Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2008, № 7, с. 29–38 *e-mail: izvuz.matem@ksu.ru*

С.В. ПАВЛИКОВ

К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Аннотация. Исследуется устойчивость функционально-дифференциального уравнения с бесконечным запаздыванием на основе метода предельных уравнений с использованием знакопостоянного функционала Ляпунова со знакопостоянной производной. Построение предельных уравнений проводится в специальном фазовом пространстве. Получена теорема о локализации положительного предельного множества, а также теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости. Приведены примеры.

Ключевые слова: функционально-дифференциальное уравнение, бесконечное запаздывание, знакопостоянный функционал Ляпунова, предельные уравнения.

УДК: 517.929

Abstract. We study the stability of functional differential equations with infinite delay, using the Lyapunov functional of constant sign with a derivative of constant sign. Limit equations are constructed in a special phase space. We establish a theorem on localization of a positive limit set and theorems on the stability and the asymptotic stability. The results are illustrated by examples.

Keywords: functional differential equation, infinite delay, Lyapunov functional of constant sign, limit equations.

1. Фазовое пространство

Фазовое пространство функционально-дифференциального уравнения с бесконечным запаздыванием определим на основе аксиоматического подхода, разработанного в [1].

Пусть B есть действительное векторное пространство либо

1) непрерывных функций, отображающих $(-\infty, 0]$ в R^n, и для $\varphi, \psi \in B$ считаем $\varphi = \psi$, если $\varphi(s) = \psi(s)$ для всех $s \in (-\infty, 0]$, либо

2) измеримых функций, отображающих $(-\infty, 0]$ в R^n, и для $\varphi, \psi \in B$ считаем $\varphi = \psi$, если $\varphi(s) = \psi(s)$ для почти всех $s \in (-\infty, 0]$ и $\varphi(0) = \psi(0)$.

В пространстве R^n обозначим норму через $|\cdot|$. Предположим, что в пространстве B определена норма $\|\cdot\|_B$ такая, что пространство $(B, \|\cdot\|_B)$ является банаховым.

Для функции $x : (-\infty, A) \to R^n$, $0 < A \le +\infty$, определим функцию $x_t : (-\infty, 0] \to R^n$ формулой $x_t(s) = x(t+s)$, $s \le 0$, для каждого $t \in [0, A)$.

Поступила 23.05.2006

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00741).

Определение 1.1 ([2]). Пространство B называется допустимым, если существуют постоянные $K > 0$, $J > 0$ и непрерывная функция $M : [0, \infty) \to [0, \infty)$ такие, что выполняются следующие условия. Пусть $0 \le a < A \le \infty$. Если $x : (-\infty, A) \to R^n$ непрерывна на $[a, A)$ и $x_a \in B$, то для всех $t \in [a, A)$ справедливо

B1) $x_t \in B$ и x_t непрерывно по t относительно $\| \cdot \|_B$,

B2) $\|x_t\|_B \le K \max\limits_{a \le s \le t} |x(s)| + M(t-a)\|x_a\|_B$,

B3) $|\varphi(0)| \le J\|\varphi\|_B$ для всех $\varphi \in B$,

B4) $M(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Предположим, что если φ ограничена и непрерывна на $(-\infty, 0]$, то $\varphi \in B$ и все функции φ_{-t}, $t \ge 0$, ограничены по норме пространства B: $\|\varphi_{-t}\|_B \le L$ для некоторого $L > 0$ (здесь $\varphi_{-t}(s) = \varphi(-t + s)$, $s \in (-\infty, 0]$).

Рассмотрим примеры допустимых пространств B.

Пример 1.1. Простейшим случаем допустимого пространства является пространство $C_{[-h,0]}$ непрерывных на $[-h, 0]$ ($h = \text{const} > 0$) функций с нормой $\|\varphi\| = \sup(|\varphi(s)|, -h \le s \le 0)$.

Пример 1.2 ([2]). Пусть $g : (-\infty, 0] \to [1, \infty)$ есть непрерывная невозрастающая функция такая, что $g(0) = 1$, $\frac{g(s+u)}{g(s)} \to 1$ равномерно на $(-\infty, 0]$ при $u \to 0^-$;

$$\lim_{T \to +\infty} \sup_{s \le 0} \frac{g(s)}{g(s-T)} = 0.$$

Обозначим через C_g пространство непрерывных функций φ, отображающих $(-\infty, 0]$ в R^n, таких, что

$$\sup_{s \le 0} \frac{|\varphi(s)|}{g(s)} < \infty.$$

Тогда пространство C_g с нормой

$$\|\varphi\|_g = \|\varphi\|_{C_g} = \sup_{s \le 0} \frac{|\varphi(s)|}{g(s)}$$

есть банахово пространство.

Рассмотрим подпространство в C_g: $UC_g = \{\varphi \in C_g : \frac{\varphi}{g}$ равномерно непрерывна на $(-\infty, 0]\}$.

Тогда UC_g есть допустимое пространство. Частным случаем пространства C_g является пространство C_γ с $g(s) = e^{-\gamma s}$ для $\gamma > 0$. Пространство C_γ является допустимым.

Пример 1.3 ([2]). Пусть $k : (-\infty, 0] \to (0, \infty)$ есть измеримая функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{0} k(s)ds < \infty, \quad \sup_{s \le 0} \frac{k(s-T)}{k(s)} \le L(T)$$

для некоторой непрерывной функции $L : (0, \infty) \to (0, \infty)$ с условием $\lim\limits_{T \to \infty} L(T) = 0$.

Пусть M_0 есть пространство измеримых функций, отображающих $(-\infty, 0]$ в R^n, и для $\varphi, \psi \in M_0$ считаем $\varphi = \psi$, если $\varphi(s) = \psi(s)$ для почти всех $s \in (-\infty, 0]$ и $\varphi(0) = \psi(0)$. Определим множество

$$M_k = \left\{\varphi \in M_0 : \int_{-\infty}^{0} k(s)|\varphi(s)|ds < \infty\right\}.$$

Для $h > 0$ определим пространство $M_k^h = \{\varphi \in M_k : \varphi$ непрерывна на $[-h, 0]\}$ с нормой

$$\|\varphi\|_{M_k^h} = \|\varphi\|_k^h = \max\left\{ \max_{-h\le s\le 0} |\varphi(s)|, \int_{-\infty}^0 k(s)|\varphi(s)|ds \right\}.$$

Тогда пространство M_k^h является допустимым.

2. Исходное и предельные уравнения

Пусть B есть допустимое сепарабельное пространство. Для произвольного $H > 0$ определим множество $B_H = \{\varphi \in B : \|\varphi\|_B < H\}$, $\overline{B}_H = \{\varphi \in B : \|\varphi\|_B \le H\}$.

Рассмотрим систему функционально-дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \tag{2.1}$$

Здесь f есть непрерывное отображение, определенное на множестве $R^+ \times B_H \to R^n$ для некоторого H, $0 < H \le +\infty$.

Для заданных $\alpha \in R^+$, $\varphi \in B_H$ назовем $x(t, \alpha, \varphi)$ решением (2.1), начинающееся в точке (α, φ), если существует $\beta > \alpha$ такое, что $x(t, \alpha, \varphi)$ удовлетворяет (2.1) на $[\alpha, \beta)$ и $x_\alpha(\alpha, \varphi)=\varphi$.

Если $f(t, \varphi)$ ограниченно на каждом множестве $R^+ \times \overline{B}_h$, $|f(t, \varphi)| \le m(h)$ для всех $(t, \varphi) \in R^+ \times \overline{B}_h$, $0 < h < H$, то для каждой начальной точки $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times B_H$ существует непродолжаемое решение $x(t, \alpha, \varphi)$ уравнения (2.1), определенное на $[\alpha, \beta)$ для некоторого $\beta > \alpha$. При этом для любого $\varepsilon \in (0, H)$ и непродолжаемого на $[\alpha, \beta)$ решения $x(t, \alpha, \varphi)$, $x_\alpha \in B_\varepsilon$, либо $\beta = +\infty$, либо $\|x_{t_1}\|_B = \varepsilon$ для некоторого $t_1 \in (\alpha, \beta)$ [2].

Будем также считать, что функция f удовлетворяет условию Липшица по φ на каждом компактном множестве $K \subset B_H$, т. е. существует $l = l(K)$ такое, что для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ выполняется неравенство

$$|f(t, \varphi_2) - f(t, \varphi_1)| \le l\|\varphi_2 - \varphi_1\|_B.$$

Тогда решение уравнения (2.1) будет единственным для каждой точки $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times B_H$.

Предложение 2.1. *Для каждого компактного множества $K \subset B_H$ функция $f = f(t, \varphi)$ равномерно непрерывна по $(t, \varphi) \in R^+ \times K$, т. е. для любого $K \subset B_H$ для произвольного малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ такое, что для любых $(t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2) \in R^+ \times K$: $|t_2 - t_1| < \delta$, $\varphi_1, \varphi_2 \in K : \|\varphi_2 - \varphi_1\|_B < \delta$, выполняется неравенство*

$$|f(t_2, \varphi_2) - f(t_1, \varphi_1)| < \varepsilon.$$

В этом случае семейство сдвигов $\{f_\tau(t, \varphi) = f(\tau + t, \varphi),\ \tau \in R^+\}$ предкомпактно в пространстве непрерывных функций, определенных на $R^+ \times B_H$.

Определение 2.1 ([3]). Функция $f^* : R^+ \times B_H \to R^n$ называется предельной к f, если существует последовательность $t_n \to +\infty$ такая, что $\{f^{(n)}(t, \varphi) = f(t_n + t, \varphi)\}$ сходится к $f^*(t, \varphi)$ в пространстве непрерывных функций, определенных на $R^+ \times B_H$, при этом сходимость равномерна на каждом множестве $[0, T] \times K$, $T > 0$, K есть компакт из B_H.

Системе (2.1) можно сопоставить в соответствие семейство предельных уравнений [3]:

$$\dot{x}(t) = f^*(t, x_t). \tag{2.2}$$

В силу того, что f удовлетворяет условию Липшица, решение уравнения (2.2) будет единственным для каждой точки $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times B_H$.

Взаимосвязь решений уравнений (2.1) и (2.2) устанавливает следующая

Лемма 2.1 ([4]). *Пусть* $t_n \to +\infty$, *последовательность* $\{\varphi_n\} \in B_H$, $\varphi_n \to \varphi \in B_H$ *при* $n \to \infty$ *и* $x(t, t_n + \alpha, \varphi_n)$ *суть решения системы* (2.1). *Тогда последовательность* $\{x_t^n = x_{t+t_n}(t_n + \alpha, \varphi_n)\}$ *содержится в некотором компакте* $K_x \subset B_H$, *и если функционал* $f^*(t, \varphi)$ *является предельным к* $f(t, \varphi)$ *относительно последовательности* $t_n \to +\infty$, $x^*(t, \alpha, \varphi)$ *— решение системы* (2.2), *определенное на* $(-\infty, \beta)$, *то последовательность* $\{x^n(t)\} = x(t + t_n, t_n + \alpha, \varphi_n)$ *сходится к* $x^*(t, \alpha, \varphi)$, *а* $x_t^n \to x_t^*$ *равномерно по* $t \in [\alpha, \gamma]$ *для каждого* $\gamma \in (\alpha, \beta)$.

Определение 2.2. Пусть $x = x(t, \alpha, \varphi)$ есть решение уравнения (2.1), определенное для всех $t \geq \alpha$. Положительное предельное множество $\Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$ в пространстве B_H есть множество $\Omega^+ = \{\varphi^* \in B_H : \exists t_n \to +\infty,\, n \to \infty,\, x_{t_n}(\alpha, \varphi) \to \varphi^*$ в допустимом пространстве B при $n \to \infty\}$.

Лемма 2.2 ([4]). *Пусть решение системы* (2.1) $x = x(t, \alpha, \varphi)$, *определенно и ограничено для всех* $t \geq \alpha$. *Тогда положительное предельное множество этого решения полуинвариантно относительно семейства предельных уравнений* (2.2), *т. е. для каждого элемента* $\varphi^* \in \Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$ *существует предельное уравнение* $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$ *такое, что для решения этого уравнения* $x^*(t, 0, \varphi^*)$ *выполняется соотношение* $\{x_t^*(0, \varphi^*) : t \in R^+\} \subset \Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$.

3. Исследование устойчивости методом знакопостоянных функционалов Ляпунова

В этом разделе проводится исследование задачи об устойчивости решений уравнения (2.1) с помощью знакопостоянного функционала Ляпунова со знакопостоянной производной, используя предельные уравнения и предельные функционалы. Результаты данного раздела обобщают и развивают результаты работ [5]–[7].

Допустим, что $f(t, 0) \equiv 0$ и, следовательно, (2.1) имеет нулевое решение $x = 0$.

Определение 3.1. Решение $x = 0$ уравнения (2.1) называется устойчивым в R^n (в B), если для произвольного $\alpha \in R^+, \varepsilon > 0$ имеется $\delta = \delta(\varepsilon, \alpha) > 0$ такое, что из неравенства $\|\varphi\|_B \leq \delta$ следует $|x(t, \alpha, \varphi)| < \varepsilon$ ($\|x_t(\alpha, \varphi)\|_B < \varepsilon$) для всех $t \geq \alpha$. Если число δ не зависит от α, то решение $x = 0$ равномерно устойчиво.

Определение 3.2. Точка $x = 0$ является точкой притяжения решений уравнения (2.1) в R^n (в B), если для произвольного $\alpha \in R^+$ найдется $\eta = \eta(\alpha) > 0$ такое, что из неравенства $\|\varphi\|_B \leq \eta$ следует $x(t, \alpha, \varphi) \to 0$ ($\|x_t(\alpha, \varphi)\|_B \to 0$) при $t \to +\infty$.

Определение 3.3. Решение уравнения (2.1) $x = 0$ асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и является точкой притяжения (в R^n или B).

Очевидно, при ограниченном запаздывании определения устойчивости по отношениям к нормам в R^n и в фазовом пространстве эквивалентны.

Лемма 3.1 ([8]). *Для допустимого пространства* B *определения* 3.1–3.3 *устойчивости в* R^n *и* B *эквивалентны.*

Функционалом Ляпунова назовем скалярную непрерывную функцию $V : R^+ \times B_H \to R$. Обозначим через $\omega_i(u)$ непрерывные, строго монотонно возрастающие функции $\omega_i : R^+ \to R^+$, $\omega(0) = 0$.

Пусть $x = x(t, \alpha, \varphi)$ — некоторое решение (2.1), определенное для всех $t \geq \alpha$. Вдоль этого решения функционал V представляет собой непрерывную функцию времени $V(t) =$

$V(t, x_t(\alpha, \varphi))$. Для этой функции определим верхнюю правостороннюю производную

$$\frac{dV}{dt} = \overline{\lim_{\triangle t \to 0^+}} \frac{V(t + \triangle t) - V(t)}{\triangle t}.$$

Функционал $V(t, \varphi)$ называется определенно-положительным, если $V(t, 0) \equiv 0$ и при некотором H_0, $0 < H_0 < H$, найдется функция $\omega_1(u)$ такая, что для всех $\varphi \in \{\|\varphi\|_B \leq H_0\}$ справедливо неравенство

$$V(t, \varphi) \geq \omega_1(|\varphi(0)|).$$

Если $V(t, \varphi) \geq 0 \ \ \forall (t, \varphi) \in R^+ \times \overline{B}_{H_0}$, $V(t, 0) \equiv 0$, то V называется постоянно-положительным.

Определение 3.4. Пусть $t_n \to +\infty$ есть некоторая последовательность. Для каждого $t \in R$ и $c \in R$ определим множество $V_\infty^{-1}(t, c) \subset B_H$ следующим образом: точка $\varphi \in V_\infty^{-1}(t, c)$, если существует последовательность $\{\varphi_n \in B_H, \varphi_n \to \varphi\}$ такая, что

$$\lim_{n \to +\infty} V(t + t_n, \varphi_n) = c.$$

Допустим, что для производной $\dot{V}$ имеет место следующая оценка:

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0 \ \ \forall (t, \varphi) \in R \times B_H;$$

непрерывная ограниченная функция $W = W(t, \varphi)$ удовлетворяет предположению типа 2.1. Как и в случае $f(t, \varphi)$, при таком условии семейство сдвигов $\{W_\tau(t, \varphi), \tau \in R^+\}$ предкомпактно в пространстве непрерывных функций, определенных на $R^+ \times B_H$.

Определение 3.5. Функция W^* называется предельной к W, если существует последовательность $t_n \to +\infty$ такая, что $\{W^{(n)}(t, \varphi) = W(t_n + t, \varphi)\}$ сходится к $W^*(t, \varphi)$ в пространстве непрерывных функций, определенных на $R^+ \times B_H$. При этом множество $V_\infty^{-1}(t, c)$, определяемое той же последовательностью $t_n \to +\infty$, определим как соответствующее W^*.

Докажем теорему о локализации положительного предельного множества.

Теорема 3.1. *Пусть*

1) $V(t, \varphi) : R^+ \times B_H \to R$ *есть непрерывный функционал, ограниченный снизу на каждом компакте* $K \subset B_H$:

$$V(t, \varphi) \geq m(K) \ \ \forall (t, \varphi) \in R^+ \times K,$$

его производная

$$\frac{dV}{dt} \leq -W(t, \varphi) \leq 0 \ \ \forall (t, \varphi) \in R^+ \times B_H;$$

2) $x = x(t, \alpha, \varphi)$ — *решение* (2.1) *такое, что* $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq \tau < H$ *для всех* $t \geq \alpha$.

Тогда имеется $c = c_0 \geq m$, *при котором для каждой предельной точки* $\varphi^* \in \Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$ *существуют предельная совокупность* (f^*, W^*) *с* $V_\infty^{-1}(t, c)$ *и решение* $x^*(t, 0, \varphi^*)$ *уравнения* $\dot{x} = f^*(t, x_t)$ *такие, что множество* $\{x_t^*(0, \varphi^*) : t \in R^+\} \subset \Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$ *и* $\{x_t^*(0, \varphi^*) : t \in R^+\} \subset \{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 = \mathrm{const}\} \bigcap \{W^*(t, \varphi) = 0\}$.

Доказательство. Пусть $\varphi^* \in \Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$. По определению это означает, что существует последовательность $t_n \to +\infty$ такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_{t_n}(\alpha, \varphi) = \varphi^*$.

Согласно лемме 2.2 для φ^* существует предельное уравнение $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$ такое, что для решения этого уравнения $x^*(t, 0, \varphi^*)$ выполняется соотношение $\{x_t^*(0, \varphi^*) : t \in R^+\} \subset \Omega^+(x_t(\alpha, \varphi))$. Считаем, что $f^*(t, \varphi)$ определяется подпоследовательностью $\{t_{nk}\}$ последовательности $\{t_n\}$. По лемме 2.1 последовательность $x_{t+t_{nk}}(\alpha, \varphi)$ сходится к $x^*(t, 0, \varphi^*)$ равномерно на каждом отрезке $[0, T]$.

В силу леммы 2.1 $\{x_t(\alpha,\varphi),\ t \geq \alpha\} \subset K$, где K — компакт из B_H. Следовательно, учитывая условия, наложенные на функцию W, мы можем найти подпоследовательность (примем, что она совпадает с последовательностью $\{t_{nk}\}$, определяющую f^*) $t_{nk} \to +\infty$, которая определяет $W^*(t,\varphi)$.

В силу условий теоремы функционал $V(t) = V(t,x_t)$ определен для всех $t \geq \alpha$ и является монотонно убывающим и ограниченным снизу, а значит, $\exists\, c_0 = \mathrm{const}$ такая, что $\lim\limits_{t_{nk}\to+\infty} V(t_{nk}+t) = c_0$.

Из оценки для производной $\dot V$ имеем

$$V(t_{nk}+t) - V(t_{nk}) \leq -\int_{t_{nk}}^{t_{nk}+t} W(s, x_s(\alpha,\varphi))\,ds = -\int_0^t W(s+t_{nk}, x_{t_{nk}+s})\,ds \leq 0.$$

Переходим к пределу при $nk \to \infty$ и получаем, что $\{x_t^*(0,\varphi^*) : t \in R^+\} \subset \{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 = \mathrm{const})\} \bigcap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$. □

Перейдем к исследованию устойчивости на основе знакопостоянного функционала Ляпунова. Для этого введем следующие определения.

Определение 3.6. Решение $x = 0$ называется точкой равномерного притяжения решений всего семейства предельных уравнений $\{\dot x(t) = f^*(t,x_t)\}$ относительно множества $\Lambda \subset B_H$, если существует $\triangle$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $T = T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого решения $x^*(t,\alpha,\varphi)$, $\alpha \geq 0$, $\varphi \in \Lambda \bigcap \{\|\varphi\|_B < \triangle\}$, любого уравнения $\dot x(t) = f^*(t,x_t)$ для всех $t \geq \alpha + T$ выполняется неравенство $\|x_t^*(\alpha,\varphi)\|_B < \varepsilon$.

Определение 3.7. Решение $x = 0$ устойчиво относительно множества $\Lambda \subset B_H$ равномерно по $\{\dot x(t) = f^*(t,x_t)\}$ в допустимом пространстве B, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\alpha \in R$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon,\alpha) > 0$ такое, что из $\varphi \in \Lambda \bigcap \{\|\varphi\|_B < \delta\}$ следует $\|x_t^*(\alpha,\varphi)\|_B < \varepsilon$ для каждого решения $x^*(t,\alpha,\varphi)$ любого уравнения $\dot x(t) = f^*(t,x_t)$ при всех $t \geq \alpha$.

Определение 3.8. Решение $x = 0$ называется асимптотически устойчивым относительно множества $\Lambda \subset B_H$ равномерно по $\{\dot x(t) = f^*(t,x_t)\}$ в допустимом пространстве B, если оно устойчиво относительно Λ равномерно по $\{\dot x(t) = f^*(t,x_t)\}$ в допустимом пространстве B, и для каждого $\alpha \in R$ существует $\triangle = \triangle(\alpha)$ такое, что из $\varphi \in \Lambda \bigcap \{\|\varphi\|_B < \triangle\}$ следует, что решение $x^*(t,\alpha,\varphi)$ каждого уравнения (2.2) стремится к нулю при $t \to \infty$.

Теорема 3.2. *Пусть*

1) *существует непрерывный функционал $V : R^+ \times B_H \to R^+$ такой, что*

$$V(t,\varphi) \geq 0, \quad V(t,0) \equiv 0, \quad \dot V(t,\varphi) \leq 0, \quad (t,\varphi) \in R^+ \times B_H;$$

2) *решение $x = 0$ есть точка равномерного притяжения решений $\{\dot x(t) = f^*(t,x_t)\}$ относительно каждого множества $\Lambda_0 = V_\infty^{-1}(0,0)$.*

Тогда решение $x = 0$ уравнения (2.1) устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Предположим, что положение равновесия $x = 0$ уравнения (2.1) неустойчиво. Тогда при некотором $\varepsilon_0 : 0 < \varepsilon_0 < H$ найдется момент $\alpha > 0$ и последовательность $\{\varphi_n : \|\varphi_n\|_B \to 0,\ n \to \infty\}$ такие, что для решений (2.1) $x^n(t) = x(t,\alpha,\varphi_n)$ верно

$$\|x_{t_n}^n(\alpha,\varphi_n)\|_B = \varepsilon_0 \tag{3.1}$$

при некотором $t = t_n$. Из единственности решения (2.1) $x = 0$ следует, что $t_n \to +\infty$.

Пусть $\triangle > 0$ есть число, определяемое условием 2) теоремы. Полагаем $\delta_0 = \frac{1}{2}\min(\varepsilon_0, \triangle)$. Тогда для решений $x^n(t) = x(t, \alpha, \varphi_n)$ найдется последовательность $t_n^{\delta_0} \le t_n$ такая, что

$$\begin{aligned} &\|x_{t_n^{\delta_0}}(\alpha, \varphi_n)\|_B = \delta_0, \\ &\|x_t(\alpha, \varphi_n)\|_B < \delta_0, \quad t \in [\alpha, t_n^{\delta_0}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Очевидно, $t_n^{\delta_0} \to \infty$.

Из условия $V(t, 0) \equiv 0$ следует, что существуют такие числа $\triangle_n \to 0$, для которых $V(\alpha, \varphi_n) \le \triangle_n$. В силу $\dot V(t, \varphi) \le 0$ получаем

$$V(t, x_t^n(\alpha, \varphi_n)) \le \triangle_n, \quad t > \alpha. \tag{3.3}$$

Пусть $\delta_1 = \frac{\delta_0}{2}$; $T = T(\delta_1)$ есть число, определяемое из условия 2) теоремы согласно определению 3.6; $t_n^{\delta_1} = t_n^{\delta_0} - T$.

Из условий, наложенных на функцию $f(t, \varphi)$, следует, что последовательность $\{x^n(t, \alpha, \varphi_n) : t \in [\alpha, \gamma]\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна для любого $\gamma > \alpha$.

Поскольку $\|\varphi_n\|_B \to 0$, мы можем утверждать, что семейство функций $\{x^n_{t_n^{\delta_1}}(\alpha, \varphi_n)\}$ предкомпактно в B_{δ_0}, то существуют подпоследовательность (без ограничения общности примем, что она совпадает с $t_n^{\delta_1}$) и функция φ_{δ_1} такие, что $x^n_{t_n^{\delta_1}} \to \varphi_{\delta_1}$, где $\|\varphi_{\delta_1}\|_B \le \delta_0$. При этом в силу (3.3) и условия для производной V имеем $V(t_n^{\delta_1}, x^n_{t_n^{\delta_1}}(\alpha, \varphi_n)) \to 0$ при $n \to \infty$ и, значит, $\varphi_{\delta_1} \in V_\infty^{-1}(0, 0)$.

Из (3.2) следует

$$\begin{aligned} \|x_{t_n^{\delta_1}+T}(t_n^{\delta_1}, x_{t_n^{\delta_1}}(\alpha, \varphi_n))\|_B = \delta_0, \\ \|x_{t_n^{\delta_1}}(t_n^{\delta_1}, x_{t_n^{\delta_1}}(\alpha, \varphi_n))\|_B < \delta_0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Кроме того, существует подпоследовательность (без ограничения общности примем, что она совпадает с $t_n^{\delta_1}$) такая, что $f(t + t_n^{\delta_1}, \varphi) \to f^*_{\delta_1}(t, \varphi)$. Согласно лемме 2.1 $x^n(t + t_n^{\delta_1}, \alpha, \varphi_n) \to x^*(t, 0, \varphi_{\delta_1})$, где $x^*(t, 0, \varphi_{\delta_1})$ есть решение уравнения $\dot x(t) = f^*_{\delta_1}(t, x_t)$. Но тогда по определению числа T имеем $|x^*(t, 0, \varphi_{\delta_1})| \le \delta_1$ для каждого $t \ge T$. Из соотношения (3.4) предельным переходом получаем $\|x^*_T(0, \varphi_{\delta_1})\|_B = \delta_0 = 2\delta_1$. Противоречие. Таким образом, получаем устойчивость нулевого решения (2.1). □

Аналогично предыдущей теореме, с некоторыми изменениями, доказывается следующая теорема об устойчивости.

Теорема 3.3. *Пусть*

1) *существует непрерывный функционал* $V : R^+ \times B_H \to R^+$ *такой, что*

$$V(t, \varphi) \ge 0, \quad V(t, 0) \equiv 0, \quad \dot V(t, \varphi) \le 0, \quad (t, \varphi) \in R^+ \times B_H;$$

2) *решение* $x = 0$ *асимптотически устойчиво относительно каждого множества* $\Lambda_0 = V_\infty^{-1}(0, 0)$ *равномерно по* $\{\dot x(t) = f^*(t, x_t)\}$.

Тогда решение $x = 0$ *уравнения* (2.1) *устойчиво по Ляпунову.*

Допустим теперь, что для производной $\dot V$ имеет место оценка

$$\dot V(t, \varphi) \le -W(t, \varphi) \le 0 \quad \forall (t, \varphi) \in R \times B_H.$$

Непрерывная функция $W = W(t, \varphi)$ ограничена и равномерно непрерывна на каждом множестве $R^+ \times K$, K – компакт из B_H. Тогда удобна следующая модификация теорем 3.2 и 3.3.

Теорема 3.4. *Предположим, что условие* 2) *в теореме* 3.2 *имеет вид*

1) *решение* $x = 0$ *есть точка равномерного притяжения решений* $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$ *относительно каждого множества* $\Lambda_0 = V_\infty^{-1}(0,0) \bigcap \{W^*(0,\varphi) = 0\}$,

а в теореме 3.3 *имеет вид*

2) *решение* $x = 0$ *асимптотически устойчиво относительно каждого множества* $\Lambda_0 = V_\infty^{-1}(0,0) \bigcap \{W^*(0,\varphi) = 0\}$ *равномерно по* $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$.

Тогда заключения теоремы 3.2 *и* 3.3 *остаются верными.*

Докажем теперь теорему об асимптотической устойчивости нулевого решения (2.1) на основе знакопостоянного функционала Ляпунова со знакопостоянной производной.

Теорема 3.5. *Пусть*

1) *существует непрерывный функционал* $V : R^+ \times B_H \to R^+$ *такой, что*

$$V(t,\varphi) \geq 0, \quad V(t,0) \equiv 0,$$
$$\dot{V}_{(2.1)}(t,\varphi) \leq -W(t,\varphi) \leq 0, \quad (t,\varphi) \in R^+ \times B_H;$$

2) *решение* $x = 0$ *асимптотически устойчиво относительно каждого множества* $\Lambda_0 = V_\infty^{-1}(0,0) \bigcap \{W^*(0,\varphi) = 0\}$ *равномерно по* $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$;
3) *для каждой предельной совокупности* (f^*, W^*) *и каждого* $c_0 \geq 0$ *множество* $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 \geq 0\} \bigcap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$ *содержит из решений предельного уравнения* $\dot{x} = f^*(t, x_t)$ *только те, которые одновременно содержатся в множестве* $\{V_\infty^{-1}(0,0)\} \bigcap$
$\{W^*(0,\varphi) = 0\}$.

Тогда решение $x = 0$ *системы* (2.1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Из условий 1), 2) теоремы и теоремы 3.4 получаем устойчивость нулевого решения системы (2.1). Следовательно, все решения системы (2.1) $x(t,\alpha,\varphi)$, $\varphi \in B_\delta$ ограничены для некоторого $\delta = \delta(\alpha) > 0$. Тогда по теореме 3.1 имеется $c = c_0 \geq 0$, при котором для каждой предельной точки $\varphi^* \in \Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$, $\varphi \in B_\delta$, существуют предельная совокупность (f^*, W^*) с $V_\infty^{-1}(t,c)$ и решение $x^*(t,0,\varphi^*)$ уравнения $\dot{x} = f^*(t,x_t)$ такие, что справедливы включения $\{x_t^*(0,\varphi^*) : t \in R^+\} \subset \Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ и $\{x_t^*(0,\varphi^*) : t \in R^+\} \subset \{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 = \text{const})\} \bigcap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$. Из условий 2) и 3) теоремы несложно показать, что $x(t,\alpha,\varphi) \to 0$ при $t \to +\infty$. □

Пример 3.1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \int_{-\infty}^{0} x_1(t+s) f(t,s) ds - a(t)x_1(t) - x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) &= d(t)x_1(t)x_2(t) - x_2(t), \\ (t+1)\dot{x}_3(t) &= -b(t)x_3(t) + x_1(t). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Пусть функции $a(t)$ и $d(t)$ ограничены и равномерно непрерывны при $t \in R^+$, функция $b(t)$ ограничена сверху и $b(t) \geq 1/2$, $a(t) \geq a_0 = \text{const} > 0$.

Допустим, что функция $f(t,s)$ является равномерно непрерывной функцией по t и выполняются условия

$$0 \le f(t,s) < f_1(s), \quad s \in (-\infty, 0], \quad \int_{-\infty}^{0} f_1(s)ds = f_0 = \mathrm{const},$$
$$a_0 > f_0,$$
$$\sup_{s \le 0} \frac{f_1(s-T)}{f_1(s)} \le L(T)$$

для некоторой непрерывной функции $L : (0,\infty) \to (0,\infty)$, для которой $\lim\limits_{T\to\infty} L(T) = 0$.

Таким условиям, например, удовлетворяют функции $f(t,s) = e^{(t+1)s}$, $f(t,s) = e^{s}\cos^2 t$. В качестве допустимого пространства B возьмем $M^h_{p_1}$.

Предельная система будет иметь вид

$$\begin{gathered}\dot{x}_1(t) = \int_{-\infty}^{0} x_1(t+s) f^*(t,s)ds - a^*(t)x_1(t) - x_3(t),\\ \dot{x}_2(t) = d^*(t)x_1(t)x_2(t) - x_2(t),\\ \dot{x}_3(t) = 0.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Функционал Ляпунова возьмем в виде

$$V(t,\varphi_1,\varphi_2) = \varphi_1^2(0) + (t+1)\varphi_3^2(0) + \int_{-\infty}^{0} f_1(s)ds \int_{s}^{0} \varphi_1^2(u)du.$$

Здесь $\varphi_i(s) = x_i(t+s)$, $s \in (-\infty, 0]$. Такой функционал является знакопостоянным и для его производной $\dot{V}(t,\varphi_1,\varphi_3)$ находим оценку

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,\varphi_1,\varphi_3) &= 2\varphi_1(0)\int_{-\infty}^{0} \varphi_1(s) f(t,s)ds -\\ &- 2a(t)\varphi_1^2(0) - 2\varphi_1(0)\varphi_3(0) - 2b(t)\varphi_3^2(0) + 2\varphi_1(0)\varphi_3(0) + \varphi_3^2(0) +\\ &+ f_0\varphi_1^2(0) - \int_{-\infty}^{0} f_1(s)\varphi_1^2(s)ds \le \int_{-\infty}^{0} f_1(s)(\varphi_1^2(0) + \varphi_1^2(s))ds - 2a(t)\varphi_1^2(0) +\\ &+ f_0\varphi_1^2(0) - \int_{-\infty}^{0} f_1(s)\varphi_1^2(s)ds \le -2(a_0 - f_0)\varphi_1^2(0) \le 0.\end{aligned}$$

Множество $V_\infty^{-1}(0,0)$ равно $\{\varphi_1(0) = 0, \varphi_3(0) = 0\}$, если $W(t,\varphi) = (a_0 - f_0)\varphi_1^2(0)$, то $\{W^*(t,\varphi) = 0\} \equiv \{\varphi_1(0) = 0\}$. Следовательно,

$$\Lambda_0 = V_\infty^{-1}(0,0) \bigcap \{W^*(0,\varphi) = 0\} = \{\varphi_1(0) = 0, \varphi_3(0) = 0\}.$$

На множестве Λ_0 предельная система (3.6) принимает вид $\dot{x}_2(t) = -x_2(t)$.

Очевидно, решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ предельной системы (3.6) асимптотически устойчиво относительно Λ_0 и, следовательно, по теореме 3.4 решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ исходной системы (3.5) устойчиво.

Рассмотрим множество

$$\begin{aligned}&\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 \ge 0\} =\\ &\qquad = \Big\{\varphi_3(0) = 0, \quad \varphi_1 : \varphi_1^2(0) + \int_{-\infty}^{0} f_1(s)ds \int_{s}^{0} \varphi_1^2(u)du = \mathrm{const} = c_0 \ge 0\Big\}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\{V_{\infty}^{-1}(t,c) : c = c_0 \geq 0\} \bigcap \{W^*(t,\varphi) = 0\} \equiv$$
$$\equiv \{\varphi_3(0) = 0, \varphi_1(0) = 0\} \subset V_{\infty}^{-1}(0,0) \bigcap \{W^*(0,\varphi) = 0\}.$$

По теореме 3.5 получаем, что решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ исходной системы (3.5) асимптотически устойчиво.

Литература

[1] Hale J.K., Kato J. *Phase space for retarded equations with infinite delay* // Funk. Ekv. – 1978. – V. 21. – P. 11–41.

[2] Haddock J., Terjeki J. *On the location of positive limit sets for autonomous functional differential equations with infinite delay* // J. Different. Equat. – 1990. – V. 86. – P. 1–32.

[3] Kato J., Yoshizawa T. *Remarks on global properties in limiting equations* // Funk. Ekv. – 1981. – V. 24. – P. 363–371.

[4] Седова Н.О. *К методу Ляпунова–Разумихина для уравнений с бесконечным запаздыванием* // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38. – № 10. – С. 1338–1347.

[5] Андреев А.С., Павликов С.В. *Незнакоопределенные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием* // Механ. тверд. тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 112–118.

[6] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. *К методу функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости и неустойчивости* // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 7. – С. 876–885.

[7] Павликов С.В. *Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием* // Учен. зап. Ульяновск. гос. ун-та. “Фундаментальные проблемы математики и механики”. – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2002. – Вып. 2. – С. 30–39.

[8] Kato J. *Stability problem in functional differential equations with infinite delay* // Funk. Ekv. – 1978. – V. 21. – P. 63–80.

С.В. Павликов

доцент, кафедра математических методов и информационных технологий в экономике,
Камская государственная инженерно-экономическая академия,
423810, г. Набережные Челны, проспект Мира, д. 68/19,

`e-mail:` spavlikov@mail.ru

S.V. Pavlikov

Associate profeccor, Chair of mathematical models and information technologies in economics,
Kama State Engineering-Economics Academy, 68/19 Mira Ave., Naberezhnye Chelny, 423810 Russia,

`e-mail:` spavlikov@mail.ru