ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 4 (419)

УДК 519.63

Л.Л. ГЛАЗЫРИНА, М.Ф. ПАВЛОВА

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА ТЕОРИИ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ПОДЗЕМНЫХ ВОД

В работе рассматривается эволюционное вариационное неравенство с вырождением на решении и на градиенте решения. Неравенства подобного типа возникают, например, при описании процессов совместного движения подземных и поверхностных вод и характеризуются наличием в области, где рассматривается процесс, разреза, на котором задается дополнительное условие в виде одномерного дифференциального уравнения или неравенства с частными производными.

При достаточно общих предположениях на гладкость исходных данных доказана теорема существования неотрицательного решения в классе обобщенных функций. Доказательство проведено с помощью метода полудискретизации со штрафом. Установлена сходимость последовательности решений полудискретной задачи со штрафом к решению исходного неравенства.

Уравнения подобного вида и методы их решения рассматривались в работах [1], [2].

1. Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область пространства R_2, Γ — ее граница, Π — разрез, проведенный внутри Ω, разбивающий ее на две связные подобласти.

Введем обозначения банаховых пространств, которые будут использоваться в дальнейшем. Пусть $\overset{\circ}{V}$, $\overset{\circ}{V}(0,T)$, $W(0,T)$ — банаховы пространства функций с нормами

$$\|u\|_{\overset{\circ}{V}} = \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)} + \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)} < \infty,$$

$$\|u\|_{\overset{\circ}{V}(0,T)} = \|u\|_{L_{p_1}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega))} + \|u\|_{L_{p_2}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi))} < \infty,$$

$$\|u\|_{W(0,T)} = \|u\|_{\overset{\circ}{V}(0,T)} + \|u\|_{L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega))} + \|u\|_{L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi))} < \infty.$$

Пусть далее z — некоторый элемент из $\overset{\circ}{V}(0,T)$. Обозначим через $\Phi(z(t),v)$ функционал, значение которого при $t \in [0,T]$ на элементах $v \in \overset{\circ}{V}$ определяется по правилу

$$\Phi(z(t),v) = \frac{d}{dt}\Big(\int_\Omega \omega_1(z(t))v(x)dx + \int_\Pi \omega_2(z(t))v(s)ds\Big).$$

Рассмотрим следующую задачу: найти такую функцию

$$u \in K = \{v \in W(0,T), v(x,t) \geq 0 \text{ почти всюду (п.в.) в } Q_T = \Omega_T \times [0,T] \text{ и на } \Pi_T = \Pi \times [0,T]\},$$

что

$$\int_0^T \Phi(u,\cdot)dt \in (\overset{\circ}{V}(0,T))^*, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-00400).

$$u(x,0)=u_0(x) \text{ п.в. в } \Omega \text{ и на } \Pi \tag{2}$$

и удовлетворяется для любой $v\in K$ вариационное неравенство

$$\int_0^T \{\Phi(u,u-v)+\langle Au,u-v\rangle+\langle A_\Pi u,u-v\rangle_\Pi\}dt \le \int_0^T \{\langle f_1,u-v\rangle+\langle f_2,u-v\rangle_\Pi\}dt. \tag{3}$$

Здесь ω_i – заданные функции, $\langle f_1,u-v\rangle$ ($\langle f_2,u-v\rangle_\Pi$) – значение функционала $f_1\in L_{p_1'}(0,T;W_{p_1'}^{-1}(\Omega))$ ($f_2\in L_{p_2'}(0,T;W_{p_2'}^{-1}(\Pi))$) на элементе $v\in \overset{\circ}{V}(0,T)$, операторы A и A_Π определены равенствами

$$Au=-\sum_{i=1}^2\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x,u)K_i(x,\nabla u)), \quad A_\Pi u=-\frac{\partial}{\partial s}\left(\psi(s,u)\varphi(\frac{\partial u}{\partial s})\right),$$

$\frac{\partial}{\partial s}$ — производная по направлению Π.

Будем предполагать (ср. с [1]), что функции $\omega_i(u)$ монотонно возрастают, $\omega_i(0)=0$ ($i=1,2$) и при любом $\xi\in R_1$ удовлетворяют неравенствам

$$\omega_i(\xi)\xi\ge c_{0i}|\xi|^{\alpha_i}-c_{1i}, \tag{4}$$

$$|\omega_i(\xi)|\le c_{2i}|\xi|^{\alpha_i-1}+c_{3i}, \tag{5}$$

$$c_{0i}|\xi|^{\alpha_i}-c_{1i}\le J_i(\xi)=\int_0^\xi \omega_i'(\tau)\tau d\tau\le c_{4i}|\xi|^{\alpha_i}+c_{5i}, \tag{6}$$

$$(\omega_i'(\xi)\xi)'\ge 0, \tag{7}$$

$\alpha_i>1; c_{0i},c_{2i},c_{4i}>0; c_{1i},c_{3i},c_{5i}\ge 0, i=1,2.$

Относительно коэффициентов $a_i(x,\xi_0)$, $K_i(x,\xi)$, $\psi(x,\xi_0)$, $\varphi(\xi_1)$ предполагается, что они измеримы по x, непрерывны по второму аргументу и при любых $x\in\Omega$, $\xi_i\in R_1$ ($i=0,1$), $\xi,\xi^1,\xi^2\in R_2$ удовлетворяют соотношениям:

$$0<\delta_0\le a_i(x,\xi_0)\le\delta_1, \quad 0<\delta_2\le\psi(x,\xi_0)\le\delta_3, \tag{8}$$

$$|K_i(x,\xi)|\le\beta_0+\beta_1\sum_{i=1}^2|\xi_i|^{p_1-1}, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^2 a_i(x,\xi_0)K_i(x,\xi)\xi_i\ge\max\left\{\beta_2\sum_{i=1}^2|\xi_i|^{p_1}-\beta_3,0\right\}, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^2 a_i(x,\xi_0)(K_i(x,\xi^1)-K_i(x,\xi^2))(\xi_i^1-\xi_i^2)\ge 0, \tag{11}$$

$$|\varphi(\xi_0)|\le\gamma_0+\gamma_1|\xi_0|^{p_2-1}, \tag{12}$$

$$\varphi(\xi_0)\xi_0\ge\max\left\{\gamma_2|\xi_0|^{p_2}-\gamma_3,0\right\}, \tag{13}$$

$$(\varphi(\xi_1)-\varphi(\xi_2))(\xi_1-\xi_2)\ge 0. \tag{14}$$

Здесь $\beta_i>0,\gamma>0,p_i>1$ — постоянные величины.

Отметим, что условия (8)–(10) и (8), (12), (13) обеспечивают ограниченность и коэрцитивность операторов $A:\overset{\circ}{W}{}_{p_1}^1(\Omega)\to W_{p_1'}^{-1}(\Omega)$, $A_\Pi:\overset{\circ}{W}{}_{p_2}^1(\Pi)\to W_{p_2'}^{-1}(\Pi)$.

2. Исследование полудискретной задачи

Разрешимость задачи (1)–(3) исследуем с помощью метода штрафа с последующей дискретизацией по временной переменной t. Для этого на $[0,T]$ построим равномерную сетку с шагом τ. Обозначим $\overline{\omega}_\tau=\{0,\tau,2\tau,\dots,T\}$, $\omega_\tau=\{\tau,2\tau,\dots,T\}$, $\Omega_1=\Omega$, $\Omega_2=\Pi$.

Пусть далее $\beta_i : L_q(\Omega_i) \to L_{q'}(\Omega_i)$ $(i = 1, 2)$ — операторы штрафа, $\beta_i v = -|v^-|^{q-2} v^-$, $v^- = (v - |v|)/2$. Здесь $q \leq p = \min\{p_1, p_2\}$.

Определение 1. Решением полудискретной задачи для (1)–(3) назовем такую функцию $y_\varepsilon \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$ $\forall t \in \overline{\omega}_\tau$, что

$$y_\varepsilon(0) = u_0(x) \text{ п.в. в } \Omega \text{ и на } \Pi \tag{15}$$

и для произвольной функции $v \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$ справедливо равенство

$$\int_\Omega \frac{\omega_1(\hat{y}_\varepsilon) - \omega_1(y_\varepsilon)}{\tau} v\,dx + \int_\Pi \frac{\omega_2(\hat{y}_\varepsilon) - \omega_2(y_\varepsilon)}{\tau} v\,ds +$$
$$+\langle A\hat{y}_\varepsilon, v\rangle + \langle A_\Pi \hat{y}_\varepsilon, v\rangle_\Pi + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta_1 \hat{y}_\varepsilon, v\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta_2 \hat{y}_\varepsilon, v\rangle_\Pi = \langle f_{1\tau}, v\rangle + \langle f_{2\tau}, v\rangle_\Pi \quad \forall t \in \omega_\tau. \tag{16}$$

Здесь

$$\langle f_{1\tau}, v\rangle = \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} \langle f_1(\xi), v\rangle d\xi, \qquad \langle f_{2\tau}, v\rangle_\Pi = \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} \langle f_2(\xi), v\rangle_\Pi\, d\xi,$$

ε — параметр штрафа.

Разрешимость задачи (15)-(16) нетрудно доказать, например, используя метод Галёркина.

Для доказательства сходимости решений полудискретной задачи к решению неравенства (3) понадобится ряд априорных оценок из следующих лемм.

Лемма 1. *Пусть* $u_0 \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$, $u_0(x) \geq 0$ *п.в. в* Ω *и на* Π, $f_1 \in L_{p_1'}(0, T; W^{-1}_{p_1'}(\Omega))$, $f_2 \in L_{p_2'}(0, T; W^{-1}_{p_2'}(\Pi))$. *Тогда для решения задачи* (15)–(16) *при* $\forall t' \in \omega_\tau$ *справедливы априорные оценки*

$$\|y_\varepsilon(t')\|_{L_{\alpha_1}(\Omega)} + \|y_\varepsilon(t')\|_{L_{\alpha_2}(\Pi)} \leq c, \tag{17}$$

$$\sum_{t=0}^{t'} \tau[\|y_\varepsilon(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)} + \|y_\varepsilon(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}] \leq c, \tag{18}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'} \tau[\|y^-_\varepsilon(t)\|^q_{L_q(\Omega)} + \|y^-_\varepsilon(t)\|^q_{L_q(\Pi)}] \leq c. \tag{19}$$

Здесь c — константа, не зависящая от τ и параметра ε.

Доказательство. В равенстве (16) положим $v(x) = \hat{y}_\varepsilon(t)$, умножим его на τ и просуммируем по t от 0 до $t' - \tau$. В результате получим

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int_\Omega \frac{\omega_1(\hat{y}_\varepsilon(t)) - \omega_1(y_\varepsilon(t))}{\tau}\hat{y}_\varepsilon(t)dx + \sum_{t=0}^{t'-\tau} \tau \int_\Pi \frac{\omega_2(\hat{y}_\varepsilon(t)) - \omega_2(y_\varepsilon(t))}{\tau}\hat{y}_\varepsilon(t)ds +$$
$$+\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle A\hat{y}_\varepsilon(t), \hat{y}_\varepsilon(t)\rangle + \sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle A_\Pi\hat{y}_\varepsilon(t), \hat{y}_\varepsilon(t)\rangle_\Pi + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle \beta_1\hat{y}_\varepsilon(t), \hat{y}_\varepsilon(t)\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle \beta_2\hat{y}_\varepsilon(t), \hat{y}_\varepsilon(t)\rangle_\Pi =$$
$$= \sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle f_{1\tau}, \hat{y}_\varepsilon(t)\rangle + \sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle f_{2\tau}, \hat{y}_\varepsilon(t)\rangle_\Pi. \tag{20}$$

Два первых слагаемых левой части равенства (20) оценим с помощью неравенств ([3], лемма 2)

$$(\omega_i(\xi) - \omega_i(\eta))\xi \geq J_i(\xi) - J_i(\eta), \quad i = 1, 2. \tag{21}$$

Используя (21) и (6), получим

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\int_{\Omega_i}\frac{\omega_1(\hat{y}_\varepsilon(t))-\omega_1(y_\varepsilon(t))}{\tau}\hat{y}_\varepsilon(t)dx \geq \sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\int_{\Omega_i}[J_i(\hat{y}_\varepsilon(t))-J_i(y_\varepsilon(t))]dx \geq$$
$$\geq c_{0i}\|y_\varepsilon(t')\|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega_i)} - c_{4i}\|u_0(x)\|^{\alpha_i}_{L_{\alpha_i}(\Omega_i)} - (c_{1i}+c_{5i})\,\mathrm{mes}(\Omega_i), \quad i=1,2. \tag{22}$$

Далее, используя (10) и (13), будем иметь

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle A\hat{y}_\varepsilon(t),\hat{y}_\varepsilon(t)\rangle \geq \beta_2\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|y_\varepsilon(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)} - \beta_3\,\mathrm{mes}(\Omega)t', \tag{23}$$

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle A_\Pi\hat{y}_\varepsilon(t),\hat{y}_\varepsilon(t)\rangle_\Pi \geq \gamma_2\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|y_\varepsilon(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)} - \gamma_3\,\mathrm{mes}(\Pi)t'. \tag{24}$$

Кроме того, заметим, что

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle\beta_i\hat{y}_\varepsilon(t),\hat{y}_\varepsilon(t)\rangle_i = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|y^-_\varepsilon(t)\|^q_{L_q(\Omega_i)}, \quad i=1,2; \tag{25}$$

здесь и в дальнейшем $\langle,\rangle_1=\langle,\rangle$, $\langle,\rangle_2=\langle,\rangle_\Pi$. Правую часть (20) оценим с помощью неравенства Гёльдера и ε-неравенства, в результате получим

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle f_{1\tau}(t),\hat{y}_\varepsilon(t)\rangle \leq \frac{1}{\varepsilon_1^{p_1'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|f_{1\tau}(t)\|^{p_1'}_{W^{-1}_{p_1'}(\Omega)} + \varepsilon_1^{p_1}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\hat{y}_\varepsilon(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}, \tag{26}$$

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle f_{2\tau}(t),\hat{y}_\varepsilon(t)\rangle_\Pi \leq \frac{1}{\varepsilon_2^{p_2'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|f_{2\tau}(t)\|^{p_2'}_{W^{-1}_{p_2'}(\Pi)} + \varepsilon_2^{p_2}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\hat{y}_\varepsilon(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}. \tag{27}$$

Подставляя (22)–(27) в (20), будем иметь

$$c_{01}\|y_\varepsilon(t')\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega)} + c_{02}\|y_\varepsilon(t')\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)} + (\beta_2-\varepsilon_1^{p_1})\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\hat{y}_\varepsilon(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)} + (\gamma_2-\varepsilon_2^{p_2})\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|\hat{y}_\varepsilon(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)} +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau[\|\hat{y}^-_\varepsilon(t)\|^q_{L_q(\Omega)} + \|\hat{y}^-_\varepsilon(t)\|^q_{L_q(\Pi)}] \leq \frac{1}{\varepsilon_1^{p_1'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|f_{1\tau}(t)\|^{p_1'}_{W^{-1}_{p_1'}(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon_2^{p_2'}}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\|f_{2\tau}(t)\|^{p_2'}_{W^{-1}_{p_2'}(\Pi)} + \mu t'.$$

Из последнего неравенства следуют оценки (17)–(19). $\square$

Лемма 2. *Пусть* $q\leq p$, $u_0\in\overset{\circ}{V}\cap L_{\alpha_1}(\Omega)$, $u_0(x)\geq 0$ *п.в. в* Ω *и на* Π, $f_1\in L_{q'}(Q_T)$, $f_2\in L_{q'}(\Pi_T)$. *Тогда для решения задачи* (15) – (16) *имеет место априорная оценка*

$$\frac{1}{\varepsilon^{q'}}\sum_{t=0}^{t'}\tau[\|y^-_\varepsilon(t)\|^q_{L_q(\Omega)} + \|y^-_\varepsilon(t)\|^q_{L_q(\Pi)}] \leq c \quad \forall t'\in\omega_\tau. \tag{28}$$

Доказательство. В равенстве (16) положим $v(x)=-\hat{y}^-_\varepsilon(t)$, умножим на τ и просуммируем по t от 0 до $t'-\tau$. В результате будем иметь

$$\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\int_\Omega\frac{\omega_1(\hat{y}_\varepsilon(t))-\omega_1(y_\varepsilon(t))}{\tau}(-\hat{y}^-_\varepsilon(t))\,dx +$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\int_{\Pi}\frac{\omega_2(\hat{y}_\varepsilon(t))-\omega_2(y_\varepsilon(t))}{\tau}(-\hat{y}_\varepsilon^-(t))\,ds+\\
&+\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle A\hat{y}_\varepsilon(t),-\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle+\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle A_\Pi\hat{y}_\varepsilon(t),-\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle_\Pi+\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle\beta_1\hat{y}_\varepsilon(t),-\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle\beta_2\hat{y}_\varepsilon(t),-\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle_\Pi=\\
&=\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle f_{1\tau},-\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle+\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle f_{2\tau},-\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle_\Pi.
\end{aligned}\tag{29}
$$

Докажем справедливость неравенств

$$
I_i=\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\int_{\Omega_i}\frac{\omega_i(\hat{y}_\varepsilon(t))-\omega_i(y_\varepsilon(t))}{\tau}(-\hat{y}_\varepsilon^-(t))\,dx\geq 0,\quad i=1,2.\tag{30}
$$

Поскольку $\omega_i(0)=0$, то, как нетрудно проверить, имеют место соотношения

$$
(\omega_i(\hat{y}_\varepsilon)-\omega_i(y_\varepsilon))(-\hat{y}_\varepsilon^-)\geq J_i(-\hat{y}_\varepsilon^-)-J_i(-y_\varepsilon^-),\quad i=1,2.
$$

Поэтому

$$
I_i\geq J_i(-\hat{y}_\varepsilon^-(t'))-J_i(-u_0^-(x)),\quad i=1,2.
$$

Из последних неравенств, неотрицательности функционалов J_i и равенств $J_i(-u_0^-)=0$ следует (30).

Докажем, что

$$
\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle A\hat{y}_\varepsilon(t)-\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle\geq 0.\tag{31}
$$

Известно (напр., [4], с.47), что $\hat{y}_\varepsilon^-\in\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)$, если $\hat{y}_\varepsilon\in\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)$, причем

$$
\frac{\partial\hat{y}_\varepsilon^-}{\partial x_i}=-\frac{\partial\hat{y}_\varepsilon}{\partial x_i}\quad\text{в}\quad\Omega^-(t)=\{x\in\Omega\mid\hat{y}_\varepsilon(x,t)<0\}
$$

и

$$
\frac{\partial\hat{y}_\varepsilon^-}{\partial x_i}=0\quad\text{в}\quad\Omega^+(t)=\{x\in\Omega\mid\hat{y}_\varepsilon(x,t)\geq 0\}.
$$

Тогда

$$
\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle A\hat{y}_\varepsilon(t),-\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle=\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\int_{\Omega^-}\sum_{i=1}^{2}a_i(x,-\hat{y}_\varepsilon^-)K_i(x,-\nabla\hat{y}_\varepsilon^-)\frac{\partial(-\hat{y}_\varepsilon^-)}{\partial x_i}\,dx.
$$

Из последнего равенства и условия (10) следует (31). Аналогично доказывается, что

$$
\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle A_\Pi\hat{y}_\varepsilon,-\hat{y}_\varepsilon^-\rangle_\Pi\geq 0.\tag{32}
$$

Далее, нетрудно видеть, что

$$
\begin{aligned}
&\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle\beta_1\hat{y}_\varepsilon(t),-\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle=\sum_{t=0}^{t'}\tau\|y_\varepsilon^-(t)\|^q_{L_q(\Omega)},\\
&\sum_{t=0}^{t'-\tau}\tau\langle\beta_2\hat{y}_\varepsilon(t),-\hat{y}_\varepsilon^-(t)\rangle_\Pi=\sum_{t=0}^{t'}\tau\|y_\varepsilon^-(t)\|^q_{L_q(\Pi)}.
\end{aligned}
$$

Из этих равенств и неравенств (30)–(32) будем иметь

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'}\tau\|y_\varepsilon^-(t)\|^q_{L_q(\Omega)}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{t'}\tau\|y_\varepsilon^-(t)\|^q_{L_q(\Pi)}\le$$

$$\le\sum_{t=0}^{t'}\tau\|f_{1\tau}\|_{L_{q_1'}(\Omega)}\|y_\varepsilon^-(t)\|_{L_q(\Omega)}+\sum_{t=0}^{t'}\tau\|f_{2\tau}\|_{L_{q_1'}(\Pi)}\|y_\varepsilon^-(t)\|_{L_q(\Pi)}. \quad (33)$$

Умножим обе части неравенства (33) на $1/\varepsilon^{q'-1}$, результат преобразуем с помощью неравенства Юнга

$$(1-\frac{\varepsilon_1^q}{q})\frac{1}{\varepsilon^{q'}}\sum_{t=0}^{t'}\tau\|y_\varepsilon^-(t)\|_{L_q(\Omega)}+(1-\frac{\varepsilon_2^q}{q})\frac{1}{\varepsilon^{q'}}\sum_{t=0}^{t'}\tau\|y_\varepsilon^-(t)\|_{L_q(\Pi)}\le$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon_1^{q'}q'}\sum_{t=0}^{t'}\tau\|f_{1\tau}\|^{q'}_{L_{q'}(\Omega)}+\frac{1}{\varepsilon_2^{q'}q'}\sum_{t=0}^{t'}\tau\|f_{2\tau}\|^{q'}_{L_{q'}(\Pi)}.$$

Из последней оценки при $\varepsilon_i^q<q$ следует (28). $\square$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы* 2. *Тогда решение задачи* (15)–(16) *удовлетворяет неравенствам*

$$\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\int_{\Omega_i}[\omega_i(y_\varepsilon(t+k\tau))-\omega_i(y_\varepsilon(t))][y_\varepsilon(t+k\tau)-y_\varepsilon(t)]dx\le ck\tau\quad\forall k=1,2,3,\dots,\frac{T}{\tau},\quad i=1,2. \quad (34)$$

Доказательство. Равенство (16) просуммируем по t' от t до $t+(k-1)\tau$, где k — целое число ($1\le k\le\frac{T}{\tau}$). В результате будем иметь

$$\frac{1}{\tau}\int_\Omega[\omega_1(y_\varepsilon(t+k\tau))-\omega_1(y_\varepsilon(t))]v(x)dx+\frac{1}{\tau}\int_\Pi[\omega_2(y_\varepsilon(t+k\tau))-\omega_2(y_\varepsilon(t))]v(s)ds+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}[\langle Ay_\varepsilon(t+j\tau),v(x)\rangle+\langle A_\Pi y_\varepsilon(t+j\tau),v(x)\rangle_\Pi+\frac{1}{\varepsilon}\langle\beta_1y_\varepsilon(t+j\tau),v(x)\rangle+\frac{1}{\varepsilon}\langle\beta_2y_\varepsilon(t+j\tau),v(x)\rangle_\Pi]=$$

$$=\sum_{j=1}^{k}[\langle f_{1\tau}(t+j\tau),v(x)\rangle+\langle f_{2\tau}(t+j\tau),v(x)\rangle_\Pi].$$

В этом равенстве положим $v(x)=y_\varepsilon(t+k\tau)-y_\varepsilon$, умножим его на τ и, просуммировав по t от 0 до $T-k\tau$, получим

$$\frac{1}{\tau}\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\int_\Omega[\omega_1(y_\varepsilon(t+k\tau))-\omega_1(y_\varepsilon(t))][y_\varepsilon(t+k\tau)-y_\varepsilon(t)]dx+$$

$$+\frac{1}{\tau}\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\int_\Pi[\omega_2(y_\varepsilon(t+k\tau))-\omega_2(y_\varepsilon(t))][y_\varepsilon(t+k\tau)-y_\varepsilon(t)]ds=$$

$$=\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\Big[\sum_{j=1}^{k}(-\langle Ay_\varepsilon(t+j\tau),y_\varepsilon(t+k\tau)-y_\varepsilon(t)\rangle-$$

$$-\langle A_\Pi y_\varepsilon(t+j\tau),y_\varepsilon(t+k\tau)-y_\varepsilon(t)\rangle_\Pi-\frac{1}{\varepsilon}\langle\beta_1y_\varepsilon(t+j\tau),y_\varepsilon(t+k\tau)-y_\varepsilon(t)\rangle-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\langle\beta_2y_\varepsilon(t+j\tau),y_\varepsilon(t+k\tau)-y_\varepsilon(t)\rangle_\Pi+$$

$$+\langle f_{1\tau},y_\varepsilon(t+k\tau)-y_\varepsilon(t)\rangle+\langle f_{2\tau},y_\varepsilon(t+k\tau)-y_\varepsilon(t)\rangle_\Pi\Big]. \quad (35)$$

Докажем, что правая часть в (35) ограничена величиной kc, где c — константа, не зависящая от h и τ. Для первого слагаемого имеем

$$I = \left| \sum_{t=0}^{T-k\tau} \sum_{j=1}^{k} \tau \langle Ay_\varepsilon(t+j\tau), y_\varepsilon(t+k\tau) - y_\varepsilon(t) \rangle \right| \le \delta_1 \Big[k\beta_0 T \operatorname{mes}(\Omega) +$$

$$+\beta_1 \sum_{j=1}^{k} \Big(\sum_{i=0}^{T-k\tau} \tau \|y_\varepsilon(t+k\tau)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)} \Big)^{1/p_1'} \Big] \Big[\Big(\sum_{t=0}^{T-k\tau} \tau \|y_\varepsilon(t+k\tau)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)} \Big)^{1/p_1} +$$

$$+ \Big(\sum_{t=0}^{T-k\tau} \tau \|y_\varepsilon(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)} \Big)^{1/p_1} \Big].$$

Из последнего неравенства и оценки (18) следует

$$I \le kc. \tag{36}$$

Аналогично оцениваются и остальные слагаемые правой части (35). Поэтому имеем

$$\frac{1}{\tau} \sum_{i=0}^{T-k\tau} \tau \int_\Omega [\omega_1(y_\varepsilon(t+k\tau)) - \omega_1(y_\varepsilon(t))][y_\varepsilon(t+k\tau) - y_\varepsilon(t)]dx +$$

$$+\frac{1}{\tau} \sum_{t=0}^{T-k\tau} \tau \int_\Pi [\omega_2(y_\varepsilon(t+k\tau)) - \omega_2(y_\varepsilon(t))][y_\varepsilon(t+k\tau) - y_\varepsilon(t)]ds \le kc.$$

Отсюда в силу монотонности функций $\omega_i, i = 1, 2$, очевидно, следуют оценки (34). $\square$

Обозначим, далее, через $\Pi_\tau^\pm y_\varepsilon(t)$ и $\Lambda_\tau y_\varepsilon(t)$ кусочно-постоянные и кусочно-линейные восполнения по t функции $y_\varepsilon(t)$, определенной на $\Omega \times \overline{\omega}_\tau$. Из оценок (17), (18) следует, что последовательности $\{\Pi_\tau^\pm y_\varepsilon(t)\}$ и $\{\Lambda_\tau y_\varepsilon(t)\}$ равномерно ограничены по τ и ε в $\overset{\circ}{V}(0,T)$ и $L_\infty(0,T; L_{\alpha_1}(\Omega))$, а последовательности следов этих функций на Π равномерно ограничены в $L_\infty(0,T; L_{\alpha_2}(\Pi))$. Поэтому найдется функция $u \in W(0,T)$ и подпоследовательности $\{\tau'\}$, $\{\varepsilon'\}$ такие, что

$$\Pi_{\tau'}^\pm y_{\varepsilon'}(t), \Lambda_{\tau'} y_{\varepsilon'}(t) \rightharpoonup u \text{ в } \overset{\circ}{V}(0,T), \tag{37}$$

$$\Pi_{\tau'}^\pm y_{\varepsilon'}(t), \Lambda_{\tau'} y_{\varepsilon'}(t) \rightharpoonup u \ *\text{-слабо в } L_\infty(0,T; L_{\alpha_1}(\Omega)), \tag{38}$$

$$\Pi_{\tau'}^\pm y_{\varepsilon'}(t), \Lambda_{\tau'} y_{\varepsilon'}(t) \rightharpoonup u \ *\text{-слабо в } L_\infty(0,T; L_{\alpha_2}(\Pi)). \tag{39}$$

Далее из (37)–(39) и оценки (34) следует (см. лемму 2 в [1]), что найдутся подпоследовательности $\{\tau''\}$, $\{\varepsilon''\}$, для которых при $\tau'', \varepsilon'' \to 0$ справедливы предельные соотношения

$$\Pi_{\tau''}^\pm \omega_1(y_{\varepsilon''}(t)) \to \omega_1(u) \text{ в } L_1(Q_T), \tag{40}$$

$$\Pi_{\tau''}^\pm \omega_2(y_{\varepsilon''}(t)) \to \omega_2(u) \text{ в } L_1(\Pi_T), \tag{41}$$

$$J_1(\Pi_{\tau''}^\pm y_{\varepsilon''}(t)) \to J_1(u) \text{ п.в. в } Q_T, \tag{42}$$

$$J_2(\Pi_{\tau''}^\pm y_{\varepsilon''}(t)) \to J_2(u) \text{ п.в. в } \Pi_T. \tag{43}$$

Из непрерывности и взаимной однозначности функций $J_i(u)$, а также из соотношений (42), (43) следует

$$\Pi_{\tau''}^\pm y_{\varepsilon''}(t) \to u \text{ п.в. в } Q_T \text{ и в } \Pi_T. \tag{44}$$

И, наконец, условия (9), (12) и оценка (18) обеспечивают существование таких подпоследовательностей $\{\tau'''\}$, $\{\varepsilon'''\}$, что

$$\Pi_{\tau'''}^\pm K_i(x, \nabla y_{\varepsilon'''}) \rightharpoonup \overline{K}_i \text{ в } L_{p_1'}(Q_T), \tag{45}$$

$$\Pi_{\tau'''}^\pm \varphi\Big(\frac{\partial y_{\varepsilon'''}(t)}{\partial s}\Big) \rightharpoonup \overline{\varphi} \text{ в } L_{p_2'}(\Pi_T). \tag{46}$$

В дальнейшем последовательности $\{\tau'''\}$, $\{\varepsilon'''\}$ будем обозначать $\{\tau\}$, $\{\varepsilon\}$.

Цель последующих рассуждений — доказать, что предельная функция u является решением задачи (1)–(3).

Введем линейный функционал $F_\tau(y_\varepsilon(t))$ со значением на элементе $v \in \overset{\circ}{V}$

$$\langle F_\tau(y_\varepsilon), v\rangle_* = \int_\Omega \omega_{1t}(y_\varepsilon(t))v\,dx + \int_\Pi \omega_{2t}(y_\varepsilon(t))v\,ds.$$

Покажем, что последовательность функционалов $\Pi_\tau^\pm F_\tau(y_\varepsilon(t))$ ограничена равномерно по τ и ε в пространстве $(\overset{\circ}{V}(0,T))^*$.

Имеем

$$\|\Pi_\tau^\pm F_\tau(y_\varepsilon)\|_{(\overset{\circ}{V}(0,T))^*} = \sup_{v\in\overset{\circ}{V}(0,T)} \frac{|\int_0^T\langle \Pi_\tau^+\omega_{1t}(y_\varepsilon), v\rangle dt + \int_0^T\langle \Pi_\tau^+\omega_{2t}(y_\varepsilon), v\rangle_\Pi dt|}{\|v\|_{L_{p_1}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega))} + \|v\|_{L_{p_2}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi))}}.$$

Учитывая, что $y_\varepsilon(t)$ является решением задачи (15)–(16), запишем равенство

$$\left|\int_0^T\langle \Pi_\tau^+\omega_{1t}(y_\varepsilon), v\rangle dt + \int_0^T\langle \Pi_\tau^+\omega_{2t}(y_\varepsilon), v\rangle_\Pi dt\right| =$$

$$= \Bigg|\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\Bigg[\int_\Omega\sum_{i=1}^2 a_i(x,\hat y_\varepsilon)K_i(x,\nabla\hat y_\varepsilon)\frac{\partial v_\tau}{\partial x_i}dx + \int_\Pi \psi(s,\hat y_\varepsilon)\varphi\bigg(\frac{\partial \hat y_\varepsilon}{\partial s}\bigg)\frac{\partial v_\tau}{\partial s}ds +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \beta_1\hat y_\varepsilon v_\tau dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Pi \beta_2\hat y_\varepsilon v_\tau ds - \langle f_{1\tau}, v_\tau\rangle - \langle f_{2\tau}, v_\tau\rangle_\Pi\Bigg]\Bigg|,$$

где $v_\tau = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} v(x,t)dt$. Каждое слагаемое правой части оценим сверху, используя неравенства Гёльдера и условия (8), (9), (12),

$$\left|\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\int_\Omega\sum_{i=1}^2 a_i(x,\hat y_\varepsilon)K_i(x,\nabla\hat y_\varepsilon)\frac{\partial v_\tau}{\partial x_i}dx\right| \le$$
$$\le \delta_1(\beta_0 T^{1/p_1'}(\mathrm{mes}\,\Omega)^{1/p_1'} + \beta_1\bigg(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|y_\varepsilon(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)}\bigg)^{1/p_1'} \le \|v\|_{L_{p_1}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega))},$$

$$\left|\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\int_\Pi \psi(s,\hat y_\varepsilon)\varphi\bigg(\frac{\partial \hat y_\varepsilon}{\partial s}\bigg)\frac{\partial v_\tau}{\partial s}ds\right| \le$$
$$\le \delta_3\bigg[\gamma_0 T^{1/p_2'}(\mathrm{mes}\,\Pi)^{1/p_2'} + \gamma_1\bigg(\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|y_\varepsilon(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}\bigg)^{1/p_2}\bigg]\|v\|_{L_{p_2}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi))},$$

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\int_{\Omega_i}\beta_i\hat y_\varepsilon v_{i\tau}\,dx\right| \le \bigg(\frac{1}{\varepsilon_{q'}}\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\|y_\varepsilon^-(t)\|^q_{L_q(\Omega_i)}\bigg)^{1/q'}\|v\|_{L_{p_i}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_i))},$$

$$\left|\sum_{t=0}^{T-\tau}\tau\langle f_{i\tau}, v_\tau\rangle_i\right| \le \|f_i\|_{L_q(Q_{iT})}\|v\|_{L_{p_i}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_i))};\quad i=1,2.$$

Здесь $Q_{1T} = Q_T, Q_{2T} = \Pi_T$. Полученные неравенства и оценки (18), (28) позволяют утверждать, что

$$\|\Pi_\tau^+ F_\tau(y_\varepsilon)\|_{(\overset{\circ}{V}(0,T))^*} \le c. \tag{47}$$

Из оценки (47) следует, что найдется такой элемент F, что

$$\Pi_\tau^+ F_\tau(y_\varepsilon) \rightharpoonup F \text{ в } (\overset{\circ}{V}(0,T))^*. \tag{48}$$

Выясним структуру предельного элемента F. Для этого, используя формулы суммирования по частям, запишем очевидное равенство

$$\int_0^T \langle \Pi_\tau^+ F_\tau(y_\varepsilon), \eta\rangle_* \Pi_\tau^+ z_\tau dt = \int_0^T \Big[\int_\Omega \Pi_\tau^+ \omega_{1t}(y_\varepsilon)\eta\, dx + \int_\Pi \Pi_\tau^+ \omega_{2t}(y_\varepsilon)\eta\, ds\Big] \Pi_\tau^+ z_\tau dt =$$

$$= \int_0^T \Big[-\int_\Omega \Pi_\tau^+ \omega_1(y_\varepsilon)\eta\, dx - \int_\Pi \Pi_\tau^+ \omega_2(y_\varepsilon)\eta\, ds\Big] \Pi_\tau^- z_{\tau\bar t} dt - \int_\Omega \omega_1(u_0(x))\eta z_\tau(0) dx - \int_\Pi \omega_2(u_0(x))\eta z_\tau(0) ds,$$

где $\eta \in \overset{\circ}{V}, z(t) \in C^\infty(0,T), z(T) = 0$ и $z_\tau(t) = z(t)$ для $t \in \overline{\omega}_\tau$. Учитывая соотношения (40), (41) и (48), в полученном равенстве перейдем к пределу при $\tau, \varepsilon \to 0$. В результате будем иметь

$$\int_0^T \langle F, \eta\rangle_* z(t) dt = -\int_0^T \Big[\int_\Omega \omega_1(u)\eta(x) dx + \int_\Pi \omega_2(u)\eta(s) ds\Big] \frac{dz}{dt} dt -$$

$$- \int_\Omega \omega_1(u_0(x))\eta(x) z(0) dx - \int_\Pi \omega_2(u_0(x))\eta(s) z(0) ds. \quad (49)$$

Выбирая в (49) $z(t) \in C_0^\infty(0,T)$, получим равенство

$$\int_0^T \langle F, \eta\rangle_* z(t) dt = -\int_0^T [\int_\Omega \omega_1(u)\eta(x) dx + \int_\Pi \omega_2(u)\eta(s) ds] \frac{dz}{dt} dt. \quad (50)$$

Заметим, что $\langle F, \eta\rangle_* \in L_p(0,T)$, где $p = \min\{p_1, p_2\}$. Из (50) следует, что функция $\langle F, \eta\rangle_*$ является обобщенной производной по t функции

$$\Psi(t) = \int_\Omega \omega_1(u)\eta(x) dx + \int_\Pi \omega_2(u)\eta(s) ds.$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\int_0^T \langle F, \eta\rangle_* z(t) dt = \int_0^T \frac{d\Psi(t)}{dt} z(t) dt = \int_0^T \Phi(u, \eta) z(t) dt. \quad (51)$$

Убедимся, что $u(x,0) = u_0(x)$. С этой целью в (51) выберем $z(t) \in C^\infty(0,T), z(T) = 0$ и преобразуем правую часть с помощью формулы интегрирования по частям. Получим равенство

$$\int_0^T \langle F, \eta\rangle_* z(t) dt = -\int_0^T \Big[\int_\Omega \omega_1(u)\eta(x) dx + \int_\Pi \omega_2(u)\eta(s) ds\Big] \frac{dz}{dt} dt -$$

$$- \int_\Omega \omega_1(u(x,0))\eta(x) z(0) dx - \int_\Pi \omega_2(u(x,0))\eta(s) z(0) ds.$$

Сравнивая полученное равенство с (49), будем иметь

$$\int_\Omega (\omega_1(u(x,0)) - \omega_1(u_0(x)))\eta(x) dx + \int_\Pi (\omega_2(u(x,0)) - \omega_2(u_0(x)))\eta(s) ds = 0.$$

Из последнего равенства в силу произвольности $\eta(x)$ и взаимной однозначности функций $\omega_i(u)$ следует $u(x,0) = u_0$ п. в.

Далее докажем, что функция $u(x,t) \in K$, т.е. $u(x,t) \geq 0$ п. в. в Q_T и п. в. в Π_T. Нетрудно убедиться, что из предельного соотношения (44) и оценки (19) следует

$$\Pi_\tau^\pm y_\varepsilon^- \to u^- \text{ п.в. в } Q_T \text{ и в } \Pi_T, \quad (52)$$

$$\Pi_\tau^\pm y_\varepsilon^- \rightharpoonup 0 \text{ в } L_q(Q_T), \quad (53)$$

$$\Pi_\tau^\pm y_\varepsilon^- \rightharpoonup 0 \text{ в } L_q(\Pi_T). \quad (54)$$

Из (52)–(54) получаем (см. лемму 1.19 в [5]), что $u^- = 0$ п. в. в Q_T и Π_T, т.е. $u \in K$.

Докажем, что функция u удовлетворяет неравенству (3). С этой целью в (16) положим $v_\tau(x) = \hat y_\varepsilon - \hat z_\tau$, где z_τ — снос в точки сетки $\hat\omega_\tau$ функции $z(x,t) \in C_0^\infty(Q_T)$ и $z(x,t) \geq 0$ п. в.

в Q_T и Π_T. Полученное равенство, используя кусочно-постоянные восполнения, запишем для произвольного t. Результат проинтегрируем по отрезку $[0, t_1]$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{t_1}\Big[\int_\Omega \Pi_\tau^+\omega_{1t}(y_\varepsilon)\Pi_\tau^\pm(\hat{y}_\varepsilon-\hat{z}_\tau)dx+\int_\Pi \Pi_\tau^+\omega_{2\tau}(y_\varepsilon)\Pi_\tau^\pm(\hat{y}_\varepsilon-\hat{z}_\tau)ds+\\
&+\int_\Omega\sum_{i=1}^2\Pi_\tau^\pm a_i(x,y_\varepsilon)\Pi_\tau^\pm K_i(x,\nabla y_\varepsilon)\Pi_\tau^\pm\frac{\partial(\hat{y}_\varepsilon-\hat{z}_\tau)}{\partial x_i}dx+\\
&+\int_\Pi \Pi_\tau^\pm\psi(s,\hat{y}_\varepsilon)\Pi_\tau^\pm\varphi\left(\frac{\partial\hat{y}_\varepsilon}{\partial s}\right)\Pi_\tau^\pm\frac{\partial(\hat{y}_\varepsilon-\hat{z}_\tau)}{\partial s}ds+\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\langle\Pi_\tau^\pm\beta_1\hat{y}_\varepsilon,\Pi_\tau^\pm(\hat{y}_\varepsilon-\hat{z}_\tau)\rangle+\frac{1}{\varepsilon}\langle\Pi_\tau^\pm\beta_2\hat{y}_\varepsilon,\Pi_\tau^\pm(\hat{y}_\varepsilon-\hat{z}_\tau)\rangle_\Pi\Big]dt=\\
&=\int_0^{t_1}[\langle\Pi_\tau^\pm f_{1\tau},\Pi_\tau^\pm(\hat{y}_\varepsilon-\hat{z}_\tau)\rangle+\langle\Pi_\tau^\pm f_{2\tau},\Pi_\tau^\pm(\hat{y}_\varepsilon-\hat{z}_\tau)\rangle_\Pi]dt.
\end{aligned}
\tag{55}
$$

Используя (21), получим

$$
\begin{aligned}
\int_0^{t_1}\int_{\Omega_i}\Pi_\tau^+\omega_{it}(y_\varepsilon)\Pi_\tau^\pm\hat{y}_\varepsilon dx\,dt\ge\frac{1}{\tau}\int_{t_1-\tau}^{t_1}\int_{\Omega_i}J_i(\Pi_\tau^\pm y_\varepsilon)dx\,dt-\int_{\Omega_i}J_i(u_0)dx\ge\\
\ge\int_{\Omega_i}J_i(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t_1))dx-\int_{\Omega_i}J_i(u_0(x))dx,\quad i=1,2.
\end{aligned}
\tag{56}
$$

Последнее неравенство в (56) следует из выпуклости $J_i(u)$ (см. [6]). Далее, воспользовавшись условием (11), будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{t_1}\int_\Omega\sum_{i=1}^2\Pi_\tau^\pm a_i(x,y_\varepsilon)\Pi_\tau^\pm K_i(x,\nabla y_\varepsilon)\Pi_\tau^\pm\frac{\partial(\hat{y}_\varepsilon-\hat{z}_\tau)}{\partial x_i}dx\,dt\ge\\
&\ge\int_0^{t_1}\int_\Omega\sum_{i=1}^2\Pi_\tau^\pm a_i(x,y_\varepsilon)\Pi_\tau^\pm K_i(x,\nabla z_\tau)\Pi_\tau^\pm\frac{\partial(\hat{y}_\varepsilon-\hat{z}_\tau)}{\partial x_i}dx\,dt.
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Аналогично получаем оценку

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{t_1}\int_\Pi \Pi_\tau^\pm\psi(s,\hat{y}_\varepsilon)\Pi_\tau^\pm\varphi\left(\frac{\partial\hat{y}_\varepsilon}{\partial s}\right)\Pi_\tau^\pm\frac{\partial(\hat{y}_\varepsilon-\hat{z}_\tau)}{\partial s}ds\,dt\ge\\
&\ge\int_0^{t_1}\int_\Pi \Pi_\tau^\pm\psi(s,\hat{y}_\varepsilon)\Pi_\tau^\pm\varphi\left(\frac{\partial\hat{z}_\tau}{\partial s}\right)\Pi_\tau^\pm\frac{\partial(\hat{y}_\varepsilon-\hat{z}_\tau)}{\partial s}ds\,dt.
\end{aligned}
\tag{58}
$$

В силу монотонности операторов β_i и неотрицательности z_τ имеют место неравенства

$$
\int_0^{t_1}\frac{1}{\varepsilon}\langle\Pi_\tau^\pm\beta_i\hat{y}_\varepsilon,\Pi_\tau^\pm(\hat{y}_\varepsilon-\hat{z}_\tau)\rangle_i\,dt\ge 0.
\tag{59}
$$

Подставляя (56)–(59) в (55), получим

$$
\int_\Omega(J_1(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t_1))-J_1(u_0(x)))dx+\int_\Pi(J_2(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t_1))-J_2(u_0(x)))ds+
$$

$$
+\int_0^{t_1}\int_\Omega\sum_{i=1}^{2}\Pi_\tau^{\pm}a_i(x,y_\varepsilon)\Pi_\tau^{\pm}K_i(x,\nabla z_\tau)\Pi_\tau^{\pm}\frac{\partial(\hat y_\varepsilon-\hat z_\tau)}{\partial x_i}dx+
$$
$$
+\int_0^{t_1}\int_\Pi\Pi_\tau^{\pm}\psi(s,\hat y_\varepsilon)\Pi_\tau^{\pm}\varphi\left(\frac{\partial\hat z_\tau}{\partial s}\right)\Pi_\tau^{\pm}\frac{\partial(\hat y_\varepsilon-\hat z_\tau)}{\partial s}ds\,dt-
$$
$$
-\int_0^{t_1}\int_\Omega\Pi_\tau^{+}\omega_{1t}(y_\varepsilon)\Pi_\tau^{\pm}\hat z_\tau dx\,dt-\int_0^{t_1}\int_\Pi\Pi_\tau^{+}\omega_{2t}(y_\varepsilon)\Pi_\tau^{\pm}\hat z_\tau ds\,dt\le
$$
$$
\le\int_0^{t_1}\langle\Pi_\tau^{\pm}f_{1\tau},\Pi_\tau^{\pm}(\hat y_\varepsilon-\hat z_\tau)\rangle dt+\int_0^{t_1}\langle\Pi_\tau^{\pm}f_{2\tau},\Pi_\tau^{\pm}(\hat y_\varepsilon-\hat z_\tau)\rangle_\Pi dt.
$$

В последнем неравенстве перейдем к пределу при $\varepsilon,\tau\to 0$

$$
I(t_1)=\int_0^{t_1}\Bigg[\langle f_1,u-z\rangle+\langle f_2,u-z\rangle_\Pi+
$$
$$
+\Phi(u,z)-\int_\Omega\sum_{i=1}^{2}a_i(x,u)K_i(x,\nabla z)\frac{\partial(u-z)}{\partial x_i}dx-
$$
$$
-\int_\Pi\psi(s,u)\varphi\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial(u-z)}{\partial s}ds\Bigg]dt\ge\lim_{\varepsilon,\tau\to0}\int_\Omega J_1(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t_1))dx+
$$
$$
+\lim_{\varepsilon,\tau\to0}\int_\Pi J_2(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t_1))ds-\int_\Omega J_1(u_0(x))dx-\int_\Pi J_2(u_0(s))ds. \tag{60}
$$

Очевидно, (60) будет справедливым и для любой функции $z(x,t)\in\overset{\circ}{V}(0,t)$. Неравенство (60) умножим на $1/\lambda$ ($\lambda=\mathrm{const}>0$), проинтегрируем по t_1 от $T-\lambda$ до T и перейдем к пределу при $\lambda\to0$. В результате будем иметь

$$
\lim_{\lambda\to0}\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}I(t_1)dt_1\ge\lim_{\lambda\to0}\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\Bigg\{\lim_{\varepsilon,\tau\to0}\int_\Omega J_1(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t_1))dx+
$$
$$
+\lim_{\varepsilon,\tau\to0}\int_\Pi J_2(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t_1))ds\Bigg\}dt_1-\int_\Omega J_1(u_0(x))dx-\int_\Pi J_2(u_0(s))ds. \tag{61}
$$

Заметим, что из выпуклости и непрерывности $J_i(\xi), i=1,2$, следует слабая полунепрерывность снизу на $L_\infty(0,T;L_{\alpha_i}(\Omega_i))$ функционалов $\int_{T-\lambda}^{T}\int_{\Omega_i}J_i(\xi)dx\,dt$. Поэтому

$$
\int_{T-\lambda}^{T}\lim_{\varepsilon,\tau\to0}\int_{\Omega_i}J_i(\Lambda_\tau y_\varepsilon(t_1))dx\,dt_1\ge\int_{T-\lambda}^{T}\int_{\Omega_i}J_i(u(t))dx\,dt.
$$

Левую часть (61) преобразуем с помощью теоремы о среднем. В результате будем иметь

$$
I(T)\ge\lim_{\lambda\to0}\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\left(\int_\Omega J_1(u)dx+\int_\Pi J_2(u)ds\right)dt-\int_\Omega J_1(u_0(x))dx-\int_\Pi J_2(u_0(x))ds. \tag{62}
$$

Следуя лемме 1.5 из [7], нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$
\int_0^{T}\Phi(u,u)dt=\lim_{\lambda\to0}\frac{1}{\lambda}\int_{T-\lambda}^{T}\left[\int_\Omega J_1(u)dx+\int_\Pi J_2(u)ds\right]dt-
$$
$$
-\int_\Omega J_1(u_0(x))dx-\int_\Pi J_2(u_0(x))ds.
$$

Учитывая его, запишем неравенство (62) в виде

$$\int_0^T \Bigg[\Phi(u,u-z) + \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} a_i(x,u) K_i(x,\nabla z) \frac{\partial(u-z)}{\partial x_i} dx +$$

$$+ \int_\Pi \psi(s,u)\varphi\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)\frac{\partial(u-z)}{\partial s} ds\Bigg] dt \le \int_0^T [\langle f_1, u-z\rangle + \langle f_2, u-z\rangle_\Pi] dt. \tag{63}$$

Далее, стандартным образом доказывается, что из (63) следует неравенство (3). Таким образом, доказана

Теорема. *Пусть* $p = \min(p_1, p_2)$, *функции* ω_i, a_i, K_i, φ, ψ $(i = 1, 2)$ *удовлетворяют условиям* (4)–(14). *Тогда для любых функций* $f_1 \in L_{p'}(Q_T)$, $f_2 \in L_{p'}(\Pi_T)$, $u_0 \in \overset{\circ}{V} \cap L_{\alpha_1}(\Omega)$ *и* $u_0(x) \ge 0$ *п. в. в* Ω *и на* Π *существует хотя бы одно решение задачи* (1)–(3).

Литература

1. Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф. *О разрешимости одной задачи совместного движения поверхностных и подземных вод* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 9. – С. 16–27.
2. Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф. *О сходимости неявной разностной схемы для задачи совместного движения грунтовых и русловых вод с произвольной формой поперечного сечения русла реки* // Исследов. по прикладной матем. – Казань, 1990. – № 17. – С. 27–45.
3. Павлова М.Ф. *Исследование уравнений нестационарной нелинейной фильтрации* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. - № 8. – С. 1436–1446.
4. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. *Введение в вариационные неравенства и их приложения.* – М.: Мир, 1983. – 256 с.
5. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1978. – 336 с.
6. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – М.: Мир, 1972. – 588 с.
7. Alt H.W., Luckhaus S. *Quasilinear elliptic-parabolic differential equation* // Math. Z. – 1983. – Bd. 183. – № 3. – S. 311–341.

Казанский государственный университет

Поступила
18.09.1996