Известия вузов. Математика
2008, № 7, с. 79–84

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Краткое сообщение

А.М. МАТВЕЕВА

ЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ОСНАЩЕННОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В КОНФОРМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. В данной работе изучаются вопросы геометрии аффинных и нормальных связностей, индуцируемых полным оснащением взаимно ортогональных распределений $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ в конформном пространстве C_n, где $\mathcal{M}$ — распределение гиперплоскостных элементов и $\mathcal{H}$ — распределение одномерных линейных элементов. Рассматриваются инвариантные поля пучков гиперсфер, параллельно переносимые в нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ при смещении вдоль любой кривой, принадлежащей распределению $\mathcal{M}$.

Ключевые слова: конформное пространство, распределение гиперплоскостных элементов, аффинная связность, нормальная связность.

УДК: 514.756

Abstract. We study the geometry of affine and normal connections induced by a complete normalization of mutually orthogonal distributions $\mathcal{M}$ and $\mathcal{H}$ in conformal space C_n, where $\mathcal{M}$ is a distribution of hyperplane elements, and $\mathcal{H}$ is a distribution of line elements. We consider invariant fields of pencils that are parallel with respect to the normal connection $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ along any curve belonging to the distribution $\mathcal{M}$.

Keywords: conformal space, distribution of hyperplane elements, affine connection, normal connection.

К изучению привлекаются инвариантные методы дифференциально-геометрических исследований, а именно, метод внешних дифференциальных форм Э. Картана [1] и теоретико-групповой метод Г.Ф. Лаптева [2].

Во всей работе индексы принимают следующие значения:

$$\lambda, \mu, \rho = \overline{0, n+1}; \quad I, J, K, L = \overline{1, n}; \quad i, j, k, s, t = \overline{1, n-1}.$$

Отнесем конформное пространство C_n, структурные уравнения которого имеют вид [3], [4] $D\omega_\lambda^\mu = \omega_\lambda^\rho \wedge \omega_\rho^\mu$, к подвижному полуизотропному [3], [5], [4] реперу $R = \{A_\lambda\}$. Рассмотрим распределения [6] $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ $(n-1)$-мерных и одномерных линейных элементов (A_0, L_{n-1}) и (A_0, L_1) соответственно; при этом будем считать, что $n \geq 3$. Здесь L_{n-1} есть связка гиперсфер $P = \xi^0 A_0 + \xi^i P_i$, натянутых на точку A_0 и гиперсферы P_i; аналогично L_1 есть

Поступила 21.02.2007

пучок гиперсфер $Q = \eta^0 A_0 + \eta^n P_n$. Гиперсферы P_i, P_n имеют следующие разложения:

$$P_i = A_i + x_i^0 A_0, \quad P_n = A_n + x_n^0 A_0.$$

Потребуем, чтобы в каждом центре A_0 текущие элементы L_{n-1} и L_1 распределений $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ были ортогональны, т. е. $(P_i P_n) \equiv (A_i A_n) = g_{in} = 0$; при выполнении данных соотношений распределения $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ называются взаимно ортогональными [6]. Заметим, что $(A_\lambda A_\mu) = g_{\lambda\mu}$, $g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$, $|g_{\lambda\mu}| \neq 0$.

Известно [6], что в выбранном репере распределения $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ определяются соответственно следующими системами дифференциальных уравнений:

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega_0^K, \quad \omega_n^i = \Lambda_{nK}^i \omega_0^K.$$

Между функциями Λ_{iK}^n и Λ_{nK}^i имеют место зависимости $g_{ij}\Lambda_{nK}^j + g_{nn}\Lambda_{iK}^n = 0$.

Обращение в нуль тензора $\Lambda_{[ij]}^n$ есть условие голономности распределения $\mathcal{M}$: $(n-1)$-мерные линейные элементы L_{n-1} распределения огибаются гиперповерхностями V_{n-1} однопараметрического семейства непересекающихся гиперповерхностей.

Пусть X_{n+1} — произвольная точка конформного пространства C_n, отличная от A_0 и не лежащая на изотропном конусе $g_{IK}x^I x^K = 0$ с вершиной в точке A_0. Тогда, как известно [3], [4], точка X_{n+1} имеет разложение $X_{n+1} = x^0 A_0 + x^j A_j + x^n A_n + A_{n+1}$ $(x^{n+1} = 1)$; в полуортогональном конформном репере R точка X_{n+1} имеет разложение [3], [6]

$$X_{n+1} = -\frac{1}{2}[g^{ij}x_i^0 x_j^0 + g^{nn}(x_n^0)^2]A_0 - g^{ij}x_j^0 A_i - g^{nn}x_n^0 A_n + A_{n+1}.$$

Задание полей функций x_i^0, x_n^0, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$dx_i^0 + x_i^0\omega_0^0 - x_j^0\omega_i^j + \omega_i^0 = x_{iK}^0\omega_0^K, \quad dx_n^0 + x_n^0(\omega_0^0 - \omega_n^n) + \omega_n^0 = x_{nK}^0\omega_0^K,$$

равносильно полному оснащению [3], [6] обоих ортогональных распределений $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$. По отношению к распределению $\mathcal{M}$ поле P_n называется [3], [6] полем касательных гиперсфер, а поле $[P_i]$ — полем нормальных окружностей.

Поля квазитензоров первого порядка

$$\Lambda_i^0 \overset{\text{def}}{=} -\Lambda_{in}^n, \quad \Lambda_n^0 \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-1}\Lambda_{nj}^j \tag{1}$$

внутренним образом определяют полное оснащение распределения $\mathcal{M}$.

Заметим, что функции $a_{ij}^n \overset{\text{def}}{=} \Lambda_{ij}^n - \frac{1}{n-1}g_{ij}g^{ks}\Lambda_{ks}^n$ на распределении $\mathcal{M}$ образуют тензор первого порядка (необязательно симметричный). В случае невырожденности этого тензора, т. е. $a \overset{\text{def}}{=} |a_{ij}^n| \neq 0$, справедливо

$$d\ln a + (n-1)(\omega_0^0 + \omega_n^n) - 2\omega_j^j = a_K\omega_0^K.$$

Поля квазитензоров второго порядка

$$\widetilde{a}_k \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n-1}a_k, \quad \widetilde{a}_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n-1}a_n \tag{2}$$

внутренним образом определяют полное оснащение распределения $\mathcal{M}$, причем выполняются соотношения $\widetilde{a}_{[ij]} - \widetilde{a}_n\Lambda_{[ij]}^n = 0$, $\widetilde{a}_{in} - \widetilde{a}_{ni} + \widetilde{a}_j\Lambda_{ni}^j - \widetilde{a}_n\Lambda_{in}^n = 0$.

Доказаны следующие предложения.

Теорема 1. *При полном оснащении полями квазитензоров x_i^0, x_n^0 распределения $\mathcal{M} \subset C_n$ на распределении $\mathcal{M}$ индуцируется пространство аффинной связности $A_{n,n-1}$, базой которого является пространство C_n и слоевыми формами — формы $\theta_0^j = \omega_0^j$, $\theta_i^j = \omega_i^j -$*

$\delta_i^j(\omega_0^0 - x_K^0\omega_0^K) + g^{jk}x_k^0\omega_i^{n+1} + x_i^0\omega_0^j$. *Пространство* $A_{n,n-1}$ *является вейлевым* [7] (*вообще говоря, с кручением*) *с полем метрического тензора* g_{ij} *и дополнительной формой* $\Theta \overset{\text{def}}{=} \omega_0^0 - x_K^0\omega_0^K$. *Это пространство является обобщенно римановым тогда и только тогда, когда обращаются в нуль тензоры*

$$T_{ij} \overset{\text{def}}{=} x^0_{[ij]} - x^0_n\Lambda^n_{[ij]}, \quad T_{in} \overset{\text{def}}{=} 2x^0_{[in]} + x^0_k\Lambda^k_{ni} - x^0_n\Lambda^n_{in}.$$

Следствие. Пространство аффинной связности $A_{n,n-1}$, индуцируемое полным оснащением распределения $\mathcal{M}$, определяемым полями квазитензоров $\widetilde{a}_k$ и $\widetilde{a}_n$ второго порядка (см. (2)), является обобщенно римановым.

Теорема 2. *Если пространство аффинной связности* $A_{n,n-1}$, *индуцируемое на вполне оснащенном распределении* $\mathcal{M}$, *имеет нулевое кручение, то исходное распределение* $\mathcal{M}$ *является голономным, причем поле касательных гиперсфер* P_n *внутренним образом определяется охватом* (1_2).

Согласно [6] кривые, принадлежащие распределению $\mathcal{M}$, имеют уравнения

$$l_{\mathcal{M}} : \begin{cases} \omega_0^n = 0, \\ \omega_0^i = l^i\theta, \quad D\theta = \theta \wedge \theta_0^0. \end{cases}$$

Показано, что *для того чтобы касательная гиперсфера* P_n *была неподвижной при смещении вдоль кривых* $l_{\mathcal{M}}$, *необходимо и достаточно выполнения одной из групп равносильных соотношений*

$$\widetilde{\Lambda}^i_{nk}(x) \overset{\text{def}}{=} \Lambda^i_{nk} + \delta^i_k x^0_n = 0, \tag{3}$$

$$x^0_{nk} = 0. \tag{4}$$

Если выполнена одна из групп соотношений (3) или (4), то исходное распределение $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов назовем *сферическим*. Геометрически выполнение этих соотношений означает, что сферическое распределение является голономным и расслаивается на однопараметрическое семейство непересекающихся гиперсфер P_n, которые являются неподвижными при смещении вдоль кривых $l_{\mathcal{M}}$, и в каждом центре $A_0 \in P_n$ гиперплоскостные элементы L_{n-1} распределения огибаются гиперсферами P_n.

Имеют место следующие предложения.

Теорема 3. *При полном оснащении распределения* $\mathcal{M} \subset C_n$ *пространство аффинной связности* $A_{n,n-1}$ *имеет нулевое кручение тогда и только тогда, когда исходное распределение* $\mathcal{M}$ *является сферическим.*

Теорема 4. *На вполне оснащенном полями квазитензоров* x_i^0, x_n^0 *распределении* $\mathcal{M} \subset C_n$ *в расслоении окружностей* $[P_i]$ *индуцируется нормальная связность* $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ [8], *определяемая формами* $\overset{0}{\Theta}{}^n_n = \omega_n^n - \omega_0^0 + x_i^0\omega_0^i + x_n^0\omega_0^n$, $\overset{0}{\Theta}{}^0_n = \omega_n^0 - x_i^0\omega_n^i + \frac{1}{2}g_{nn}g^{ks}x_k^0x_s^0\omega_0^n + \frac{1}{2}(x_n^0)^2\omega_0^n$, *с тензором кривизны-кручения* $\overset{0}{R}{}^{\alpha}_{nKL}$. *Форма* $\{\overset{0}{\Theta}{}^n_n\}$ *определяет подсвязность* $\overset{0}{\widetilde{\nabla}}{}^{\perp}$ *связности* $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ *с тензором кривизны-кручения* $\overset{0}{R}{}^n_{nKL}$. *Нормальная подсвязность* $\overset{0}{\widetilde{\nabla}}{}^{\perp}$ *связности* $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ *плоская* [8] (*т. е. связность* $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ *полуплоская*) *тогда и только тогда, когда вейлево пространство* $A_{n,n-1}$ *является обобщенно римановым.*

Следствие. Нормальная подсвязность $\overset{0}{\widetilde{\nabla}}{}^{\perp}$ связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ является плоской (т. е. связность $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ полуплоская), если распределение $\mathcal{M} \subset C_n$ вполне оснащено полями квазитензоров $\widetilde{a}_k$, $\widetilde{a}_n$ второго порядка (см. (2)).

Теорема 5. *Если на вполне оснащенном распределении $\mathcal{M} \subset C_n$ индуцируемая обобщенно риманова связность пространства $A_{n,n-1}$ имеет нулевое кручение, то это распределение $\mathcal{M}$ голономно, причем если кручение обращается в нуль при полном оснащении распределения $\mathcal{M}$ полями квазитензоров Λ_i^0, Λ_n^0 первого порядка (см. (1)), то нормальная связность $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ является полуплоской тогда и только тогда, когда тензор $x^0_{[JK]}$ обращается в нуль.*

Рассмотрим класс распределений $\mathcal{M}$ конформного пространства C_n, допускающих такое полное оснащение, при котором тензор

$$X^0_{ni} \overset{\text{def}}{=} x^0_{ni} - x^0_j \Lambda^j_{ni} - x^0_n x^0_i \tag{5}$$

обращается в нуль вдоль любой кривой, принадлежащей распределению $\mathcal{M}$.

Для нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ имеет место равенство $\overset{0}{R}{}^0_{nij} = x^0_n \overset{0}{R}{}^n_{nij}$ $(\mathrm{mod} l_{\mathcal{M}})$, откуда непосредственно следует

Теорема 6. *Нормальная связность $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$, индуцируемая полным оснащением распределения $\mathcal{M} \subset C_n$, допускающим обращение в нуль тензора X^0_{ni} вдоль кривых, принадлежащих распределению $\mathcal{M}$, является плоской $(\overset{0}{R}{}^{\alpha}_{nij} \equiv 0)$ тогда и только тогда, когда она полуплоская $(\overset{0}{R}{}^n_{nij} \equiv 0)$.*

Заметим, что класс таких распределений $\mathcal{M}$, для которых $X^0_{ni} \equiv 0$, не пуст; например, этому классу принадлежит сферическое распределение $\mathcal{M}$.

При перенесении Дарбу конформного пространства C_n в проективное пространство P_{n+1} взаимно ортогональные элементы L_{n-1} и L_1 распределений $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ соответственно отображаются в $(n-1)$-мерную касательную плоскость $\Pi_{n-1}(\mathrm{A}_0) \equiv [\mathrm{A}_0\mathrm{A}_i]$ и в касательную прямую $[\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n]$ к гиперквадрике Q^2_n в точке A_0, причем прямая $[\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n]$ и плоскость $\Pi_{n-1}(\mathrm{A}_0)$ лежат в касательной гиперплоскости $\mathrm{T}_n(\mathrm{A}_0)$ к гиперквадрике Q^2_n, пересекаются в точке A_0 и сопряжены относительно абсолюта Q^2_n.

Распределение Π плоскостей $\Pi_{n-1} \subset \mathrm{P}_{n+1}$ является базисным для регулярного $(|g_{ij}| \neq 0)$ гиперполосного распределения [9] H в P_{n+1}. Касательная гиперплоскость $\mathrm{T}_n(\mathrm{A}_0)$ к гиперквадрике Q^2_n в точке A_0 является оснащающей гиперплоскостью гиперполосного распределения H в P_{n+1}.

Доказана

Теорема 7. *Полное оснащение распределения $\mathcal{M} \subset C_n$ при отображении Дарбу в пространстве P_{n+1} индуцирует n-мерное взаимным [7] и двойственным образом [10] нормализованное регулярное гиперполосное распределение* H *в* P_{n+1} *$(n-1)$-мерных линейных элементов $(\mathrm{A}_0, \Pi_{n-1})$, для которого базисным распределением Π является образ распределения $\mathcal{M}$ и полем характеристик семейства касательных к Q^2_n гиперплоскостей в точках $\mathrm{A}_0 \in Q^2_n$ служит поле прямых $[\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n]$.*

В конформном пространстве C_n рассмотрим второе распределение гиперплоскостных элементов $\mathcal{M}^*$ с центром в точке X_{n+1}. Справедлива

Теорема 8. *При полном оснащении распределения $\mathcal{M} \subset C_n$ образы текущих элементов распределений $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^*$ при смещении центра A_0 вдоль кривых, принадлежащих распределению $\mathcal{M}$, пересекаются по нормали второго рода $[P_i]$ тогда и только тогда, когда указанное оснащение допускает обращение в нуль тензора X^0_{nk} (см. (5)).*

В этом заключается геометрический смысл обращения в нуль тензора X^0_{nk}.

Показано, что в нормали первого рода N_2 гиперполосного распределения H в P_{n+1} прямая $\mathrm{h} \equiv [\mathrm{A}_0\mathrm{N}_{n+1}]$, где $\mathrm{N}_{n+1} = \mathrm{X}_{n+1} + b^n_{n+1}\mathrm{A}_n$, $b^n_{n+1} = \sqrt[n-1]{\frac{a}{g}}$, является инвариантной.

Если $[\mathrm{A}_0\mathrm{M}]$ — гладкое поле одномерных направлений, принадлежащее полю $\mathrm{N}_2 \equiv [\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n\mathrm{X}_{n+1}]$, то точка M имеет разложение $\mathrm{M} = \mathrm{A}_0 + x^n\mathrm{A}_n + x^{n+1}\mathrm{N}_{n+1}$, где x^n, x^{n+1} одновременно не равны нулю; при $x^{n+1} = 0$ это направление принадлежит полю характеристик $[\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n]$, а при $x^n = 0$ совпадает с полем инвариантных прямых $\mathrm{h} \equiv [\mathrm{A}_0\mathrm{N}_{n+1}]$. Доказаны следующие четыре теоремы.

Теорема 9. *При полном оснащении распределения $\mathcal{M} \subset C_n$ поле характеристик $[\mathrm{A}_0\mathrm{A}_n]$ гиперполосного распределения H в P_{n+1} параллельно переносится в нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ при смещении вдоль любой кривой, принадлежащей распределению $\mathcal{M} \subset C_n$.*

Теорема 9*. *При полном оснащении распределения $\mathcal{M} \subset C_n$ поле пучка касательных гиперсфер $Q = \eta^n A_n + \eta^0 A_0$ распределения $\mathcal{M}$ параллельно переносится в нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ при смещении вдоль любой кривой, принадлежащей распределению $\mathcal{M}$.*

Теорема 10. *Поле инвариантных прямых $\mathrm{h} \equiv [\mathrm{A}_0\mathrm{N}_{n+1}]$ на гиперполосном распределении H в P_{n+1} является параллельным в нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ при смещении вдоль любой кривой, принадлежащей распределению $\mathcal{M} \subset C_n$, тогда и только тогда, когда тензор $B^n_{n+1,k} \overset{\text{def}}{=} b^n_{n+1,k} - b^n_{n+1}x^0_k - g^{nn}X^0_{nk}$ обращается в нуль.*

Теорема 10*. *Поле инвариантного пучка гиперсфер $S = \zeta^{n+1}N_{n+1} + \zeta^0 A_0$ является параллельным в нормальной связности $\overset{0}{\nabla}{}^{\perp}$ при смещении вдоль любой кривой, принадлежащей распределению $\mathcal{M} \subset C_n$, тогда и только тогда, когда тензор $B^n_{n+1,k} \overset{\text{def}}{=} b^n_{n+1,k} - b^n_{n+1}x^0_k - g^{nn}X^0_{nk}$ обращается в нуль.*

Литература

[1] Фиников С.П. *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

[2] Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий* // Тр. Московск. матем. о-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.

[3] Акивис М.А. *К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей* // Матем. сб. – 1961. – Т. 53. – №1. – С. 53–72.

[4] Akivis M.A., Goldberg V.V. *Conformal differential geometry and its generalizations.* – New York: John Wiley & Sons, 1996. – xiv + 383 p..

[5] Бушманова Г.В. *Элементы конформной геометрии.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972 – 178 с.

[6] Столяров А.В. *Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований и его приложения.* – Чебоксары: Чувашск. гос. пед. ун-т, 2002. – 204 с.

[7] Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.

[8] Чакмазян А.В. *Нормальная связность в геометрии подмногообразий.* – Ереван: Армянск. пед. ин-т, 1990. – 116 с.

[9] Столяров А.В. *Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов* // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1975. – Т. 7. – С. 117–151.

[10] Чакмазян А.В. *Двойственная нормализация* // ДАН Арм. ССР. – 1959. – Т. 28. – №4. – С. 151–157.

А.М. Матвеева

аспирант, кафедра геометрии,
Чувашский государственный педагогический университет,
428000, Чебоксары, ул. Карла Маркса, д. 38,

e-mail: caf_geom_chgpu@mail.ru

A.M. Matveeva

Postgraduate, Chair of Geometry,
Chuvash State Pedagogical University named,
38 K. Marks str., Cheboksary, 428000 Russia,

e-mail: caf_geom_chgpu@mail.ru