ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 4 (467)

УДК 517.55

С. КОСБЕРГЕНОВ

О МНОГОМЕРНОЙ ГРАНИЧНОЙ ТЕОРЕМЕ МОРЕРЫ ДЛЯ МАТРИЧНОГО ШАРА

В последние годы интерес специалистов привлекают многомерные граничные аналоги теоремы Мореры [1]–[5]. Все они, так или иначе, имеют дело с полной границей области и говорят о возможности голоморфного продолжения функции f с границы ∂D области D из C^n при условии равенства нулю интегралов от f по границам аналитических дисков, лежащих на ∂D.

В данной статье изучен граничный вариант теоремы Мореры для матричного шара. Отправной точкой послужил результат Нагеля и Рудина [1] о том, что если функция f непрерывна на границе шара в C^n и

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi(e^{i\theta}, 0, \dots, 0))e^{i\theta}d\theta = 0$$

для всех автоморфизмов φ шара, то функция f голоморфно продолжается в шар.

Данное утверждение обобщается для матричного шара заменой границы области границей Шилова (остовом). Доказательство, основанное на иных идеях, чем в [1], позволяет в случае шара усилить теорему Нагеля и Рудина.

Пусть $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ — вектор, составленный из квадратных матриц Z_j порядка m над полем комплексных чисел C. Можно считать, что Z — элемент пространства C^{nm^2}. Введем в этом множестве векторов матричное “скалярное” произведение

$$\langle Z, W\rangle = Z_1 W_1^* + \dots + Z_n W_n^*,$$

где W_j^* — матрица, сопряженная и транспонированная для матрицы W_j. Область $\Re = \{Z;\ E^{(m)} - \langle Z, Z\rangle > 0\}$ называется матричным шаром в пространстве C^{nm^2}. Здесь $E^{(m)}$ — единичная матрица порядка m. Остовом этой области является множество $\Delta = \{Z : \langle Z, Z\rangle = E^{(m)}\}$, имеющее вещественную размерность $2nm^2 - m^2$. Область $\Re$ есть ограниченная полная круговая область.

Определим класс $H^1(\Re)$ функций f, голоморфных в $\Re$, для которых

$$\sup_{0<r<1} \int_\Delta |f(rZ)|d\mu(Z) < \infty,$$

где $d\mu(Z)$ — нормированная мера Лебега на остове Δ, которая является мерой Хаара и, следовательно, инвариантна относительно поворотов.

Пусть $S = \{t \in C : |t| < 1\}$. Зафиксируем точку $U^0 \in \Delta$ и рассмотрим вложение диска S в область $\Re$

$$\{W \in C^{nm^2} : W_j = tU_j^0,\ j = 1, \dots, n,\ |t| < 1\}. \quad (1)$$

Граница T диска S при этом вложении перейдет в окружность, лежащую на Δ. Если ψ — произвольный (голоморфный) автоморфизм [6] области $\Re$, то множество вида (1) под действием этого автоморфизма перейдет в некоторый аналитический диск с границей на Δ.

Теорема 1. *Если функция $f \in C(\Delta)$ удовлетворяет условию*

$$\int_T f(\psi(tU^0))dt = 0 \quad (2)$$

для всех автоморфизмов ψ области $\Re$, то функция f голоморфно продолжается в $\Re$ до функции F класса $C(\overline{\Re})$.

Доказательство. Прежде всего, параметризуем множество Δ следующим образом: $Z \in \Delta$ представим в виде $Z = e^{i\pi}U$, $U = (U_1, \dots, U_n)$, где $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. В матрице U_1 элемент $u_{11}^{(1)}$, стоящий в левом верхнем углу, является положительным числом. Многообразие таких матриц обозначим через Δ_1^+, а нормированную меру Лебега на нем — через σ^+. Конечно, тем самым параметризуется не все множество Δ, а некоторое меньшее множество, отличающееся от Δ на множество меры 0. Для наших целей этого вполне достаточно.

Из теоремы Фубини и инвариантности меры Лебега σ относительно поворотов, так же, как в ([7], лемма 2.6), получается

Лемма 1. *Справедливо представление*

$$d\sigma = h(U)dt\, d\sigma^+(U), \quad U \in \Delta_1^+, \tag{3}$$

где гладкая положительная функция $h(U)$ не зависит от t.

Из (3) имеем

$$d\sigma = \frac{1}{2\pi i}\frac{dt}{t}d\sigma_1(U),$$

где $t = e^{i\phi}$, а мера σ_1 положительна на Δ_1^+. Умножая равенство (2) на $d\sigma_1$ и интегрируя по Δ_1^+, получим

$$\int_\Delta f(\psi(Z))z_{ks}^l d\sigma(Z) = 0, \tag{4}$$

где z_{ks}^l — компоненты вектора $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$, $k, s = 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, n$.

Рассмотрим автоморфизм ψ_B, переводящий точку B из $\Re$ в 0. Он определяется [6] с точностью до обобщенного унитарного преобразования. Подставляя в условие (4) вместо ψ автоморфизм ψ_B^{-1} и делая замену переменных $W = \psi_B^{-1}(Z)$, получим

$$\int_\Delta f(W)\psi_{ks}^{B,l}(W)d\sigma(\psi_B(W)) = 0, \tag{5}$$

где $\psi_{ks}^{B,l}$ — компоненты автоморфизма ψ_B.

Следствие 4 из работы [6] дает

$$d\sigma(\psi_B(W)) = P(B, W)d\sigma(W),$$

где $P(B, W)$ — инвариантное ядро Пуассона области $\Re$. Таким образом, из условия (5) получаем

$$\int_\Delta f(W)\psi_{ks}^{B,l}(W)P(B, W)d\sigma(W) = 0 \tag{6}$$

для всех точек B из Ω и всех $k, s = 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, n$.

Для завершения доказательства теоремы 1 будет использована

Теорема 2. *Если функция $f \in L^1(\Delta)$ и для нее выполнено равенство (6) для всех автоморфизмов ψ_B области $\Re$, переводящих точку $B \in \Re$ в 0, и всех $k, s = 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, n$, то функция f является радиальным граничным значением некоторой функции $F \in H^1(\Re)$.*

Доказательство. Инвариантное ядро Пуассона для области $\Re$ имеет вид [6]

$$P(B, W) = \frac{(\det(E^{(m)} - \langle B, B\rangle))^{mn}}{|\det(E^{(m)} - \langle B, W\rangle)|^{2mn}} = \frac{(\det(E^{(m)} - \langle B, B, \rangle))^{mn}}{(\det(E^{(m)} - \langle B, W\rangle))^{mn}(\det(E^{(m)} - \langle W, B\rangle))^{mn}}.$$

Пусть $B = (B_1, \ldots, B_n) = (\|b^1_{sp}\|, \ldots, \|b^n_{sp}\|)$ и $W = (W_1, \ldots, W_n) = (\|\omega^1_{sp}\|, \ldots, \|\omega^n_{sp}\|)$, $s, p = 1, \ldots, m$. Найдем выражение

$$\sum_{s,p=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \overline{b}^{\,l}_{sp} \frac{\partial P(B,W)}{\partial \overline{b}^{\,l}_{sp}}. \tag{7}$$

Обозначим $E^{(m)} - \langle W, B \rangle = \|\alpha_{qj}\|$, $q, j = 1, \ldots, m$, где $\alpha_{qj} = \delta_{qj} - \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{l=1}^{n} \omega^l_{qk} \overline{b}^{\,l}_{jk}$, $q, j = 1, \ldots, m$, а δ_{qj} — символ Кронекера.

Используя обычное правило дифференцирования определителя, нетрудно проверить, что для любого $s = 1, \ldots, m$

$$\sum_{p=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \overline{b}^{\,l}_{sp} \frac{\partial \det(E^{(m)} - \langle W, B \rangle)}{\partial \overline{b}^{\,l}_{sp}} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1s} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ \alpha_{s1} & \ldots & \alpha_{ss} - 1 & \ldots & \alpha_{sm} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{ms} & \ldots & \alpha_{mm} \end{vmatrix} =$$

$$= \det(E^{(m)} - \langle B, W \rangle) - \det(E^{(m)} - \langle W, B \rangle)[s, s],$$

где $\det(E^{(m)} - \langle W, B \rangle)[s, s]$ означает алгебраическое дополнение к элементу α_{ss} в матрице $E^{(m)} - \langle W, B \rangle$. Тогда

$$\sum_{s,p=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \overline{b}^{\,l}_{sp} \frac{\partial \det(E^{(m)} - \langle W, B \rangle)}{\partial \overline{b}^{\,l}_{sp}} = m \det(E^{(m)} - \langle W, B \rangle) - \sum_{s=1}^{m} \det(E^{(m)} - \langle W, B \rangle)[s, s].$$

Точно так же

$$\sum_{s,p=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \overline{b}^{\,l}_{sp} \frac{\partial \det(E^{(m)} - \langle B, B \rangle)}{\partial \overline{b}^{\,l}_{sp}} = \det(E^{(m)} - \langle B, B \rangle) - \sum_{s=1}^{m} \det(E^{(m)} - \langle B, B \rangle)[s, s].$$

Отсюда имеем для (7) выражение

$$m^2 n P(B, W) \left[\frac{\sum\limits_{s=1}^{m} \det(E^{(m)} - \langle W, B \rangle)[s, s]}{\det(E^{(m)} - \langle W, B \rangle)} - \frac{\sum\limits_{s=1}^{m} \det(E^{(m)} - \langle B, B \rangle)[s, s]}{\det(E^{(m)} - \langle B, B \rangle)} \right] =$$

$$= m^2 n P(B, W) [\mathrm{Sp}(E^{(m)} - \langle W, B \rangle)^{-1} - \mathrm{Sp}(E^{(m)} - \langle B, B \rangle)^{-1}]. \tag{8}$$

Здесь $\mathrm{Sp}\, W$, как обычно, означает след матрицы W.

Далее, применяя способ вычисления, предложенный в [8], имеем

$$\sum_{s,p=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \overline{b}^{\,l}_{sp} \varphi^{B,l}_{sp} = \mathrm{Sp} \langle \psi_B(W), B \rangle = \mathrm{Sp}[(E^{(m)} - \langle W, B \rangle)^{-1} - (E^{(m)} - \langle B, B \rangle)^{-1}]. \tag{9}$$

Сравнивая формулы (8) и (9), из условия теоремы получим

$$\sum_{s,p=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \overline{b}^{\,l}_{sp} \frac{\partial F(B)}{\partial \overline{b}^{\,l}_{sp}} = 0, \tag{10}$$

где

$$F(B) = \int_{\Delta} f(W) P(B, W) d\sigma(W) \tag{11}$$

— интеграл Пуассона от функции f.

Теперь понадобится следующая лемма, которая доказывается таким же способом, как теорема 5.7.1. из [9].

Лемма 2. *Для произвольной непрерывной функции f, заданной на остове Δ, интеграл Пуассона* (11) *является функцией, вещественно аналитической в $\overline{\Re} \setminus \Delta$ и непрерывной на $\overline{\Re}$, причем $F = f$ на Δ.*

Используя эту лемму, разложим $F(B)$ в ряд Тейлора в окрестности точки 0

$$F(B) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\geq 0} C_{\alpha,\beta} b^{\alpha} \overline{b}^{\beta},$$

где $\alpha = (\|\alpha_{qj1}\|, \ldots, \|\alpha_{qjn}\|)$ и $\beta = (\|\beta_{qj1}\|, \ldots, \|\beta_{qjn}\|)$, $q, j = 1, \ldots, m$, — матрицы с неотрицательными целочисленными элементами и

$$|\alpha| = \sum_{l=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{qjl}, \quad b^{\alpha} = \prod_{l=1}^{n} \prod_{q=1}^{m} \prod_{j=1}^{m} b_{qjl}^{\alpha_{qjl}}.$$

Тогда условие (10) влечет

$$\sum_{s,p=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \overline{b}_{sp}^{l} \frac{\partial F(B)}{\partial \overline{b}_{sp}^{l}} = \sum_{|\alpha|\geq 0,\ |\beta|>0} |\beta| C_{\alpha,\beta} b^{\alpha} \overline{b}^{\beta} = 0,$$

отсюда все коэффициенты $C_{\alpha,\beta}$ с $|\beta| > 0$ равны нулю, т. е. функция $F(B)$ голоморфна в $\Re$ и принадлежит классу $H^1(\Re)$. Теорема 2 доказана.

Если к тому же функция f непрерывна на Δ, то в силу леммы 2 функция F принадлежит $C(\overline{\Re})$ и ее граничные значения на Δ совпадают с f. Теорема 1 доказана.

Доказательства теорем 1 и 2 показывают, что они остаются верными, если условия (2) и (6) выполняются лишь для тех автоморфизмов ψ_B, для которых точка B лежит в некотором открытом множестве $V \subset \Re$. Поэтому имеют место следующие утверждения.

Теорема 3. *Если функция $f \in L^1(\Delta)$ удовлетворяет условию* (6) *для всех точек B, лежащих в некотором открытом множестве $V \subset \Re$, и всех компонент автоморфизма ψ_B, то f является радиальным граничным значением на Δ некоторой функции $F \in H^1(\Re)$.*

Теорема 4. *Пусть функция $f \in C(\Delta)$ и условие* (2) *выполняется для всех автоморфизмов ψ, переводящих точку 0 в точки из некоторого открытого множества $V \subset \Re$. Тогда f голоморфно продолжается в область $\Re$ до некоторой функции $F \in C(\overline{\Re})$.*

Обозначим через Δ_ψ аналитический диск $\{Z;\ Z = \psi(tU^0),\ |t| < 1\}$, где U^0 — фиксированная точка из остова Δ, а ψ — автоморфизм области $\Re$. Тогда граница T_ψ этого аналитического диска лежит на Δ, поскольку точки области $\Re$ переходят в точки из $\Re$, а точки остова Δ переходят в точки остова под действием автоморфизма.

Из теорем 1 и 2 очевидным образом получается следствие о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль аналитических дисков.

Следствие. Если функция $f \in C(\Delta)$ голоморфно (по t) продолжается в аналитические диски Δ_ψ для всех автоморфизмов ψ (либо для всех автоморфизмов ψ, переводящих точку 0 в точки некоторого фиксированного открытого множества $V \subset \Re$), то функция f голоморфно продолжается в $\Re$.

Это следствие является аналогом для матричного шара теоремы Стаута [10] о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения.

Литература

1. Nagel A., Rudin W. *Moebius-invariant functions spaces on balls and spheres* // Duke Math. J. – 1976. – V. 43. – № 4. – P. 841–865.
2. Grinberg E. *A boundary analogue of Morera's theorem on the unit ball of C^n* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1988. – V. 102. – P. 114–116.
3. Globevnik L., Stout E.L. *Boundary Morera theorems for holomorphic functions of several complex variables* // Duke Math. J. – 1991. – V. 64. – № 3. – P. 571–615.
4. Globevnik L. *A boundary Morera theorem* // J. Geometric Anal. – 1993. – V. 3. – № 3. – P. 269–277.
5. Кытманов А.М., Мысливец С.Г. *Об одном граничном аналоге теорем Мореры* // Сиб. матем. журн.– 1995. – Т. 36. – № 6. – С. 1350–1353.
6. Косбергенов С. *О формуле Карлемана для матричного шара* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 1. – С. 76–79.
7. Айзенберг Л.А. *Формула Карлемана в комплексном анализе.* – Новосибирск: Наука, 1990. – 248 с.
8. Косбергенов С., Кытманов А.М., Мысливец С.Г. *О граничной теореме Мореры для классических областей* // Сиб. матем. журн. – 1999. – Т. 40. – № 3. – С. 595–604.
9. Хуа Локен. *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных.* – М.: Ин. лит., 1959. – 163 с.
10. Stout E.L. *The boundary values of holomorphic functions of several complex variables* // Duke Math. J. – 1977. – V. 44. – № 1. – P. 105–108.

Ташкентский государственный университет

Поступила
05.01.1999