dot{\varphi} = -A'_1(t)\varphi - d(t)b'(t)\psi, \quad (47)$$

$$\dot{\psi} = -A'(t)\psi, \quad (48)$$

$$\dot{\xi} = -A'_1(t)\xi$$

с начальными условиями

$$\varphi(t^*) = 0, \quad (49)$$

$$\psi(t^*) = c, \quad (50)$$

$$\xi(s, s) = d(s), \quad s \in T_h,$$

соответственно.

Для решения задачи (46) построим динамическую реализацию двойственного адаптивного метода [8]. Начнем с введения основного понятия метода — опоры. Из множеств  $T_h$ ,  $J = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$  выделим два подмножества  $T_{\text{оп}} \subset T_h$ ,  $J_{\text{оп}} \subset J$ ,  $|T_{\text{оп}}| = |J_{\text{оп}}|$ . Сформируем  $(|T_{\text{оп}}| \times |J_{\text{оп}}|)$ -матрицу

$$D_{\text{оп}} = \begin{pmatrix} \xi_j(s), & j \in J_{\text{оп}} \\ s \in T_{\text{оп}} \end{pmatrix}.$$

Совокупность  $K_{\text{оп}} = \{T_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\}$  с  $T_{\text{оп}} \neq \emptyset$ ,  $J_{\text{оп}} \neq \emptyset$  назовем опорой, если  $\det D_{\text{оп}} \neq 0$ .

Пара  $K_{\text{оп}} = \{T_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\}$  из пустых множеств  $T_{\text{оп}} = \emptyset$ ,  $J_{\text{оп}} = \emptyset$  является (пустой) опорой  $K_{\text{оп}}$  по определению.

Опору  $K_{\text{оп}}$  сопровождают четыре объекта.

1. Функция потенциалов  $\nu(t)$ ,  $t \in T_h$ . Неопорные значения функции потенциалов положим равными нулю:  $\nu(t) = 0$ ,  $t \in T_h = T_h \setminus T_{\text{оп}}$ . Опорные значения  $\nu_{\text{оп}} = (\nu(t), t \in T_{\text{оп}})$  найдем из системы  $|J_{\text{оп}}|$  уравнений

$$\nu'_{\text{оп}}D_{\text{оп}} = \varphi'_c(t_*)G_{\text{оп}} = \varphi'_{c_{\text{оп}}}, \quad G_{\text{оп}} = (G_j, j \in J_{\text{оп}}). \quad (51)$$

2. Котраектория  $(\psi(t), \varphi(t))$ ,  $t \in T$ , — решение сопряженных уравнений (47), (48) с начальными условиями (49), (50) и скачками по компоненте  $\varphi(t)$ ,  $t \in T$ , в опорные моменты времени  $t \in T_{\text{оп}}$ :

$$\varphi(t-0) = \varphi(t+0) - \nu(t)d(t), \quad t \in T_{\text{оп}}.$$

3. Вектор оценок  $\delta = (\delta_j, j \in J)$ ,  $\delta' = \varphi'(t_*)G$ . Отсюда видно, что  $\delta'_{\text{оп}} = (\delta_j, j \in J_{\text{оп}})' = \varphi'(t_*)G_{\text{оп}} = \varphi'_c(t_*)G_{\text{оп}} - \nu'_{\text{оп}}D_{\text{оп}} = 0$ .

Опору будем называть регулярной, если  $\nu(t) \neq 0$ ,  $t \in T_{\text{оп}}$ ;  $\delta_j \neq 0$ ,  $j \in J_{\text{н}}$ .

4. Вектор управляющих псевдопараметров  $\zeta = (\zeta_j, j \in J)$  и псевдоуправление  $\omega(t)$ ,  $t \in T_h$ . Их построение начнем с задания неопорных значений

$$\zeta_j = z_{*j}, \text{ если } \delta_j < 0; \quad \zeta_j = z_j^*, \text{ если } \delta_j > 0; \quad \zeta_j \in [z_{*j}; z_j^*], \text{ если } \delta_j = 0, \quad j \in J_{\text{н}}, \quad (52)$$

и опорных значений

$$\omega(t) = L \operatorname{sign} \nu(t), \text{ если } \nu(t) \neq 0; \quad \omega(t) \in [-L; L], \text{ если } \nu(t) = 0, \quad t \in T_{\text{оп}}. \quad (53)$$

Опорные компоненты  $\zeta_j$ ,  $j \in J_{\text{оп}}$ , вектора управляющих псевдопараметров найдем, решив систему уравнений

$$D_{\text{оп}}\zeta_{\text{оп}} = \omega_{\text{оп}} - \omega_{\text{оп}}^0. \quad (54)$$

Здесь  $\omega^0(t) = d'(t)\chi_0(t)$ ,  $\chi_0(t)$ ,  $t \in T$ , — псевдотраектория регулятора — решение уравнения (44) с начальным условием  $y(t_*) = G\zeta^0$ , где  $\zeta^0 = (\zeta_{\text{оп}}^0 = 0, \zeta_{\text{н}}^0 = \zeta_{\text{н}})$ . Неопорные значения  $\omega(t)$ ,  $t \in T_{\text{н}}$ , псевдоуправления подсчитаем по формуле

$$\omega(t) = d'(t)\chi(t), \quad t \in T_{\text{н}},$$

где  $\chi(t)$ ,  $t \in T$ , — псевдотраектория регулятора — решение уравнения (44) с начальным условием  $y(t_*) = G\zeta$ .

Из критериев оптимальности и субоптимальности адаптивного метода [2] следуют два принципа.

**Принцип максимума.** Для оптимальности вектора управляющих параметров  $z$  и соответствующей ему программы  $u(\cdot)$  необходимо и достаточно существования такой опоры  $K_{\text{оп}} = \{T_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\}$ , что на сопровождающих ее функции потенциалов  $\nu(t)$ ,  $t \in T_h$ , и векторе оценок  $\delta$  выполняются

1) условие максимума по управлению

$$\nu(t)u(t) = \max_{-L \leq u \leq L} \nu(t)u, \quad t \in T_{\text{оп}};$$

2) условие максимума по управляющим параметрам

$$\delta_j z_j = \max_{z_{*j} \leq z \leq z_j^*} \delta_j z, \quad j \in J_{\text{н}}.$$

Опору  $K_{\text{оп}}$ , которая идентифицирует оптимальную программу, будем называть оптимальной; ее сопровождают оптимальные элементы.

**Принцип  $\varepsilon$ -максимума.** При любом  $\varepsilon \geq 0$  для  $\varepsilon$ -оптимальности вектора управляющих параметров  $z$  и соответствующей ему программы  $u(\cdot)$  необходимо и достаточно существования такой опоры  $K_{\text{оп}} = \{T_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\}$ , что на сопровождающих ее функции потенциалов  $\nu(t)$ ,  $t \in T_h$ , и векторе оценок  $\delta$  выполняются

1) условие квазимаксимума по управлению

$$\nu(t)u(t) = \max_{-L \leq u \leq L} \nu(t)u - \varepsilon_u(t), \quad t \in T_{\text{оп}};$$

2) условие квазимаксимума по управляющим параметрам

$$\delta_j z_j = \max_{z_{*j} \leq z \leq z_j^*} \delta_j z - \varepsilon_{zj}, \quad j \in J_{\text{н}};$$

3) условие  $\varepsilon$ -точности

$$\sum_{t \in T_{\text{оп}}} \varepsilon_u(t) + \sum_{j \in J_{\text{н}}} \varepsilon_{z_j} \leq \varepsilon.$$

Из условий оптимальности опоры двойственного адаптивного метода следует

**Критерий оптимальности опоры.** Для оптимальности опоры  $K_{\text{оп}}$  необходимо и достаточно, чтобы на некоторых сопровождающих ее псевдоуправлении и векторе управляющих псевдопараметров выполнялись неравенства

$$|\omega(t)| \leq L, \quad t \in T_{\text{н}}; \quad z_{*j} \leq \zeta_j \leq z_j^*, \quad j \in J_{\text{оп}}.$$

Вектор управляющих псевдопараметров  $\zeta$  и соответствующее ему псевдоуправление  $\omega(t)$ ,  $t \in T$ , которые сопровождают оптимальную опору, являются оптимальными начальными параметрами и управлением  $u^0(t) = \omega(t)$ ,  $t \in T$ ;  $z_j^0 = \zeta_j$ ,  $j \in J$ .

Опишем *двойственный метод* вычисления оптимальной программы задачи (46). Метод состоит из последовательных преобразований опор, в результате которых получается оптимальная опора. В качестве начальной можно брать любую опору. Далее для упрощения выкладок предполагается, что на итерациях двойственного метода участвуют только регулярные опоры.

Обозначим

$$\begin{aligned} \rho_{j_0} &= \max_{j \in J_{\text{оп}}} \rho_j, \quad \rho(t_0) = \max_{t \in T_{\text{н}}} \rho(t), \quad \rho_0 = \max\{\rho_{j_0}, \rho(t_0)\}; \\ \rho_j &= \rho(\zeta_j, [z_{*j}, z_j^*]), \quad j \in J; \quad \rho(t) = \rho(\omega(t), [-L, L]), \quad t \in T_{\text{н}}, \end{aligned} \quad (55)$$

где  $\rho(c, [a, b])$  — расстояние от числа  $c$  до отрезка  $[a, b]$ . Возможны две ситуации: 1)  $\rho_0 = \rho(t_0)$ ; 2)  $\rho_0 = \rho_{j_0}$ .

1) ( $\rho_0 = \rho(t_0)$ ). Первыми построим приращения неопорных значений  $\Delta\nu(t)$ ,  $t \in T_{\text{н}}$ , функции потенциалов

$$\Delta\nu(t_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega(t_0) > L; \\ -1, & \text{если } \omega(t_0) < -L, \end{cases} \quad \Delta\nu(t) = 0, \quad t \in T_{\text{н}} \setminus t_0. \quad (56)$$

Приращения опорных значений  $\Delta\nu_{\text{оп}} = (\Delta\nu(t), t \in T_{\text{оп}})$  функции потенциалов найдем из уравнения

$$\Delta\nu'_{\text{оп}} D_{\text{оп}} = (\Delta\delta_j^{t_0}, j \in J_{\text{оп}})', \quad (57)$$

где  $\Delta\delta_j^{t_0} = \Delta\varphi'(t_*)G_j$ ,  $\Delta\varphi(t)$ ,  $t \in T$ , — компонента решения сопряженных уравнений (47), (48) с начальными условиями  $\varphi(t^*) = 0$ ,  $\psi(t^*) = 0$  и скачком в момент времени  $t_0$ :

$$\varphi(t_0 - 0) = \varphi(t_0 + 0) - \Delta\nu(t_0)d(t_0).$$

Положим

$$\Delta\delta_j = 0, \quad j \in J_{\text{оп}}. \quad (58)$$

Наконец, неопорные значения приращения вектора оценок  $\Delta\delta_j$ ,  $j \in J_{\text{н}}$ , вычислим по формуле

$$\Delta\delta_j = \Delta\varphi'(t_*)G_j, \quad j \in J_{\text{н}}, \quad (59)$$

где  $\Delta\varphi(t)$ ,  $t \in T$ , — компонента решения сопряженной системы (47), (48) с начальными условиями  $\varphi(t^*) = 0$ ,  $\psi(t^*) = 0$  и скачками в опорные моменты времени

$$\varphi(t - 0) = \varphi(t + 0) - \Delta\nu(t)d(t), \quad t \in T_{\text{оп}}.$$

При движении (увеличении  $\sigma \geq 0$ )

$$\nu(t | \sigma) = \nu(t) + \sigma\Delta\nu(t), \quad t \in T_{\text{н}}; \quad \delta_j(\sigma) = \delta_j + \sigma\Delta\delta_j, \quad j \in J, \quad \sigma \geq 0, \quad (60)$$

из  $(\nu(\cdot), \delta)$  вдоль направления (56)–(59) начальная скорость убывания двойственной целевой функции задачи (46)  $\alpha^1 = L - \omega(t_0)$ , если  $\omega(t_0) > L$ ;  $\alpha^1 = \omega(t_0) + L$ , если  $\omega(t_0) < -L$ .

С увеличением  $\sigma \geq 0$  будут появляться новые нули

$$\sigma_u(t) = \begin{cases} -\nu(t)/\Delta\nu(t), & \text{если } \nu(t)\Delta\nu(t) < 0; \\ \infty, & \text{если } \nu(t)\Delta\nu(t) \geq 0, \end{cases} \quad t \in T_{\text{оп}}, \quad (61)$$

$$\sigma_{z_j} = \begin{cases} -\delta_j/\Delta\delta_j, & \text{если } \delta_j\Delta\delta_j < 0; \\ \infty, & \text{если } \delta_j\Delta\delta_j \geq 0, \end{cases} \quad j \in J_{\text{н}}, \quad (62)$$

функций (60).

Упорядочим по возрастанию конечные числа из (61), (62):  $\sigma^1 < \sigma^2 < \dots < \sigma^{n^*}$  (отсутствие таковых означает несовместность ограничений задачи (46)). При движении (60) двойственная целевая функция между соседними нулями коуправления  $\sigma^k < \sigma^{k+1}$  из (61), (62) изменяется линейно относительно  $\sigma$ . Ее скорость  $\alpha^k$  на этом участке в точке  $\sigma^{k+1}$  испытывает скачок

$$\Delta\alpha^k = \begin{cases} 2L |\Delta\nu(t^k)|, & \text{если } \sigma^k = \sigma_u(t^k); \\ (z_{j_k}^* - z_{*j_k}) |\Delta\delta_{j_k}|, & \text{если } \sigma^k = \sigma_{z_{j_k}}. \end{cases}$$

Таким образом,  $\alpha^{k+1} = \alpha^k + \Delta\alpha^k$ .

Обозначим через  $k_*$  такой индекс, что  $\alpha^{k_*} < 0$ ,  $\alpha^{k_*+1} \geq 0$ . Число  $\sigma^* = \sigma^{k_*}$  называется коротким двойственным шагом, если  $k_* = 1$ , в противном случае  $\sigma^*$  — длинный двойственный шаг. С учетом 1а)  $\sigma^* = \sigma_u(t^{k_*})$ ; 1б)  $\sigma^* = \sigma_{z_{j_*}} = \sigma_{z_{j_*k_*}}$ , сформируем компоненты новой опоры  $\bar{K}_{\text{оп}} = \{\bar{T}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}}\}$ : 1а)  $\bar{T}_{\text{оп}} = (T_{\text{оп}} \setminus t_{k_*}) \cup t_0$ ,  $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}}$ ; 1б)  $\bar{T}_{\text{оп}} = T_{\text{оп}} \cup t_0$ ,  $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \cup j_*$ .

2) ( $\rho_0 = \rho_{j_0}$ ). Сначала построим приращения опорных компонент  $\delta_j$ ,  $i \in J_{\text{н}}$ , вектора оценок

$$\Delta\delta_{j_0} = \begin{cases} 1, & \text{если } \zeta_{j_0} > z_{j_0}^*; \\ -1, & \text{если } \zeta_{j_0} < z_{*j_0}, \end{cases} \quad \Delta\delta_j = 0, \quad j \in J_{\text{оп}} \setminus j_0. \quad (63)$$

Им соответствуют нулевые приращения неопорных значений функции потенциалов

$$\Delta\nu(t) = 0, \quad t \in T_{\text{н}}. \quad (64)$$

Опорные значения приращения функции потенциалов найдем из системы уравнений

$$\Delta\nu'_{\text{оп}} D_{\text{оп}} = -\Delta\delta'_{\text{оп}} = -(\Delta\delta_j, j \in J_{\text{оп}})'. \quad (65)$$

Вариации неопорных компонент вектора оценок вычислим по формуле

$$\Delta\delta_j = \Delta\varphi'(t_*)G_j, \quad j \in J_{\text{н}}. \quad (66)$$

При движении (60) вдоль направления (63)–(66) начальная скорость убывания двойственной целевой функции задачи (46)  $\alpha^1 = z_{j_0}^* - \zeta_{j_0}$  при  $\zeta_{j_0} > z_{j_0}^*$ ;  $\alpha^1 = \zeta_{j_0} - z_{*j_0}$  при  $\zeta_{j_0} < z_{*j_0}$ .

Далее поступаем аналогично случаю 1).

Новая опора имеет вид  $\bar{K}_{\text{оп}} = \{\bar{T}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}}\}$ , где 2а)  $\bar{T}_{\text{оп}} = T_{\text{оп}} \setminus t_{k_*}$ ,  $\bar{J}_{\text{оп}} = J_{\text{оп}} \setminus j_0$ ; 2б)  $\bar{T}_{\text{оп}} = T_{\text{оп}}$ ,  $\bar{J}_{\text{оп}} = (J_{\text{оп}} \setminus j_0) \cup j_*$ .

В каждом случае для новой опоры  $\bar{K}_{\text{оп}}$  подсчитаем сопровождающие ее функцию потенциалов  $\bar{\nu}(t)$ ,  $t \in T_{\text{н}}$ , вектор оценок  $\bar{\delta}_j$ ,  $j \in J$ , вектор управляющих псевдопараметров  $\bar{\zeta}_j$ ,  $j \in J$ , и псевдоуправление  $\bar{\omega}(t)$ ,  $t \in T_{\text{н}}$ .

Согласно [2] предложенный двойственный метод конечен, если в процессе итераций встречаются только регулярные опоры. Там же описана его модификация, которая конечна для любой задачи (46). Метод завершает работу построением оптимальной опоры и сопровождающих ее псевдоуправления и вектора управляющих псевдопараметров, которые будут оптимальными управлением и его начальными параметрами для задачи (46).

Как видно из описанного метода, основные затраты времени связаны с вычислением двойственных шагов (61), (62) и с пересчетом на итерациях элементов, сопровождающих новую опору  $\bar{K}_{\text{оп}}$ . Для осуществления итераций можно или заранее подсчитать все элементы задачи ЛП (46)



значения  $\Delta\delta_j$ ,  $j \in J_n$ , подсчитаем по формуле

$$\Delta\delta_j = \Delta\varphi'(t_*)G_j, \quad j \in J_n; \quad \Delta\varphi'(t_*) = - \sum_{t \in T_{\text{оп}}} \Delta\nu(t)d'(t)F_{22}(t)F_{22}^{-1}(t_*).$$

После осуществления каждой итерации информацию 2)–5) преобразуем следующим образом. В случае 1а) добавим в матрицу  $D_{\text{оп}}$  строку  $d'(t_0)F_{22}(t_0)F_{22}^{-1}(t_*)G_j$ ,  $j \in J_{\text{оп}}$ . Для ее подсчета проинтегрируем уравнение  $\dot{F}_{22} = A_1(t)F_{22}$  на промежутке  $[t_{k_*}, t_0]$  с начальным условием  $F_{22}(t_{k_*})$ . Кроме того, удалим строку  $\xi'(t_{k_*}, t_*)G_j$ ,  $j \in J_{\text{оп}}$ . В случае 1б) добавим строку  $d'(t_0)F_{22}(t_0)F_{22}^{-1}(t_*)G_j$ ,  $j \in J_{\text{оп}}$ , и добавим столбец  $d'(t)F_{22}(t)F_{22}^{-1}(t_*)G_{j_*}$ ,  $t \in T_{\text{оп}}$ . В случае 2а) удалим строку  $\xi'(t_{k_*}, t_*)G_j$ ,  $j \in J_{\text{оп}}$ , и удалим столбец  $\xi'(t)F_{22}(t)F_{22}^{-1}(t_*)G_{j_0}$ ,  $t \in T_{\text{оп}}$ , а в случае 2б) удалим столбец  $\xi'(t)F_{22}(t)F_{22}^{-1}(t_*)G_{j_0}$ ,  $t \in T_{\text{оп}}$ , и добавим  $\xi'(t)F_{22}(t)F_{22}^{-1}(t_*)G_{j_*}$ ,  $t \in T_{\text{оп}}$ .

Опорные значения функции потенциалов  $\bar{\nu}_{\text{оп}}$  найдем из уравнения (51). Вектор оценок пересчитаем по формуле  $\bar{\delta}_j = \delta_j + \sigma^* \Delta\delta_j$ ,  $j \in J$ .

По правилам (52), (53) построим неопорные компоненты  $\bar{\zeta}_j$ ,  $j \in \bar{J}_n$ , вектора управляющих псевдопараметров и опорные значения  $\bar{\omega}(t)$ ,  $t \in \bar{T}_{\text{оп}}$ , псевдоуправления. Решив систему (54), найдем  $\bar{\zeta}_j$ ,  $j \in \bar{J}_{\text{оп}}$ .

Далее храним значение  $F_{22}(t_0)$ ;  $F_{22}(t_{k_*})$  удалим из памяти.

Новые значения вектора управляющих псевдопараметров  $\bar{\zeta}_j$ ,  $j \in J$ , порождают новое псевдоуправление  $\bar{\omega}(t)$ ,  $t \in T_h$ , которое можно построить, проинтегрировав на всем промежутке  $T$  уравнение (44) с начальным условием  $y(t_*) = G\bar{\zeta}$ . Однако целью данной работы является построение алгоритма, использующего минимальные интегрирования прямой и сопряженной систем. Этой цели можно достичь, если на каждой итерации использовать значения псевдоуправления не во все моменты  $t \in T_h$ , а лишь в моменты  $t \in T_0 \cup \{t_*, t^*\}$ , в которые функция  $\rho(t)$ ,  $t \in T_h$ , достигает своих максимальных значений.

Значения псевдоуправления, соответствующего старой и новой опорам, вычисляются по формулам

$$\omega(t) = d'(t)F_{22}(t)F_{22}^{-1}(t_*)G\zeta; \quad \bar{\omega}(t) = d'(t)F_{22}(t)F_{22}^{-1}(t_*)G\bar{\zeta}.$$

Поэтому псевдоуправление изменяется в направлении  $\Delta\omega(t) = d'(t)F_{22}(t)F_{22}^{-1}(t_*)G(\bar{\zeta} - \zeta)$ .

Наряду с хранящимися в памяти элементами 1)–7) будем использовать дополнительную информацию

$$\tau(t), \quad \vartheta(t), \quad t \in T_0 \cup \{t_*, t^*\}. \quad (67)$$

Числа (67) подсчитаем по следующим правилам:

$$\begin{aligned} \tau(t) &= -1, \quad \text{если } [t \in T_0^- \text{ и } \dot{\xi}'(t, t_*)G(\bar{\zeta} - \zeta) > 0] \text{ или } [t \in T_0^+ \text{ и } \dot{\xi}'(t, t_*)G(\bar{\zeta} - \zeta) < 0]; \\ \tau(t) &= 1, \quad \text{если } [t \in T_0^+ \text{ и } \dot{\xi}'(t, t_*)G(\bar{\zeta} - \zeta) > 0] \text{ или } [t \in T_0^- \text{ и } \dot{\xi}'(t, t_*)G(\bar{\zeta} - \zeta) < 0]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau(t_*) &= 1, \quad \tau(t^*) = -1; \\ \vartheta(t) &= - \frac{\omega(t + \tau(t)h) - \omega(t)}{\Delta\omega(t + \tau(t)h) - \Delta\omega(t)} = \\ &= - \frac{(d'(t + \tau(t)h)F_{22}(t + \tau(t)h) - d'(t)F_{22}(t))F_{22}^{-1}(t_*)G\zeta}{(d'(t + \tau(t)h)F_{22}(t + \tau(t)h) - d'(t)F_{22}(t))F_{22}^{-1}(t_*)G(\bar{\zeta} - \zeta)}. \end{aligned} \quad (68)$$

Числа  $\tau(t)$ ,  $t \in T_0$ , указывают на возможное направление движения точек максимума и минимума;  $\vartheta(t) \geq 0$  — шаг, при котором вдоль направления  $\Delta\omega(t)$ ,  $t \in T_h$ , точка экстремума псевдоуправления перейдет из точки  $t$  в  $t + \tau(t)h$ . Шаги  $\vartheta(t) < 0$  не учитываются. Информацию о точках экстремума псевдоуправления и о значениях в них матричной функции  $F_{22}(t)$ ,  $t \in T$ , преобразуем по этапам. Пусть вдоль направления  $\Delta\omega(t)$ ,  $t \in T_h$ , выполнен  $(i - 1)$ -й этап, и информация перед  $i$ -м этапом имеет вид  $T_0^{-i}$ ,  $T_0^{+i}$ ,  $\vartheta^i(t)$ ,  $t \in T_0^i = T_0^{-i} \cup T_0^{+i}$ .

Предположим, что все числа  $\vartheta^i(t)$ ,  $t \in T_0^i$ , различны, кроме, возможно, чисел  $\vartheta^i(t)$ ,  $\vartheta^i(t+h)$ ,  $t, t+h \in T_0^i \cup \{t_*, t^*\}$ , причем  $\tau(t) = 1$ ,  $\tau(t+h) = -1$ .

Подсчитаем шаг

$$\vartheta^i = \vartheta^i(t^i) = \min_{\vartheta^i(t) \geq 0} \vartheta^i(t), \quad t \in T_0^i \cup \{t_*, t^*\}. \quad (69)$$

В случае  $\vartheta^i \leq 1$  хранимую в памяти информацию преобразуем следующим образом.

1. Если  $t^i \in T_0^i$  — единственная точка, в которой достигается минимум в (69), то  $T_0^{i+1} = (T_0^i \setminus t^i) \cup \{t^i + \tau(t^i)h\}$ ; вместо значения фундаментальной матрицы  $F_{22}(t^i)$  запоминаем значение  $F_{22}(t^i + \tau(t^i)h)$ ; по формуле (68) вычисляем шаг  $\vartheta(t^i + \tau(t^i)h)$ .

2. Если  $t^i = t_*$  или  $t^i = t^*$ , то  $T_0^{i+1} = T_0^i \cup \{t^i + \tau(t^i)h\}$ . Вычисляем и запоминаем значение фундаментальной матрицы  $F_{22}(t^i + \tau(t^i)h)$ ; полагаем  $\tau(t^i + \tau(t^i)h) = \tau(t^i)$ . Вычисляем шаг  $\vartheta(t^i + \tau(t^i)h)$  согласно формуле (68). Момент  $t^i + \tau(t^i)h$  является точкой минимума псевдоуправления при  $\omega(t^i) < \omega(t^i + \tau(t^i)h)$ , точкой максимума при  $\omega(t^i) > \omega(t^i + \tau(t^i)h)$ .

3. При  $\vartheta^i = \vartheta^i(t^i) = \vartheta^i(t^i + h)$ ,  $\tau(t^i) = 1$ ,  $\tau(t^i + h) = -1$ ,  $t^i, t^i + h \in T_0^i \setminus \{t_*, t^*\}$ , полагаем  $T_0^{i+1} = T_0^i \setminus \{t^i, t^i + h\}$ ; из памяти ЭВМ удалим значения фундаментальной матрицы  $F_{22}(t^i)$ ,  $F_{22}(t^i + h)$ .

4. В случае  $\vartheta^i = \vartheta^i(t^i) = \vartheta^i(t^i + h)$ ,  $\tau(t^i) = 1$ ,  $\tau(t^i + h) = -1$ ,  $t^i = t_*$  из множества  $T_0^i$  удаляем точку  $t^i + h$ :  $T_0^{i+1} = T_0^i \setminus \{t^i + h\}$ ; из памяти ЭВМ удалим значение фундаментальной матрицы  $F_{22}(t^i + h)$ .

5. При  $\vartheta^i = \vartheta^i(t^i) = \vartheta^i(t^i + h)$ ,  $\tau(t^i) = 1$ ,  $\tau(t^i + h) = -1$ ,  $t^i + h = t^*$ , из множества  $T_0^i$  удаляем точку  $t^i$ :  $T_0^{i+1} = T_0^i \setminus \{t^i\}$ ; из памяти ЭВМ удалим значение фундаментальной матрицы  $F_{22}(t^i)$ .

Если  $\vartheta^i > 1$ , то хранимая в памяти ЭВМ информация годится для использования на следующей итерации. На этом текущая итерация завершается.

Представление об эффективности описанного двойственного метода можно получить из [13], где аналогичный метод используется для решения задачи оптимального наблюдения.

**Замечание 6.** Выше неявно предполагалось, что новые опорные моменты получаются путем перемещения старых. На самом деле количество опорных моментов может меняться — некоторые опорные моменты могут исчезать, другие появляться. Дополнения в метод, которые следует внести в этих случаях, аналогичны тем, которые сделаны в двойственном методе решения задачи ОУ в классе  $U_N^0$  [11], [14].

Описанный двойственный метод вычисления оптимальных программ можно использовать и для оптимального управления в режиме реального времени, хотя в задаче (42)–(45) принцип оптимальности Беллмана не имеет места. До начала процесса управления строится оптимальная программа для позиции  $(t_*, x_0)$ . С началом (в момент  $t_*$ ) процесса управления на вход объекта управления подается управляющее воздействие  $u^*(t) = u^0(t_*, x_0) = u^0(t_* | t_*, x_0)$ ,  $t \in [t_*, t_* + h_c]$ , где число  $h_c$  характеризует частоту измерения текущих состояний.

Пусть система управления находится в момент  $\tau = kh_c$  в состоянии  $x^*(\tau)$ . По этой информации решается задача

$$\begin{aligned} c'x(t^*) \rightarrow \max; \quad \dot{x} &= A(t)x + b(t)u, \quad x(\tau) = x^*(\tau), \quad u = d'(t)y; \\ \dot{y} &= A_1(t)y, \quad y(\tau) = Gz; \quad |u(t)| \leq L, \quad t \in T(\tau); \quad z_* \leq z \leq z^*. \end{aligned}$$

На промежутке  $[\tau, \tau + h_c[$  на объект управления подается управление  $u^*(t) = u^0(\tau | \tau, x^*(\tau))$ ,  $t \in [\tau, t^*]$ , где  $u^0(t | \tau, x^*(\tau))$ ,  $t \in [\tau, t^*]$ , — оптимальная программа задачи (42)–(45). Поскольку при ограниченных возмущениях соседние состояния  $x^*(\tau)$  и  $x^*(\tau + h_c)$  удалены друг от друга незначительно, то описанный двойственный метод по оптимальной опоре  $K_{\text{оп}}^0(\tau)$  быстро строит оптимальную опору  $K_{\text{оп}}^0(\tau + h_c)$  для момента  $\tau + h_c$ . Детали реализации описаны в п. 4, поэтому на них останавливаться не будем.

При оптимальном управлении в режиме реального времени в классе  $U_1^p$  даже в отсутствие возмущений ( $w(t) = 0, t \in T$ ) могут из-за нарушения принципа оптимальности появиться скользкие режимы (см. пример 2).

**Пример 2.** Рассмотрим задачу ОУ двухмассовой колебательной системой (см. пример 1) в классе управлений  $U_1^p, p \geq 2$ :

$$\begin{aligned} x_1(20) \rightarrow \min, \quad \dot{x}_1 &= x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + u, \quad \dot{x}_4 = 0.1x_1 - 1.02x_2, \\ x_1(0) &= x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 0; \\ u(t) &= u_0 + u_1(t - kh) + \dots + u_{p-1}(t - kh)^{p-1}, \quad t \in [kh, (k+1)h], \quad k = \overline{0, 199}, \quad h = 0.1; \\ -1 \leq u(t) &\leq 1, \quad t \in [0, 20], \quad -1 \leq u_0 \leq 1, \quad -10 \leq u_j \leq 10, \quad j \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

На рис. 7 изображены оптимальные управления в классах  $U_1^4, U_1^5, U_1^6, U_1^7$  и для сравнения оптимальное управление в классе дискретных управлений нулевой степени (кривые 1, 2, 3, 4 и 5 соответственно). Значения критерия качества в каждом из классов равны:  $x_1(20) = -0.722874, u(\cdot) \in U_1^4$ ;  $x_1(20) = -2.545718, u(\cdot) \in U_1^5$ ;  $x_1(20) = -2.731974, u(\cdot) \in U_1^6$ ;  $x_1(20) = -5.079129, u(\cdot) \in U_1^7$ .

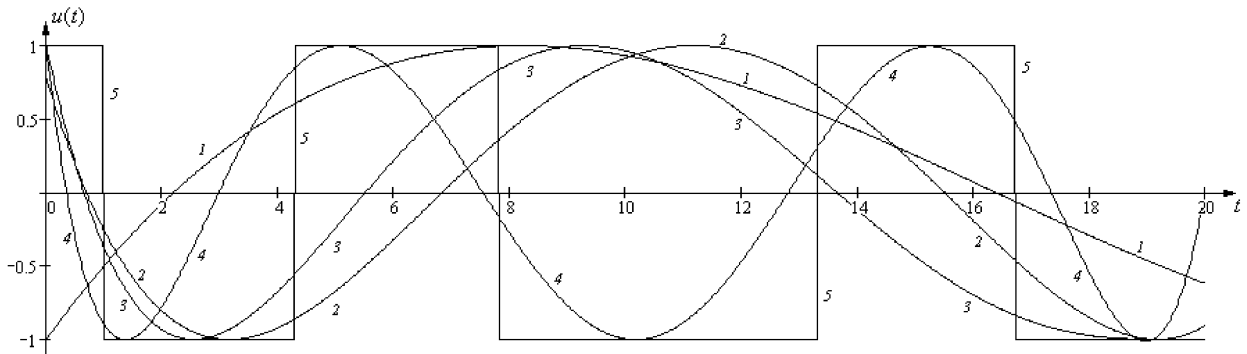


Рис. 7

При оптимальном управлении в режиме реального времени используем и схему, примененную в примере 1. Текущее состояние физической системы измеряется через  $h$ , но в каждый текущий момент времени решается задача с большим периодом дискретизации:  $h_c = 5h$ , т. е. более простая задача при стандартном подходе. В этом случае принцип оптимальности Беллмана не выполняется.

Оптимальное управление для этой задачи представлено на рис. 8 (кривая 1). Значение критерия качества равно  $-6.217508$ . Для сравнения на этом же рисунке изображены оптимальные управления для задачи ОУ в классах  $U_1^5$  (кривая 2) и  $U_{200}^0$  (кривая 3).

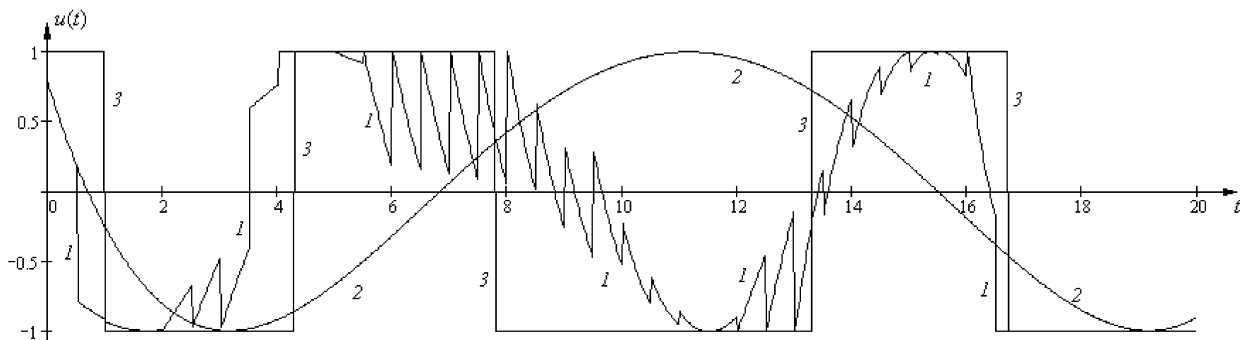


Рис. 8

Оптимальные траектории динамической системы для упрощенной задачи и задач ОУ в классах  $U_1^5$  и  $U_{200}^0$  приведены на рис. 9 (кривые 1, 2 и 3 соответственно).



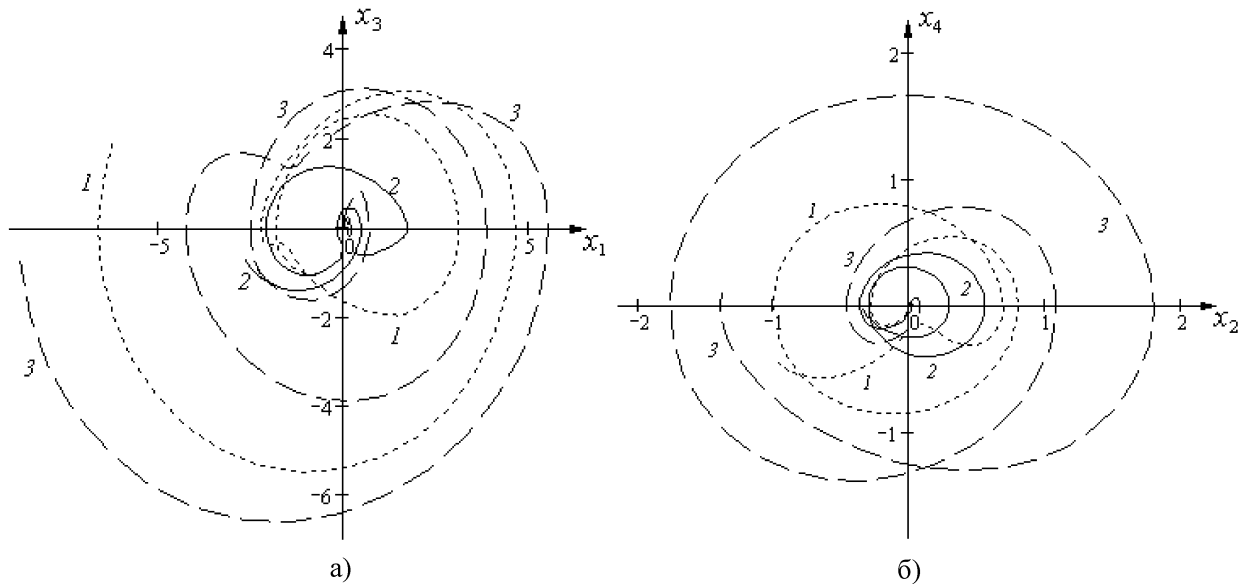


Рис. 9

На рис.10 изображено поведение критерия качества  $x_1^f(20)$  в зависимости от начального момента времени  $\tau \in T_h = T_{0,1} = \{0, 0.1, 0.2, \dots, 19.9\}$  промежутка управления  $T = [0, 20]$ .

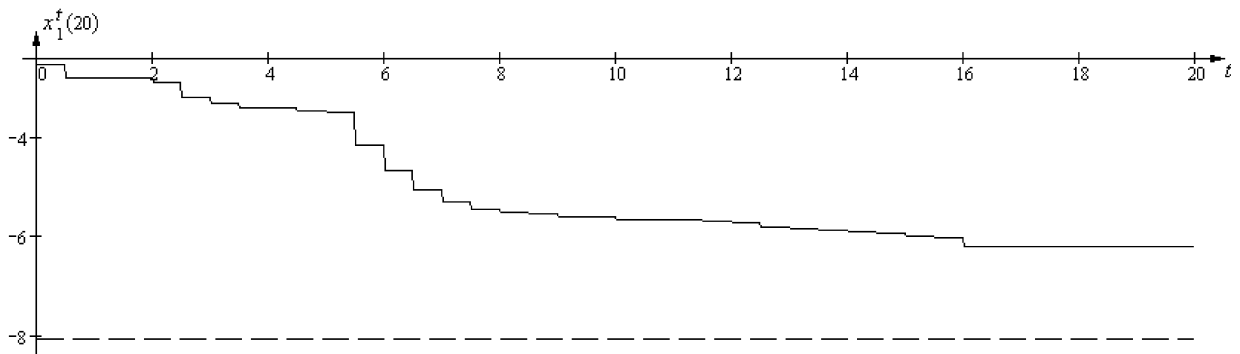


Рис. 10

## 6. Приложение к задаче стабилизации динамических систем

Рассмотрим динамическую систему управления (1), которая не является собственно асимптотически устойчивой. Будем считать, что система (1) управляема, т. е.  $\text{rank}\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\} = n$ .

Функция

$$u = u(x), \quad u(0) = 0, \quad |u(x)| \leq L, \quad x \in G, \quad (70)$$

называется ограниченной стабилизирующей обратной связью в области  $G$ , если нулевое решение уравнения

$$\dot{x} = Ax + bu(x) \quad (71)$$

асимптотически устойчиво в  $G$ .

Построение в явном (замкнутом) виде ограниченных стабилизирующих обратных связей с достаточно большой областью притяжения  $G$  представляет трудную проблему. В этой ситуации эффективным является метод стабилизации в режиме реального времени, при котором функция (70) не строится в явной форме, а вместо этого ее текущие значения вычисляются в режиме реального времени по ходу каждого конкретного процесса стабилизации.

В [5] для стабилизации динамических систем в режиме реального времени предлагалось использовать метод ОУ в режиме реального времени для специальных вспомогательных (сопровождающих) задач ОУ. В классе  $U_N^p$  сопровождающая задача ОУ имеет вид

$$\int_0^\theta |u(t)|dt \rightarrow \min; \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = z, \quad x(\theta) = 0; \quad u(\cdot) \in U_N^p, \quad (72)$$

где  $\theta > 0$  — параметр метода.

Пусть  $u^0(t|z)$ ,  $t \in [0, \theta]$ , — оптимальная программа задачи (72),  $G_\theta$  — множество всех  $z \in R^n$ , для которых задача (72) имеет решение.

Оптимальная (стартовая) обратная связь

$$u^0(z) = u(0 | z), \quad z \in G_\theta,$$

является стабилизирующей, а область притяжения  $G_\theta$  при достаточно больших  $\theta$  сколь угодно близка к максимальной области притяжения состояния равновесия замкнутой системы (71).

Стабилизация системы (1) в режиме реального времени осуществляется следующим образом. До начала процесса стабилизации вычисляется оптимальная программа  $u^0(t | x_0)$ ,  $t \in [0, \theta]$ . Время на ее вычисление несущественно. На промежутке  $[0, h[$  на вход системы (1) подается управление  $u^*(t) = u^0(t | x_0)$ ,  $t \in [0, h[$ . Пусть  $x^*(h)$  — состояние, в котором система (1) оказалась в момент  $h$  под действием этого управления. По измеренному  $x^*(\tau)$  вычислим оптимальную программу  $u^0(t | x(h))$ ,  $t \in [0, \theta]$ . Начальная часть  $u^*(t) = u^0(t - h | x^*(h))$ ,  $t \in [0, h[$ , этой программы подается на систему (1) на промежутке  $[h, 2h[$ . Далее вычисления повторяются.

Поскольку задачи (72) для двух соседних моментов  $\tau$ ,  $\tau + h$  и соответствующих им двух состояний  $x^*(\tau)$ ,  $x^*(\tau + h)$  очень близки между собой, то оптимальная опора  $K_{\text{оп}}(\tau + h)$  для момента  $\tau + h$  быстро строится описанным в пп. 4, 5 двойственным методом по оптимальной опоре  $K_{\text{оп}}(\tau)$  для момента  $\tau$ , что позволяет осуществить стабилизацию в режиме реального времени.

Приведем результаты численного эксперимента.

**Пример 3.** Рассмотрим задачу стабилизации двухмассовой колебательной системы, исследованной в примере 1. В качестве сопровождающей была рассмотрена следующая задача ОУ:

$$\int_0^{10} |u(t)|dt \rightarrow \min; \quad \dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 + u, \quad \dot{x}_4 = 0.1x_1 - 1.02x_2, \\ x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad x_3(0) = x_{30}, \quad x_4(0) = x_{40}; \quad x_1(10) = x_2(10) = x_3(10) = x_4(10) = 0,$$

которая решалась в двух классах управлений:

1) в классе  $U_{100}^1$

$$0 \leq v(t) \leq 2, \quad -100 \leq w(t) \leq 100, \quad t \in [0, 10]; \\ u(t) = v(t) + (t - kh)w(t), \quad t \in [kh, (k+1)h], \quad k = \overline{0, 99}, \quad h = 0.1,$$

2) в классе  $U_1^5$

$$u(t) = u_0 + u_1(t - kh) + u_2(t - kh)^2 + u_3(t - kh)^3 + u_4(t - kh)^4; \\ t \in [kh, (k+1)h], \quad k = \overline{0, 99}, \quad h = 0.1; \\ 0 \leq u(t) \leq 2, \quad t \in [0, 10], \quad 0 \leq u_0 \leq 2, \quad -10 \leq u_j \leq 10, \quad j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

На рис. 11 приведены переходные процессы для случая  $U_{100}^1$ . Рис. 12 содержит результаты вычислений в случае допустимых управлений класса  $U_1^5$ . На обоих рисунках кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют фазовым переменным  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $x_3(t)$ ,  $x_4(t)$ . Сравнение приведенных результатов показывает, что при невыполнении принципа оптимальности качество переходных процессов значительно ухудшается.

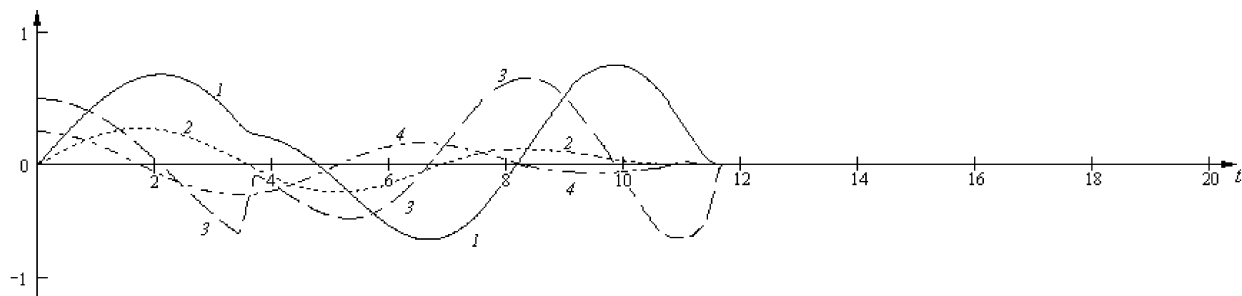


Рис. 11

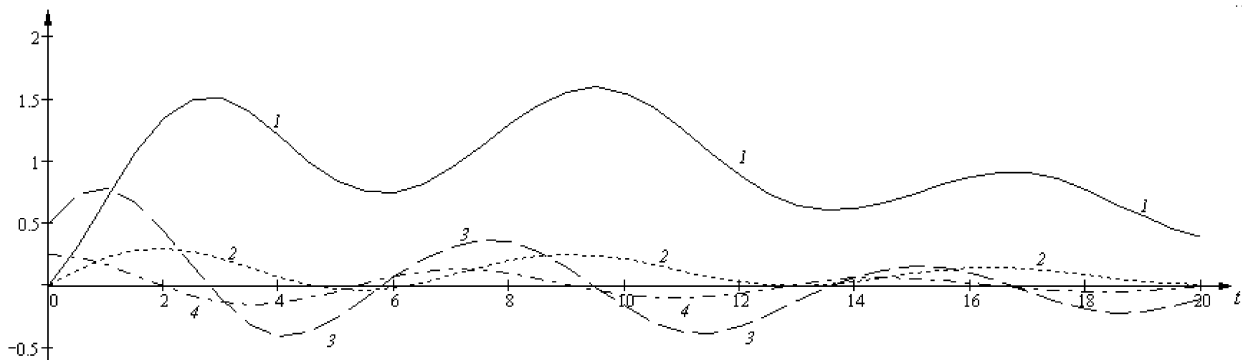


Рис. 12

### Литература

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. – М.: Наука, 1976. – 392 с.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. *Конструктивные методы оптимизации*. Ч. 1. *Линейные задачи*. – Минск: Изд-во “Университетское”, 1984. – 213 с.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. *Конструктивные методы оптимизации*. Ч. 3. *Сетевые задачи*. – Минск: Изд-во “Университетское”, 1986. – 224 с.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. *Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче* // ДАН СССР. – 1991. – Т. 320. – № 6. – С. 1294–1299.
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. *К методам стабилизации динамических систем* // Изв. РАН. Сер. техн. кибернет. – 1994. – № 3. – С. 67–77.
6. Kwon W.H., Pearson A.E. *A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system* // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1977. – V. 22. – P. 838–842.
7. Qin S.J., Badgwell T.A. *An overview of industrial model predictive control technology* // Proc. Fifth Intern. Conf. on Chemical Process Control — CPC V / J.C. Kantor, G.E. Garcia, B. Carnahan (Eds.). – Amer. Institute of Chemical Engineers. – 1996. – P. 232–256.
8. Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Конструктивные методы оптимизации*. Ч. 2. *Задачи управления*. – Минск: Изд-во “Университетское”, 1984. – 206 с.
9. Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М. *Оптимизация многомерных систем управления с параллелепипедными ограничениями* // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 3. – С. 3–26.
10. Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Оптимизация линейных систем*. – Минск: Изд-во Белорусск. ун-та, 1973. – 246 с.
11. Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2000. – Т. 40. – № 6. – С. 838–859.

12. Гайшун П.В., Кириллова Ф.М., Медведев В.Г. *Алгоритм решения линейной задачи с непрерывным ограничением и его приложения к задачам оптимального управления и стохастического программирования* // Препринт № 16. Ин-т математики АН БССР. – Минск, 1986. – 52 с.
13. Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М. *Оптимальное наблюдение за нестационарными системами* // Изв. РАН. Сер. теория и системы управления. – 2002. – № 3. – С. 35–46.
14. Gabasov R., Kirillova F.M., Balashevich N.V. *On the synthesis problem for optimal control systems* // SIAM J. on Control and Optim. – 2001. – V. 39. – № 4. – P. 1008–1042.

*Белорусский государственный университет  
Институт математики Национальной  
Академии наук Беларуси*

*Поступила  
04.09.2003*