И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2001 МАТЕМАТИКА № 1 (464)

УДК 517.948

В.Г. ЗВЯГИН, В.Т. ДМИТРИЕНКО, З. КУХАРСКИ

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМОВЫХ УРАВНЕНИЙ С f-КОМПАКТНО СУЖАЕМЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Введение

В [1], [2] для фредгольмовых отображений банаховых многообразий вводится понятие степени. В [3]–[5] это понятие распространяется на вполне непрерывные и f-компактно сужаемые возмущения фредгольмовых отображений. Методы теории степени используются в приложениях для доказательства разрешимости соответствующих операторных уравнений. Однако в теории дифференциальных уравнений имеется ряд задач, в которых "главная часть" фредгольмова не всюду, а лишь на каком-то множестве, содержащем решения этого уравнения. В качестве примера отметим задачу Монжа–Ампера из геометрии поверхностей. К такого рода уравнениям теория степени, развитая в [1]–[5], формально не применима, требуется ее модификация. Для вполне непрерывных возмущений фредгольмовых отображений эта модификация сделана в [6]. Индекс множества решений, построенный в [6], позволил исследовать, в частности, и задачу Монжа–Ампера [7].

В данной работе вводится и исследуется $\operatorname{ind}_2(f-g, X, 0)$ — топологический инвариант множества решений уравнения $f(u)-g(u)=0$, $u \in X$, где X — открытое подмножество вещественного банахова пространства E, $f : X \to F$ — C^r-гладкое отображение X в вещественное банахово пространство F, $r \geq 1$, фредгольмово на множестве решений этого уравнения, а $g : X \to F$ — f-компактно сужаемое возмущение отображения f.

1. Определение и свойства индекса множества решений фредгольмовых уравнений с f-компактно сужаемым возмущением

Пусть E, F — вещественные банаховы пространства, X — открытое подмножество пространства E, $f : X \to F$ — C^r-гладкое отображение, $r \geq 1$.

Вначале напомним определения ряда известных понятий [3].

Определение 1.1. Отображение $f : X \to F$ называется фредгольмовым индекса n (кратко $\Phi_n C^r$-отображением) на множестве $M \subset X$, если в каждой точке $u \in M$ производная Фреше $f'(u)$ является линейным фредгольмовым оператором индекса n, т. е. $\dim \operatorname{Ker} f'(u) < \infty$, $\dim \operatorname{Coker} f'(u) < \infty$ и $n = \dim \operatorname{Ker} f'(u) - \dim \operatorname{Coker} f'(u)$.

Определение 1.2. Пусть S — замкнутое в E подмножество X. Говорят, что сужение $\overline{f} = f|_S : S \to F$ — собственное отображение на S, если $f^{-1}(K) \cap S$ является компактом для любого компакта $K \subseteq F$.

Определение 1.3. Отображение f называется локально собственным на множестве $S \subseteq X$, если каждая точка $u \in S$ имеет открытую окрестность V такую, что сужение $f|_{\overline{V}}$ — собственное отображение.

Пусть теперь $g : X \to F$ — другое отображение. По поводу двух следующих определений см. [5].

Определение 1.4. Непустое, выпуклое, замкнутое множество $T \subseteq F$ называется фундаментальным множеством пары $\{f, g\}$, если

1) $g(f^{-1}(T)) \subseteq T$;
2) из включения $f(u) \in \mathrm{co}(g(u) \cup T)$ при $u \in X$ следует $f(u) \in T$,

где символ $\mathrm{co}(M)$ обозначает выпуклую оболочку множества M.

Определение 1.5. Отображение $g : X \to F$ называется f-компактно сужаемым, если из того, что множество $Q = \{u \in X;\ f(u) = g(u)\}$ непусто, следует, что существует фундаментальное множество T пары $\{f, g\}$, для которого сужение $g|_{f^{-1}(T)} : f^{-1}(T) \to F$ является вполне непрерывным отображением.

Это понятие обобщает понятие компактно сужаемого отображения, рассматриваемого в [8].

Рассмотрим уравнение

$$f(u) - g(u) = 0, \quad u \in X. \tag{1.1}$$

Обозначим через $Q \subseteq X$ множество решений уравнения (1.1), т. е. $Q = (f - g)^{-1}(0)$.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия.

Условие 1.1. Множество Q является компактом.

Условие 1.2. Отображение f является $\Phi_n C^r$-отображением на множестве Q, где $n \geq 0$, $r > n + 1$.

Условие 1.3. Существует открытая окрестность U компакта Q такая, что $g|_{\overline{U}}$ является f-компактно сужаемым отображением.

При этих условиях ниже определяется $\mathrm{ind}_2(f - g, X, 0)$ — индекс множества решений уравнения (1.1), принимающий значения в кольце неориентированных бордизмов Рохлина–Тома.

Пусть вначале множество решений уравнения (1.1) пусто, т. е. $Q = \emptyset$. Тогда полагаем по определению $\mathrm{ind}_2(f - g, X, 0)$ равным нулевому элементу кольца Рохлина–Тома.

Пусть теперь $Q \neq \emptyset$. Тогда найдется открытая ограниченная окрестность U множества Q такая, что сужение $f|_U$ является $\Phi_n C^r$-отображением. Действительно, из того, что множество линейных фредгольмовых операторов индекса n открыто в $L(E, F)$, а отображение $u \to f'(u)$ непрерывно, следует, что каждая точка $u \in Q$ имеет окрестность O_u такую, что $f'(v) \in \Phi_n(E, F)$ для $v \in O_u$. Здесь $\Phi_n(E, F)$ обозначает множество линейных фредгольмовых операторов индекса n, действующих из E в F. Выберем из покрытия $\{O_u, u \in Q\}$ конечное подпокрытие $O_{u_1}, \ldots, O_{u_m}$. Положим $U = \cup_{i=1}^m O_{u_i}$.

Так как $\Phi_n C^r$-отображение является локально собственным [1] и Q — компакт, то уменьшая в случае необходимости U, можно считать, что на замыкании $\overline{U}$ сужение $\overline{f} = f|_{\overline{U}} : \overline{U} \to F$ является собственным отображением. Кроме того, в силу условия 1.3 можно считать (переходя в случае необходимости к меньшей окрестности множества Q), что отображение $\overline{g} = g|_{\overline{U}} : \overline{U} \to F$ является $\overline{f}$-компактно сужаемым. Тогда существует фундаментальное множество T пары $\{\overline{f}, \overline{g}\}$. Обозначим через $\rho : F \to \overline{\mathrm{co}}[\overline{g}(\overline{f}^{-1}(T))]$ ретракцию пространства F на замкнутый выпуклый компакт $\overline{\mathrm{co}}[\overline{g}(\overline{f}^{-1}(T))]$. Такая ретракция существует согласно теореме Дугунжи.

Отображение $k = \rho \circ \overline{g} : \overline{U} \to F$ является вполне непрерывным. Убедимся, что имеет место равенство

$$Q = \{u \in \overline{U};\ \overline{f}(u) - k(u) = 0\}. \tag{1.2}$$

Пусть $u \in Q$. Тогда $f(u) = g(u) \in T$ и $u \in \overline{U}$. Следовательно, $g(u) \in \overline{g}(\overline{f}^{-1}(T))$ и $\rho \circ \overline{g}(u) = k(u)$, т. е. $u \in (\overline{f} - k)^{-1}(0)$. Обратно, пусть $u \in \overline{U}$ и $\overline{f}(u) = k(u) \in \overline{\mathrm{co}}[\overline{g}(\overline{f}^{-1}(T))] \subseteq T$. Следовательно, $u \in \overline{f}^{-1}(T)$ и $\overline{g}(u) \in \overline{g}(\overline{f}^{-1}(T)) \subseteq \overline{\mathrm{co}}[\overline{g}(\overline{f}^{-1}(T))]$. Таким образом, $\overline{g}(u) = \rho \circ \overline{g}(u)$ и $u \in Q = (f - g)^{-1}(0)$. Равенство (1.2) установлено.

Таким образом, для отображения $\overline{f}-k:\overline{U}\to F$ выполнены следующие условия: $\overline{f}$ является собственным отображением, сужение $\overline{f}$ на открытое множество U является Φ_nC^r-отображением с $n\geq 0$, $r>n+1$, отображение k является вполне непрерывным и $\overline{f}(u)-k(u)\neq 0$ для $u\in\partial U$ (поскольку $Q=(f-g)^{-1}(0)$ содержится в U). При этих условиях для отображения $\overline{f}-k$ в [4] определена неориентированная степень $\deg_2(\overline{f}-k,\overline{U},0)$ относительно точки 0 со значениями в кольце неориентированных бордизмов Рохлина–Тома.

Определение 1.6. В случае $Q\neq\emptyset$ определим $\operatorname{ind}_2(f-g,X,0)$ — индекс множества решений уравнения (1.1) равенством

$$\operatorname{ind}_2(f-g,X,0)=\deg_2(\overline{f}-k,\overline{U},0),$$

где $k=\rho\overline{g}$.

Покажем, что данное определение не зависит от выбора окрестности U компакта Q, фундаментального множества T пары $\{\overline{f},\overline{g}\}$ и ретракции ρ (в случае, когда $Q\neq\emptyset$). Зафиксируем вначале открытую ограниченную окрестность U, используемую для определения $\operatorname{ind}_2(f-g,X,0)$, и покажем, что в этом случае значение $\operatorname{ind}_2(f-g,X,0)$ не зависит от выбора фундаментального множества T пары $\{\overline{f},\overline{g}\}$ и ретракции ρ. Для этого рассмотрим T_0 — пересечение всех фундаментальных множеств пары $\{\overline{f},\overline{g}\}$. Очевидно, что T_0 — также фундаментальное множество пары $\{\overline{f},\overline{g}\}$. Пусть T — произвольное фундаментальное множество пары $\{\overline{f},\overline{g}\}$ и ρ_0, ρ — ретракции пространства F соответственно на выпуклые компакты $\overline{\operatorname{co}}\big[\overline{g}(\overline{f}^{-1}(T_0))\big]$ и $\overline{\operatorname{co}}\big[\overline{g}(\overline{f}^{-1}(T))\big]$.

Рассмотрим гомотопию

$$\Phi(u,t)=f(u)-\big[t\rho_0(\overline{g}(u))+(1-t)\rho(\overline{g}(u))\big],$$

где $u\in\overline{U}$ и $t\in[0,1]$.

Пусть $(u_0,t_0)\in\overline{U}\times[0,1]$ — такая точка, что $\Phi(u_0,t_0)=0$. Тогда $f(u_0)\in\overline{\operatorname{co}}\big[\overline{g}(\overline{f}^{-1}(T))\big]\subseteq T, u_0\in\overline{U}$ и, следовательно, $\overline{g}(u_0)\in\overline{g}(\overline{f}^{-1}(T))$. Поэтому $\rho(\overline{g}(u_0))=\overline{g}(u_0)$ и $\overline{f}(u_0)\in\operatorname{co}\big[\overline{g}(u_0)\cup T_0\big]$, $u_0\in\overline{U}$. Из фундаментальности T_0 для пары $\{\overline{f},\overline{g}\}$ следует, что $\overline{f}(u_0)\in T_0$, откуда в свою очередь следует $\overline{g}(u_0)\in\overline{g}(\overline{f}^{-1}(T_0))$ и $\rho(\overline{g}(u_0))=\overline{g}(u_0)$. Таким образом, равенство $\Phi(u_0,t_0)=0$ означает, что $f(u_0)-g(u_0)=0$ и, следовательно, $u_0\in Q$.

Таким образом, если $u\in\partial U, t\in[0,1]$, то $\Phi(u,t)\neq 0$. Из свойств гомотопической инвариантности степени $\deg_2(\overline{f}-k,\overline{U},0)$ следует $\deg_2(\Phi(\cdot,0),\overline{U},0)=\deg_2(\Phi(\cdot,1),\overline{U},0)$, что и означает независимость $\operatorname{ind}_2(f-g,X,0)$ от выбора фундаментального множества T и ретракции ρ при фиксированной окрестности U множества Q.

Пусть теперь U_1 и U_2 — две открытые ограниченные окрестности компакта Q. Обозначим через T_i фундаментальное множество пары $\{f_i,g_i\}$, где $f_i=f|_{\overline{U}_i}$, $g_i=g|_{\overline{U}_i}$, и пусть $\rho_i:F\to\overline{\operatorname{co}}\big[g_i(f_i^{-1}(T_i))\big]$, $i=1,2,$ — ретракция.

Проверим, что $\deg_2(f-\rho_1g_1,\overline{U}_1,0)=\deg_2(f-\rho_2g_2,\overline{U}_2,0)$. Для этого заметим, что $\deg_2(f-\rho_ig_i,\overline{U}_i,0)=\deg_2(f-\rho_ig_i,\overline{U}_1\cap\overline{U}_2,0)$, $i=1,2$.

Положим $\overline{f}=f|_{\overline{U}_1\cap\overline{U}_2}$, $\overline{g}=g|_{\overline{U}_1\cap\overline{U}_2}$ и пусть T — какое-нибудь фундаментальное множество пары $\{\overline{f},\overline{g}\}$, а $\rho:F\to\operatorname{co}\big[\overline{g}(\overline{f}^{-1}(T))\big]$ — ретракция. Как и выше, при доказательстве независимости $\operatorname{ind}_2(f-g,X,0)$ от выбора фундаментального множества T и ретракции ρ при фиксированной окрестности U, в нашем случае $U=U_1\cap U_2$ имеем $\deg_2(f-\rho_ig_i,\overline{U}_1\cap\overline{U}_2,0)=\deg_2(f-\rho\overline{g},\overline{U}_1\cap\overline{U}_2,0)$, $i=1,2$. Таким образом, $\deg_2(f-\rho_1g_1,\overline{U}_1\cap\overline{U}_2,0)=\deg_2(f-\rho_2g_2,\overline{U}_1\cap\overline{U}_2,0)$, что и означает независимость определения $\operatorname{ind}_2(f-g,X,0)$ от выбора окрестности U. Это завершает доказательство корректности определения индекса множества решений уравнения (1.1).

Следующие два свойства индекса $\operatorname{ind}_2(f-g,X,0)$ являются основными для приложений.

Свойство 1.1. Если индекс $\operatorname{ind}_2(f-g,X,0)$ определен и отличен от нуля, то уравнение (1.1) имеет решение в X.

Справедливость этого свойства следует из определения $\mathrm{ind}_2(f-g,X,0)$ и справедливости соответствующего свойства для степени $\deg_2(f-\rho g,\overline{U},0)$.

Для формулировки второго свойства рассмотрим отображение $\Phi(u,t)=f(u,t)-g(u,t)$, $u\in X$, $t\in[0,1]$, где $f:X\times[0,1]\to F$ является C^r-гладким отображением, а $g:X\times[0,1]\to F$ является непрерывным отображением. Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

i) $\Phi^{-1}(0)=\{(u,t)\in X\times[0,1],\ \Phi(u,t)=0\}$ есть компакт;

ii) f является $\Phi_{n+1}C^r$-отображением на множестве $\Phi^{-1}(0)$, $r>n+1$, $n\geq 0$;

iii) g является f-компактно сужаемым на некоторой окрестности множества $\Phi^{-1}(0)$.

В этой ситуации справедливо

Свойство 1.2. Пусть $\Phi^{-1}(0)\subseteq X\times[0,1]$ и выполнены условия i)–iii). Тогда

$$\mathrm{ind}_2(f_0-g_0,X,0)=\mathrm{ind}_2(f_1-g_1,X,0),\tag{1.3}$$

где $f_i(u)=f(u,i)$, $g_i(u)=g(u,i)$, $i=0,1$, $u\in X$.

Доказательство. Если $\Phi^{-1}(0)=\emptyset$, то как $\mathrm{ind}_2(f_0-g_0,X,0)$, так и $\mathrm{ind}_2(f_1-g_1,X,0)$ равны нулю. Пусть $\Phi^{-1}(0)\neq\emptyset$. Тогда существует открытая, ограниченная окрестность $U\subseteq X\times[0,1]$ компакта $\Phi^{-1}(0)$ такая, что $f|_U$ является $\Phi_{n+1}C^r$-отображением, $f|_{\overline{U}}$ — собственное отображение, а $\overline{g}=g|_{\overline{U}}$ является $\overline{f}$-компактно сужаемым отображением. Существование такой окрестности доказывается так же, как и в определении индекса множества решений. Пусть $T\subseteq F$ — фундаментальное множество пары $\{\overline{f},\overline{g}\}$ и $\rho:F\to\overline{\mathrm{co}}[g(f^{-1}(T))]$ — ретракция. Тогда гомотопия $\widetilde{\Phi}(u,t)=\overline{f}(u,t)-\rho\overline{g}(u,t)$, $(u,t)\in\overline{U}$, обладает свойством $\widetilde{\Phi}(u,t)\neq 0$, $u\in\partial U_t$, где $U_t=U\cap(X\times\{t\})$. Это следует из того, что $\widetilde{\Phi}^{-1}(0)=\Phi^{-1}(0)$.

Согласно свойству гомотопической инвариантности неориентированной степени отображений вида "фредгольмово плюс вполне непрерывное" (см. [4])

$$\mathrm{ind}_2(\widetilde{\Phi}(\cdot,0)\overline{U}_0,0)=\ \mathrm{ind}_2(\widetilde{\Phi}(\cdot,1),\overline{U}_1,0),$$

что и означает согласно определению выполнение равенства (1.3). □

2. Локально f-уплотняющие отображения

Одним из наиболее важных примеров f-компактно сужаемых отображений являются f-уплотняющие отображения, введенные в [9]. Приведем необходимые определения.

Определение 2.1. Мерой некомпактности в банаховом пространстве F называется функция ψ, сопоставляющая каждому ограниченному множеству $M\subseteq F$ неотрицательное число $\psi(M)$ так, что выполняются следующие условия.

Условие 2.1. $\psi(\overline{\mathrm{co}}(M))=\psi(M)$, где $\overline{\mathrm{co}}(M)$ — замыкание выпуклой оболочки множества M.

Условие 2.2. Из включения $M_1\subseteq M_2$ следует $\psi(M_1)\leq\psi(M_2)$.

Будем предполагать, что меры некомпактности, используемые далее в статье, удовлетворяют следующим условиям.

Условие 2.3. $\psi(M)=0$ тогда и только тогда, когда M относительно компактно.

Условие 2.4. $\psi(M_1\cup M_2)\leq\max\{\psi(M_1),\psi(M_2)\}$.

Условие 2.5. $\psi(M_1+M_2)\leq\psi(M_1)+\psi(M_2)$.

Таким условиям удовлетворяет, например, мера некомпактности Куратовского $\gamma(M)$:

$$\gamma(M)=\inf\{d>0,\ \text{при которых } M \text{ можно покрыть конечным числом множеств диаметра } d\}.$$

Пусть U — произвольное подмножество банахова пространства E; $f,g:U\to F$ — отображения множества U в банахово пространство F.

Определение 2.2. Отображение $g : U \to F$ называется f-уплотняющим на множестве U по мере некомпактности ψ, если $\psi(g(M)) < \psi(f(M))$ для любого ограниченного множества M из U такого, что $\psi(g(M)) \neq 0$.

В [9] показано, что для любого f-уплотняющего на множестве U отображения $g : U \to F$ существует компактное фундаментальное множество T пары $\{f, g\}$. Таким образом, если f и g непрерывны и отображение g является f-уплотняющим, то оно является также f-компактно сужаемым.

В п. 1 при определении индекса множества решений уравнения (1.1) предполагалось, что g является f-компактно сужаемым на некоторой окрестности $\overline{U}$ компакта $Q = (f-g)^{-1}(0)$. Далее изучим условия, при которых данное предположение выполнено для f-уплотняющих отображений. Во-первых, заметим, что условие компактности Q позволяет оценивать лишь локальную f-уплотняемость g в окрестности каждой точки $q \in Q$. А именно, имеет место

Лемма 2.1. *Пусть для каждой точки q компакта Q существует окрестность, в которой g является f-уплотняющим по мере некомпактности ψ. Тогда отображение g является f-уплотняющим по мере некомпактности ψ в некоторой окрестности U компакта Q.*

Доказательство. Из открытого покрытия $\{U(q)\}_{q\in Q}$ выберем конечное подпокрытие $\{U(q_i)\}$, $i = 1, \dots, n$. Покажем, что $U = \cup_{i=1}^{n} U(q_i)$ — это требуемая окрестность. Пусть $M \subseteq U$. Положим $M_i = M \cap U(q_i)$. Тогда $\psi[g(M)] = \max\limits_{1\le i\le n} \psi[g(M_i)] = \psi[g(M_{i_0})]$. Используя условие f-уплотняемости g на множествах M_i, получим $\psi[g(M_{i_0})] < \psi[f(M_{i_0})]$, если $\psi[g(M_{i_0})] \neq 0$. Из условия монотонности ψ следует, что $\psi[f(M_{i_0})] \le \psi[f(M)]$. Поэтому, если $\psi[g(M)] \neq 0$, то $\psi[g(M)] < \psi[f(M)]$. □

В дальнейшем $B(q, \delta)$ обозначает шар в банаховом пространстве с центром в точке q и радиусом $\delta > 0$.

Определение 2.3. Отображение $g : U \to F$ называется kf-ограниченным по мере некомпактности ψ в точке $q \in U$, если для каждого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\psi[g(M)] \le (k+\epsilon)\psi[f(M)]$ для каждого M из $B(q, \delta)$.

Пусть отображение f дифференцируемо по Фреше в точке $q \in X$ и $f'(q)$ — его производная в этой точке. Тогда имеет место представление

$$f(q+h) = f(q) + f'(q)h + \omega(q, h), \tag{2.1}$$

где $\frac{\|\omega(q,h)\|}{\|h\|} \to 0$ при $\|h\| \to 0$.

Лемма 2.2. *Пусть f — непрерывно дифференцируемое отображение в некоторой окрестности U точки q. Тогда для каждого $\epsilon > 0$ существует шар $B(0, \delta)$ радиуса δ с центром в нуле такой, что ω — липшицево с константой ϵ в шаре $B(0, \delta)$, т. е. $\|\omega(q, h_0) - \omega(q, h_1)\| \le \epsilon \|h_0 - h_1\|$ для $h_0, h_1 \in B(0, \delta)$.*

Утверждение леммы 2.2 непосредственно следует из теоремы о среднем.

Всюду ниже в качестве меры некомпактности будет использоваться мера некомпактности Куратовского $\gamma(M)$.

Следствие 2.1. Пусть f — непрерывно дифференцируемое отображение. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует шар $B(0, \delta)$ такой, что $\gamma[\omega(q, M)] \le \epsilon\gamma[M]$ для любого $M \subseteq B(0, \delta)$.

Утверждение следствия 2.1 следует из леммы 2.2 и определения меры некомпактности Куратовского.

Напомним, что линейный оператор $L : E \to F$ называется Φ_+-оператором, если образ $\operatorname{Im} L$ замкнут и ядро $\operatorname{Ker} L$ есть конечномерное пространство. В [10] показано, что если $L : E \to F$ — Φ_+-оператор, то существует и отлично от нуля число $C_\gamma(L) = \sup\{c : c\gamma[M] \le \gamma[L(M)] \ \forall M \subseteq E\}$. Отметим также, что линейный фредгольмов оператор является Φ_+-оператором.

Лемма 2.3. *Пусть f — непрерывно дифференцируемое отображение и $L : E \to F$ — Φ_+-оператор. Тогда для любой точки q отображение $\omega(q,\cdot)$ является локально $0L$-ограниченным по мере γ в точке q.*

Доказательство. Согласно следствию 2.1 существует шар $B(0,\delta)$ такой, что $\gamma[\omega(q,M)] \leq \epsilon C_\gamma(L)\gamma(M)$ для любого $M \subseteq B(0,\delta)$. Но для любого $M \subseteq B(0,\delta)$ мера некомпактности $\gamma(M) \leq [C_\gamma(L)]^{-1}\gamma[L(M)]$, поэтому $\gamma[\omega(q,M)] \leq \epsilon\gamma[L(M)]$. $\square$

Теорема 2.1. *Пусть f — непрерывно дифференцируемое отображение в открытой окрестности U точки q и $f'(q)$ — Φ_+-оператор. Если отображение g локально $kf'(q)$-ограничено по мере некомпактности γ в точке q, то g локально kf-ограничено по мере некомпактности γ в точке q.*

Доказательство. Для каждого $h \in U - q$ имеет место представление (2.1). Поэтому для любого $M \subseteq U - q$ справедливо включение

$$f'(q)(M) \subseteq f(q+M) - f(q) - \omega(q,M). \tag{2.2}$$

В силу леммы 2.3 для любого $\epsilon \in (0,1)$ существует шар $B(0,\delta)$ такой, что $\gamma[\omega(q,M)] \leq \epsilon\gamma[f'(q)M]$ и $\gamma[g(q+M)] \leq (k+\epsilon)\gamma[f'(q)M]$ для любого $M \subseteq B(0,\delta)$. Из включения (2.2) следует

$$\gamma[f'(q)M] \leq \gamma[f(q+M) - f(q) - \omega(q,M)] \leq \gamma[f(q+M)] + \epsilon\gamma[f'(q)M].$$

Поэтому $\gamma[f'(q)M] \leq (1-\epsilon)^{-1}\gamma[f(q+M)]$ для любого $M \subseteq B(0,\delta)$. Тогда $\gamma[g(q+M)] \leq (k+\epsilon)\gamma[f'(q)M] \leq (1-\epsilon)^{-1}(k+\epsilon)\gamma[f(q+M)]$ для любого $M \subseteq B(0,\delta)$. Так как ϵ можно выбрать сколь угодно малым, то теорема доказана. $\square$

Замечание. Справедливо и обратное утверждение. Если выполнены условия теоремы 2.1 относительно отображения f и g локально kf-ограничено по мере некомпактности γ в точке q, то g является локально $kf'(q)$-ограниченным в этой точке.

Утверждение леммы 2.1 будет неверным, если отбросить условие компактности Q. Это ясно из следующего примера.

Пусть $E = F = l_2$ и $f = \mathrm{Id} : l_2 \to l_2$ — тождественное отображение. Определим $g : l_2 \to l_2$ по формуле $g(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1^3, x_2^3, \dots, x_n^3, \dots)$. Легко видеть, что g не является f-уплотняющим по мере некомпактности Куратовского $\gamma(M)$ на любом множестве, содержащем $B(0,1)$ — единичный шар с центром в нуле. Действительно, $\gamma[B(0,1)] = 2$, в то время как $\gamma[g(B(0,1))] \geq 2$. Однако, как следует из теоремы 2.1, g является f-уплотняющим в достаточно малой окрестности каждой точки, а следовательно, в силу леммы 2.1 и в окрестности любого компакта.

Следствие 2.2. Пусть отображения f и g непрерывно дифференцируемы в открытой окрестности U точки q и $f'(q)$ есть Φ_+-оператор. Если производная $g'(q)$ является $kf'(q)$-ограниченным оператором по мере некомпактности γ, то g является локально kf-ограниченным отображением по мере некомпактности γ в точке q.

Доказательство. В силу теоремы 2.1 достаточно проверить, что g локально $kf'(q)$-ограничено по мере некомпактности γ в точке q. Для любого $h \in U - q$ имеем $f(q+h) = f(q) + f'(q)h + \omega(q,h)$, где $\frac{\|\omega(q,h)\|}{\|h\|} \to 0$ при $\|h\| \to 0$. Тогда справедливо включение

$$g(q+M) \subseteq g(q) + g'(q)M + \omega(M) \tag{2.3}$$

для любого $M \in U - q$. В силу леммы 2.3 для любого $\epsilon > 0$ существует шар $B(0,\delta)$ такой, что $\gamma[\omega(M)] \leq \epsilon\gamma[f'(q)M]$ для любого $M \subseteq B(0,\delta)$. Поэтому из включения (2.3) следует

$$\gamma[g(q+M)] \leq \gamma[g'(q)M] + \gamma[\omega(M)] \leq k\gamma[f'(q)M] + \epsilon\gamma[f'(q)M] = (k+\epsilon)\gamma[f'(q)M]$$

для любого $M \subseteq B(0,\delta)$. Итак, показано, что g локально $kf'(q)$-ограничено по мере γ в точке q. Применяя теорему 2.1, получим утверждение следствия. $\square$

Сформулируем заключительный результат этого параграфа.

Теорема 2.2. *Пусть отображение f непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности компакта Q и $f'(q)$ — фредгольмов оператор для всех $q \in Q$. Пусть отображение g локально $kf'(q)$-ограничено по мере некомпактности γ в каждой точке $q \in Q$ и $k < 1$. Тогда отображение g является f-уплотняющим по мере некомпактности γ в некоторой открытой окрестности U компакта Q.*

Доказательство. Из теоремы 2.1 следует, что g локально kf-ограничено в каждой точке $q \in Q$ по мере некомпактности γ. Так как $k < 1$, то у каждой точки $q \in Q$ существует окрестность $U(q)$, в которой g является f-уплотняющим отображением. Утверждение теоремы 2.2 теперь следует из леммы 2.1. $\square$

Замечание. Утверждения теорем 2.1 и 2.2 справедливы и для меры некомпактности Хаусдорфа.

3. Приложение к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений

Обозначим через $C([0,1],\mathbb{R}^n)$ пространство непрерывных функций, действующих из $[0,1]$ в $\mathbb{R}^n$, с нормой $\|x\|_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|_n$ (где $|\cdot|_n$ — норма вектора в $\mathbb{R}^n$, определяемая формулой $|b|_n = \max\limits_{1\le i\le n} |b_i|$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$). Как обычно, $C^k([0,1],\mathbb{R}^n)$ означает пространство функций, имеющих непрерывные производные до порядка k включительно, с нормой $\|x\|_k = \sum\limits_{j=0}^{k} \|x^{(j)}\|_\infty$. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$a_0\ddot{x}^m(t) + a_1\ddot{x}^{m-1}(t) + \dots + a_m = G(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) \tag{3.1}$$

и исследуем вопрос о существовании решений $x \in C^2([0,1],\mathbb{R}^n)$ этого уравнения, удовлетворяющих граничным условиям

$$x(0) = c_0, \quad x(1) = c_1, \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

Будем предполагать, что $a_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 0, \dots, m$, $a_0 > 0$, и $b \cdot y = (b_1y_1, b_2y_2, \dots, b_ny_n)$ для $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Пусть отображение $G : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывно.

Обозначим через L многочлен, стоящий в левой части уравнения (3.1), и через B — его производный многочлен

$$B(y) = ma_0y^{m-1} + (m-1)a_1y^{m-2} + \dots + 2a_{m-2}y + a_{m-1}.$$

Многочлен B состоит из n координатных многочленов B_j, зависящих лишь от j-й координаты y_j вектора y. Обозначим через $b_j^{l_i}$, $1 \le l_i \le m-1$, вещественные корни многочлена B_j, расположенные в порядке возрастания. Введем множество

$$S_0 = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists j, l,\ 1 \le j \le n,\ 1 \le l \le m-1,\ y_j = b_j^l\}.$$

Пусть $U_\epsilon S_0$ — ϵ-окрестность множества S_0. Тогда множество $\mathbb{R}^n \setminus U_\epsilon S_0$ разбивается на области

$$D_{l_1,l_2,\dots,l_n}(\epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n :\ \forall j :\ 1 \le j \le n :\ b_j^{l_j} + \epsilon \le y_j \le b_j^{l_j+1} - \epsilon\},$$

где l_j изменяется от 0 до $m-1$ и $b_j^0 = -\infty$, $b_j^m = +\infty$ для $j = 1, 2, \dots, n$. Пусть $k_j^i(\epsilon)$ — минимальное значение модуля многочлена B_j, когда $y_j \in [b_j^i + \epsilon, b_j^{i+1} - \epsilon]$:

$$k_j^i(\epsilon) = \min_{y_j \in [b_j^i+\epsilon, b_j^{i+1}-\epsilon]} |B_j(y_j)|, \quad 1 \le j \le n, \quad 0 \le i \le m-1.$$

Теорема 3.1. *Пусть отображения L и G удовлетворяют условиям*

(A) *существует $\epsilon_0 > 0$ такое, что все корни многочлена L не принадлежат $U_\epsilon S_0$ для некоторого $\epsilon > \epsilon_0$; кроме того, степень многочлена L нечетна*;

(B) *для всех* $(t,u,v) \in [0,1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $y \in U_{\epsilon_0}S_0$ *и любого* $\lambda \in (0,1]$

$$|L(y) - \lambda G(t,u,v,y)|_n \neq 0;$$

(C) *на каждом множестве* $D_{l_1,\dots,l_n}(\epsilon_0)$ *для любых фиксированных* $(t,u,v) \in [0,1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ *справедливо неравенство*

$$|G_j(t,u,v,y) - G_j(t,u,v,\widetilde{y})| \le k_j|y-\widetilde{y}|_n$$

для любых $y,\widetilde{y} \in D_{l_1,\dots,l_n}(\epsilon_0)$ *и* $k_j < k_j^{l_j}(\epsilon_0)$, *не зависящих от выбора* (t,u,v);

(D) *для любого* $y \in \mathbb{R}^n$ *существуют положительные* $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ *такие, что*

$$|G(t,u,v,y)|_n \le \alpha + \beta|u|_n^{m-1} + \gamma|v|_n^{m-1}$$

для любых $(t,u,v) \in [0,1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

Тогда краевая задача (3.1)–(3.2) *имеет хотя бы одно решение.*

Доказательство. Для уравнения (3.1) и граничных условий (3.2) определим следующие отображения:

$$\begin{gathered} f : C^2([0,1],\mathbb{R}^n) \to C([0,1],\mathbb{R}^n), \quad (fx)(t) = L(\ddot{x}(t)),\\ g : C^2([0,1],\mathbb{R}^n) \to C([0,1],\mathbb{R}^n), \quad g(x)(t) = G(t,x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t)),\\ l : C^2([0,1],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, \quad l(x) = (x(0),x(1)),\\ c : C([0,1],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, \quad c(x) = (c_0,c_1) = \mathrm{const}. \end{gathered}$$

Тогда краевая задача (3.1), (3.2) эквивалентна операторному уравнению

$$(f,l)(x) - (g,c)(x) = 0. \tag{3.3}$$

Ниже покажем, что в условиях теоремы 3.1 для уравнения (3.3) выполнены условия 1.1–1.3. Следовательно, определен индекс множества решений $\mathrm{ind}((f,l)-(g,c),\Omega,0)$ уравнения (3.3). Для того чтобы вычислить этот индекс, рассмотрим семейство краевых задач:

$$L(\ddot{x}(t)) = \lambda G(t,x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t)), \tag{3.1_λ}$$

$$x(0) = \lambda c_0, \quad x(1) = \lambda c_1. \tag{3.2_λ}$$

Это семейство определяет семейство операторных уравнений

$$(f,l)(x) - \lambda(g,c)(x) = 0. \tag{3.3_λ}$$

Покажем с помощью следующих лемм, что гомотопия (3.3_λ) удовлетворяет всем условиям свойства 1.2 индекса (следовательно, условия 1.1–1.3 для уравнения (3.3) будут выполнены).

Обозначим через $W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$ область в $C^2([0,1],\mathbb{R}^n)$

$$W_{l_1,l_2,\dots,l_n} = \{x \in C^2([0,1],\mathbb{R}^n) : \ddot{x}(t) \in D_{l_1,l_2,\dots,l_n}(\epsilon_0)\ \forall t \in [0,1]\}.$$

Лемма 3.1. *Пусть выполнено условие* (B) *теоремы* 3.1, *тогда объединение областей* $W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$ *содержит все решения семейства уравнений* (3.1_λ), $\lambda \in (0,1]$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. существует решение $x \in C^2([0,1],\mathbb{R}^n)$ уравнения (3.1_λ) такое, что для некоторой точки t_0 $\ddot{x}(t_0) \in U_{\epsilon_0}S_0$. Но в этом случае $L(\ddot{x}(t_0)) = \lambda_0 G(t_0,x(t_0),\dot{x}(t_0),\ddot{x}(t_0))$, что противоречит условию (B). Следовательно, предположение неверно. □

Лемма 3.2. *Отображение* $(f,l) : C^2([0,1],\mathbb{R}^n) \to C([0,1],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ *является* C^1-*гладким, фредгольмовым индекса нуль и собственным на объединении областей* $W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$.

Доказательство. Производная Фреше отображения (f,l) в точке $x \in W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$ имеет вид

$$[D(f,l)(x)]h(t) = (Df(x)h(t), l(h)) = \left(B(\ddot{x}(t)) \cdot \frac{d^2}{dt^2}h(t), l(h)\right),$$

где $B(\ddot{x}(t)) \cdot \ddot{h}(t)$ — покомпонентное произведение функций. Представим это отображение в виде суперпозиции двух отображений:

$$h \xrightarrow{(\frac{d^2}{dt^2},l)} (\ddot{h}(t), l(h)) \xrightarrow{(B(\ddot{x}(\cdot)),I)} (B(\ddot{x}(t))\ddot{h}(t), l(h)).$$

Хорошо известно, что отображение

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}, l\right) : C^2([0,1],\mathbb{R}^n) \to C([0,1],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

обратимо и, следовательно, фредгольмово индекса нуль. В силу выбора области $W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$ все компоненты вектора $B(\ddot{x}(t))$ отличны от нуля для любого $t \in [0,1]$, поэтому отображение

$$B(\ddot{x}(\cdot)) : C([0,1],\mathbb{R}^n) \to C([0,1],\mathbb{R}^n)$$

и, следовательно, отображение

$$(B(\ddot{x}(\cdot)), I) : C([0,1],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to C([0,1],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

обратимы. Так как отображение $B(\ddot{x}(\cdot))$ зависит от x непрерывно, то отображение (f,l) C^1-гладко, и производная Фреше $D(f,l)(x)$ обратима в каждой точке $x \in W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$ и, следовательно, (f,l) является фредгольмовым отображением индекса нуль.

Для того чтобы установить собственность отображения (f,l) на одной из областей $W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$, представим отображение (f,l) в виде суперпозиции

$$x \xrightarrow{(\frac{d^2}{dt^2},l)} (\ddot{x}, x(0), x(1)) \xrightarrow{(L,I)} (L(\ddot{x}(\cdot)), x(0), x(1)).$$

Так как отображение $(\frac{d^2}{dt^2}, l)$ обратимо, то достаточно проверить собственность отображения $L : C([0,1],\mathbb{R}^n) \to C([0,1],\mathbb{R}^n)$. Заметим, что если $x \in W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$, то $\ddot{x}(t) \in D_{l_1,l_2,\dots,l_n}$ для каждого $t \in [0,1]$, но в силу конструкции многочлен $L|_{D_{l_1,l_2,\dots,l_n}}$ имеет обратное отображение и, следовательно, сужение $L|_{W_{l_1,l_2,\dots,l_n}}$ обратимо и собственно. Таким образом, мы показали, что отображение (f,l) собственно на каждой области $W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$. Так как число областей конечно, то лемма доказана. □

Лемма 3.3. *Пусть выполнено условие* (C) *теоремы* 3.1, *тогда отображение* (g,c) *является* (f,l)*-уплотняющим по мере некомпактности* γ *на объединении областей* $W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$.

Доказательство. Так как мера некомпактности γ полуаддитивна и число областей $W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$ конечно, то достаточно установить (f,l)-уплотняемость отображения (g,c) на каждой области $W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$ отдельно. Более того, т. к. l и c — вполне непрерывные отображения, то для доказательства достаточно установить лишь f-уплотняемость отображения g на каждой области $W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$ по мере некомпактности γ.

Для любых $(t,u,v) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $y, \widetilde{y} \in D_{l_1,l_2,\dots,l_n}$ имеем

$$|G(t,u,v,y) - G(t,u,v,\widetilde{y})|_n = |G_{j_0}(t,u,v,y) - G_{j_0}(t,u,v,\widetilde{y})| \le k_{j_0}|y - \widetilde{y}|_n = k_{j_0}|y_{j_1} - \widetilde{y}_{j_1}|.$$

Так как отображение L_{j_1} обратимо на отрезке $[b_{j_1}^{l_{j_1}} + \epsilon,\ b_{j_1}^{l_{j_1}+1} - \epsilon]$ и существует оценка величины производной, то

$$|L_{j_1}(y_{j_1}) - L_{j_1}(\widetilde{y}_{j_1})| \ge k_{j_1}^{l_{j_1}}|y_{j_1} - \widetilde{y}_{j_1}|.$$

Из двух последних неравенств получим

$$\begin{aligned}|G(t,u,v,y) - G(t,u,v,\widetilde{y})|_n &\le k_{j_0}(k_{j_1}^{l_{j_1}})^{-1}|L_{j_1}(y_{j_1}) - L_{j_1}(\widetilde{y}_{j_1})| \le \\ &\le k_{j_0}(k_{j_1}^{l_{j_1}})^{-1}|L(y) - L(\widetilde{y})|_n \le l|L(y) - L(\widetilde{y})|_n, \quad (3.4)\end{aligned}$$

где $l < 1$ в силу условия (C).

Покажем теперь, что если неравенство (3.4) выполнено, то отображение g является f-уплотняющим на области $W_{l_1,l_2,\ldots,l_n}$.

Предположим противное, т. е. что существует множество $W_0 \subset W_{l_1,l_2,\ldots,l_n}$ такое, что $\gamma(g(W_0)) \geq \gamma(f(W_0)) \equiv d_0 > 0$. Равенство $\gamma(f(W_0)) = d_0$ означает, что для любого $\epsilon > 0$ существует разбиение W_0 на множества $W_i, i = 1, \ldots p$, такие, что $\operatorname{diam} f(W_i) < d_0 + \epsilon/8$. Так как отображения L и G равномерно непрерывны на соответствующих областях $D_{l_1,l_2,\ldots,l_n}$ и $[0,1] \times B(0,R) \times B(0,R) \times D_{l_1,l_2,\ldots,l_n}$, где $B(0,R) \subseteq \mathbb{R}^n$ — шар радиуса R с центром в нуле и $R > \|W_0\| = \sup\limits_{x \in W_0} \|x\|$, то существует $\delta > 0$ такое, что для всех $(t,u,v,y), (\widetilde{t}, \widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{y}) \in [0,1] \times B(0,R) \times B(0,R) \times D_{l_1,l_2,\ldots,l_n}$, удовлетворяющих условию $|(t,u,v,y) - (\widetilde{t}, \widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{y})| < \delta$, справедливы неравенства $|G(t,u,v,y) - G(\widetilde{t}, \widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{y})|_n < \epsilon/8$ и $|L(y) - L(\widetilde{y})|_n < \epsilon/8$. В силу теоремы Арцела–Асколи вложение $C^2([0,1],\mathbb{R}^n) \subset C^1([0,1],\mathbb{R}^n)$ вполне непрерывно, поэтому множество W_0 относительно компактно в $C^1([0,1],\mathbb{R}^n)$. Не уменьшая общности рассуждений, будем считать, что разбиение $\{W_i\}$ выбрано так, что $\forall x_1, x_2 \in W_i$: $\|x_1 - x_2\|_1 < \delta$.

Рассмотрим теперь разбиение $g(W_i)$, $i = 1, \ldots, p$, множества $g(W_0)$. Оценим диаметр множества $g(W_i)$ для произвольного $i = 1, \ldots, p$. Пусть $x_1, x_2 \in W$:

$$\begin{aligned}\|g(x_1) - g(x_2)\| = \max_{t\in[0,1]} |G(t, x_1(t), \dot{x}_1(t), \ddot{x}_1(t)) - G(t, x_2(t), \dot{x}_2(t), \ddot{x}_2(t))|_n \leq \\ \leq \max_{t\in[0,1]} |G(t, x_1(t), \dot{x}_1(t), \ddot{x}_1(t)) - G(t, x_1(t), \dot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t))|_n + \\ + \max_{t\in[0,1]} |G(t, x_1(t), \dot{x}_1(t), \ddot{x}_2(t)) - G(t, x_2(t), \dot{x}_2(t), \ddot{x}_2(t))|_n.\end{aligned}$$

Диаметр множества W_i в $C^1([0,1],\mathbb{R}^n)$ меньше δ, поэтому второе слагаемое меньше $\epsilon/8$. Учитывая неравенство (3.4), получим

$$\|g(x_1) - g(x_2)\| < l \max_{t\in[0,1]} |L(\ddot{x}_1(t)) - L(\ddot{x}_2(t))|_n + \epsilon/8 \leq l\|f(x_1) - f(x_2)\| + \epsilon/8 \leq ld_0 + \epsilon/4.$$

Следовательно, $\operatorname{diam} g(W_i) < ld_0 + \epsilon/4$. Так как приведенные выше рассуждения справедливы для любого $\epsilon > 0$, то $\gamma[g(W_0)] \leq ld_0$. Учитывая, что $l < 1$, получим неравенство $\gamma[g(W_0)] < \gamma[f(W_0)]$, что противоречит предположению. Таким образом, на каждом множестве $W_{l_1,l_2,\ldots,l_n}$ отображение g является f-уплотняющим по мере некомпактности γ. $\square$

Лемма 3.4. *Пусть выполнены условия* (B), (C) *и* (D) *теоремы* 3.1. *Тогда множество решений семейства уравнений* (3.3_λ) *ограничено и компактно.*

Доказательство. Покажем вначале, что множество решений семейства уравнений (3.3_λ) ограничено. Для этого достаточно проверить, что множество вторых производных решений уравнений (3.3_λ) ограничено. Тогда, используя краевые условия (3.2_λ), нетрудно установить ограниченность решений в $C^2([0,1],\mathbb{R}^n)$. Действительно, если функция x удовлетворяет краевым условиям (3.2_λ), то

$$x(t) = \lambda c_0 + [\lambda(c_1 - c_0) - \int_0^1 \int_0^u \ddot{x}(s) ds\, du] t + \int_0^t \int_0^u \ddot{x}(s) ds\, du,$$
$$\dot{x}(t) = \lambda(c_1 - c_0) - \int_0^1 \int_0^u \ddot{x}(s) ds\, du + \int_0^t \ddot{x}(s) ds.$$

Отсюда справедливы следующие оценки:

$$\|x\|_\infty \leq \lambda|c_0|_n + \lambda|c_1 - c_0|_n + 2\|\ddot{x}\|_\infty, \quad \|\dot{x}\|_\infty \leq \lambda|c_1 - c_0|_n + 2\|\ddot{x}\|_\infty, \tag{3.5}$$

и из ограниченности $\|\ddot{x}\|_\infty$ следует ограниченность $\|x\|_2$.

Пусть x — произвольное решение уравнения (3.3_λ). Предположим, что $x \in W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$ и область $W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$ неограничена, т. е. l_{j_0} для некоторого j_0 равно нулю или $m-1$. В противном случае множество всех решений ограничено. Для любого $x \in W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$ справедлива оценка

$$\|g(x)\| = \|G(\cdot,x(\cdot),\dot{x}(\cdot),\ddot{x}(\cdot))\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |G(t,x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t))|_n \le$$
$$\le \max_{t\in[0,1]} |G(t,x(t),\dot{x}(t),\ddot{x}(t)) - G(t,x(t),\dot{x}(t),y_{l_1,\dots,l_n})|_n + \max_{t\in[0,1]} |G(t,x(t),\dot{x}(t),y_{l_1,\dots,l_n})|_n,$$

где $y_{l_1,\dots,l_n}$ — произвольный вектор из $D_{l_1,l_2,\dots,l_n}$. Отсюда, используя неравенства (3.4), (3.5) для оценки первого слагаемого и условие (D) для оценки второго слагаемого, получим

$$\lambda\|g(x)\| \le \max_{t\in[0,1]} l[L(\ddot{x}(t)) - L(y_{l_1,\dots,l_n})|_n + \alpha + \max_{t\in[0,1]}\{\beta|x(t)|_n^{m-1} + \gamma|\dot{x}(t)|_n^{m-1}\} \le$$
$$\le l\|f(x)\| + l|L(y_{l_1,\dots,l_n})|_n + \alpha + \beta(\lambda|c_0|_n + \lambda|c_1 - c_0|_n + 2\|\ddot{x}\|_\infty)^{m-1} +$$
$$+ \gamma(\lambda|c_1 - c_0|_n + 2\|\ddot{x}\|_\infty)^{m-1} \le l\|f(x)\| + \alpha' + \beta'(\|\ddot{x}\|_\infty)^{m-1}.$$

Тогда, если функция $x \in W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$ является решением уравнения (3.3_λ) для некоторого $\lambda \in [0,1]$, то $\|f(x)\| = \lambda\|g(x)\| \le l\|f(x)\| + \alpha' + \beta'(\|\ddot{x}\|_\infty)^{m-1}$ и, следовательно, $(1-l)\|f(x)\| \le \alpha' + \beta'(\|\ddot{x}\|_\infty)^{m-1}$. Заметим, что $\|f(x)\| = \|L(\ddot{x}(\cdot))\|_\infty \ge |a_0|_n\|\ddot{x}\|_\infty^m - \sum\limits_{i=0}^{m-1} |a_i|_n\|\ddot{x}\|_\infty^i$, поэтому каждое решение $x \in W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$ уравнения (3.3_λ) удовлетворяет неравенству

$$(1-l)|a_0|_n\|\ddot{x}\|_\infty^m \le \alpha' + \beta'\|\ddot{x}\|_\infty^{m-1} + (1-l)\sum_{i=0}^{m-1} |a_i|_n\|\ddot{x}\|_\infty^i$$

или $(1-l)|a_0|_n\|\ddot{x}\|_\infty^m \le \gamma' \sum\limits_{i=0}^{m-1} \|\ddot{x}\|_\infty^i$ для некоторого $\gamma' > 0$. Очевидно, это неравенство справедливо лишь в том случае, когда $\|\ddot{x}\|_\infty < M$ для некоторого M. Таким образом, мы показали, что множество вторых производных решений уравнений (3.3_λ) ограничено, и в силу неравенства (3.5) множество решений этого семейства уравнений ограничено по норме $C^2([0,1],\mathbb{R}^n)$.

Покажем компактность множества решений семейства уравнений (3.3_λ). Обозначим это множество решений через K. Так как $f(x) = \lambda g(x)$ для любого $x \in K$ и некоторого $\lambda \in [0,1]$, то $f(K) \subset \overline{\mathrm{co}}(g(K) \cup \{0\})$. В силу свойств меры некомпактности γ имеем $\gamma(\overline{\mathrm{co}}(g(K) \cup \{0\})) = \gamma(g(K)) \ge \gamma(f(K))$. Из леммы 3.3 следует, что отображение g является f-уплотняющим по мере некомпактности γ на объединении областей $W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$. Поэтому полученное неравенство возможно лишь в том случае, когда $\gamma(g(K)) = \gamma(f(K)) = 0$. Используя собственность отображения (f,l), легко проверить, что отображение f собственно на ограниченных множествах из объединения $W_{l_1,l_2,\dots,l_n}$. Поэтому из равенства $\gamma(f(K)) = 0$ и ограниченности множества K следует его компактность. □

Лемма 3.5. *Пусть выполнено условие* (A) *теоремы* 3.1. *Тогда*

$$\mathrm{ind}((f,l),B(0,R),0) = 1,$$

где $B(0,R) \subset C^2([0,1],\mathbb{R}^n)$ *— шар с центром в нуле достаточно большого радиуса* R.

Доказательство. Выберем радиус R таким, что $R > \max\limits_{\substack{1\le i\le m-1\\ 1\le j\le n}} |b_j^i|$ и все решения семейства уравнений (3.3_λ) содержатся в $B(0,R)$. Рассмотрим суперпозицию отображений $(f,l) = (L,I) \times (\frac{d^2}{dt^2}, l)$ из леммы 3.2. Так как отображения, образующие суперпозицию, фредгольмовы в некоторых окрестностях решений уравнений

$$(f,l)(x) = 0, \quad (L,I)(y) = 0,$$

соответственно, то из определения индекса и свойств степени получим

$$\mathrm{ind}((f,l),B(0,R),0) = \mathrm{ind}\left((L,I),\left(\frac{d^2}{dt^2},l\right)B(0,R),0\right) \times \mathrm{ind}\left(\left(\frac{d^2}{dt^2},l\right),B(0,R),0\right).$$

Очевидно, $\operatorname{ind}((\frac{d^2}{dt^2}, l), B(0,R), 0) = 1$, поэтому

$$\operatorname{ind}((f,l), B(0,R), 0) = \operatorname{ind}\left((L,I), \left(\frac{d^2}{dt^2}, l\right) B(0,R), 0\right) = \operatorname{ind}(L, B(0,R), 0).$$

По определению $\operatorname{ind}(L, B(0,R), 0)$ равен неориентированной степени отображения $L : C([0,1], \mathbb{R}^n) \to C([0,1], \mathbb{R}^n)$, $y \to L(y(\cdot))$, в окрестности решений уравнения $Ly = 0$ из шара $B(0,R)$ относительно нуля. Эта степень определяется числом решений уравнения $L(y(\cdot)) = 0$, взятым по $\operatorname{mod} 2$.

Заметим, что из условия (A) следует, что число решений уравнения $L(y(\cdot)) = 0$ совпадает с числом решений многочлена L. Поэтому

$$\operatorname{ind}(L, B(0,R), 0) = \deg_2(L, B(0,R), 0).$$

Так как степень многочлена нечетна, то $\deg_2(L, B(0,R), 0) = 1$. Следовательно, $\operatorname{ind}((f,l), B(0,R), 0) = 1$. $\square$

Как показано в леммах 3.1–3.4, гомотопия (3.3_λ) удовлетворяет условиям свойства 1.2. Поэтому на шаре $B(0,R) \subset C^2([0,1], \mathbb{R}^n)$ достаточно большого радиуса

$$\operatorname{ind}((f,l) - (g,c), B(0,R), 0) = \operatorname{ind}((f,l), B(0,R), 0).$$

Применяя утверждение леммы 3.5, получим

$$\operatorname{ind}((f,l) - (g,c), B(0,R), 0) = 1.$$

Следовательно, в силу свойства 1.1 индекса множества решений уравнение (3.3) и краевая задача (3.1)–(3.2) имеют хотя бы одно решение в $C^2([0,1], \mathbb{R}^n)$. $\square$

Замечание 3.1. Условие (B) выполняется, если справедливо одно из условий:

- (B′) для всех $(t,u,v) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и каждого $y \in U_{\epsilon_0} S_0$, $\langle G(t,u,v,y), L(y)\rangle \neq 0$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$;
- (B″) для всех $(t,u,v) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и каждого $y \in U_{\epsilon_0} S_0$ существует $i : 1 \le i \le n$ такое, что $|G_i(t,u,v,y)| < |L_i(y_i)|$.

Замечание 3.2. Для того чтобы теорема 3.1 была справедлива, достаточно предполагать, что условия (B)–(D) выполняются лишь в области $W = [0,1] \times B(0,R) \times B(0,R) \times B(0,R)$ с достаточно большим R.

В заключение приведем конкретный пример использования теоремы 3.1. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$[\ddot{x}(t)]^3 - 3\ddot{x}(t) = p(1+t)\sin\left(|\ddot{x}| - \frac{\pi}{2}t\right)\cos(\dot{x}x), \quad t \in [0,1],$$
$$x(0) = c_0, \quad x(1) = c_1, \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}^n.$$

Для этой задачи $Ly = y^3 - 3y$, $By = 3y^2 - 3$, $b_1 = -1$, $b_2 = 1$. Пусть $\epsilon_0 = 1/2$. Проверим, что все условия теоремы 3.1 выполняются.

- (A) Многочлен имеет три корня $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$. Все они не входят в ϵ_0-окрестность корней b_1, b_2, т. е. они не принадлежат интервалам $[-3/2, -1/2]$, $[1/2, 3/2]$.
- (B″) На интервалах $[-3/2, -1/2]$, $[1/2, 3/2]$ многочлен L принимает наименьшее по модулю значение на границах $L(-3/2) = 1\frac{1}{8}$, $L(-1/2) = 1\frac{3}{8}$, $L(1/2) = -1\frac{3}{8}$, $L(3/2) = -1\frac{1}{8}$. Так как $|G(t,u,v,y)| \le 2p$, то для $p \le 1/2$ условие (B″) выполняется.
- (C) Вычислим коэффициенты k_j на областях $D_0 = (-\infty, -3/2]$, $D_1 = [-1/2, 1/2]$, $D_2 = [3/2, +\infty]$: $k_0 = B(-3/2) = 3\frac{3}{4}$, $k_1 = |B(\pm 1/2)| = 2\frac{1}{4}$, $k_2 = B(3/2) = 3\frac{3}{4}$. Очевидно, $|G(t,u,v,y) - G(t,u,v,\widetilde{y})| \le 2p|y - \widetilde{y}|$. Поэтому для $p \le 1$ условие (C) выполняется.
- (D) Очевидно, т. к. отображение g ограничено.

Таким образом, условия теоремы 3.1 выполняются. Следовательно, для $p \le 1/2$ двухточечная краевая задача для этого дифференциального уравнения имеет хотя бы одно решение.

Литература

1. Smale S. *An infinite dimensional version of Sard's theorem* // Amer. J. Math. – 1965. – V. 87. – P. 861–866.
2. Elworthy K.D., Tromba A.J. *Differential structures and Fredholm maps on Banach manifolds* // Proc. Sympos. Pure Math. (Global Analysis) – 1970. – V. 15. – P. 45–94.
3. Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. *Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере–Шаудера* // УМН. – 1977. – Т. 32. – Вып. 4. – С. 3–54.
4. Звягин В.Г. *О существовании непрерывной ветви собственных функций нелинейной эллиптической краевой задачи* // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13. – № 8. – С. 1524–1527.
5. Звягин В.Г. *Об ориентированной степени одного класса возмущений фредгольмовых отображений и бифуркации решений нелинейной краевой задачи с некомпактными возмущениями* // Матем. сб. – 1991. – Т. 182. – № 12. – С. 1740–1768.
6. Борисович Ю.Г., Звягин В.Г. *Об одном топологическом принципе разрешимости уравнений с фредгольмовыми операторами* // ДАН УССР. – Сер. А. – 1978. – № 3. – С. 203–206.
7. Звягин В.Г. *О числе решений задачи Дирихле для уравнений эллиптических на множестве решений* // Матем. заметки. – 1991. – Т. 49. – № 4. – С. 47–54.
8. Борисович Ю.Г., Сапронов Ю.И. *К топологической теории компактно сужаемых отображений* // Тр. семин. по функц. анализу. – Изд-во Воронежск. ун-та, 1969. – Вып. 12. – С. 43–68.
9. Дмитриенко В.Т., Звягин В.Г. *Гомотопическая классификация одного класса непрерывных отображений* // Матем. заметки. – 1982. – Т. 31. – № 5. – С. 801–812.
10. Hertzer G. *Some remarks on Φ_+-operators and on the coincidence degree for a Fredholm equation with noncompact nonlinear perturbations* // Ann. Soc. Sci. Bruxelles. – 1975. – V. 89. – № 1. – P. 495–508.

Воронежский государственный университет
Гданьский политехнический институт (Польша)

Поступила
24.05.1999