ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 8 (495)

УДК 517.958:532.5

С.Л. ТОНКОНОГ, Л.Д. ЭСКИН

О ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ СИММЕТРИЙ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ И ИХ ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЯХ, I

1. В [1] были исследованы приближенные симметрии уравнения (n нечетное)

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon\Phi(t,x,u,\sigma), \quad \sigma = uu_x,$$

описывающего динамику поверхности неньютоновской жидкости со степенным реологическим законом Оствальда – де Виля и балансом массы (поверхностным источником) $\varepsilon\Phi$ [2]. В частности, было показано, что уравнение (всюду ниже $\sigma = uu_x$)

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon[\zeta_1'(t)xu - (\tfrac{1}{2}x^2\theta_1'(t) + x\theta_2'(t))\sigma u^{-1} + f(t,u,\sigma)] \tag{1.1}$$

допускает с точностью $O(\varepsilon^2)$ приближенную группу симметрии с оператором

$$X = \partial_x + \varepsilon X_1, \quad X_1 = \varphi\partial_t + (\theta_1 x + \theta_2)\partial_x + \zeta_1 u\partial_u + \zeta_2\sigma\partial_\sigma,$$

где φ, θ_1, θ_2 — произвольные функции времени t, $f(t,u,\sigma)$ — произвольная функция своих аргументов, $\zeta_1 = \frac{(n+1)\theta_1-\varphi'}{2n+1}$, $\zeta_2 = \frac{\theta_1-2\varphi'}{2n+1}$.

Уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon\Big[\zeta_1 u - \Big(\theta_1 x + \theta_2 + \lambda\int\theta_1 dt\Big)\sigma u^{-1} + f(I,u,\sigma)\Big], \quad I = x+\lambda t, \tag{1.2}$$

допускает приближенную группу симметрии с оператором

$$X_\lambda = \partial_t - \lambda\partial_x + \varepsilon X_1. \tag{1.3}$$

Естественно поставить вопрос об условиях, обеспечивающих не только приближенную, но и точную инвариантность уравнений (1.1), (1.2) относительно групп с операторами X, X_λ соответственно и для найденных точно инвариантных уравнений построить их инвариантные решения. Именно этим задачам и посвящена данная работа.

В первой части работы (разделы 1–3) получены все точно инвариантные уравнения вида (1.1), (1.2), здесь же указаны и обыкновенные дифференциальные уравнения для их инвариантных решений. Во второй части работы (раздел 4) инвариантные решения изучаются с помощью методов качественной теории динамических систем. Продемонстрировано применение полученных результатов качественного анализа инвариантных решений для решения краевых задач для уравнений (1.1), (1.2).

С целью сокращения записи формул обозначим $p = \frac{n+2}{2n+1}$, $q = \frac{1}{2n+1}$, $r = \frac{2n+1}{5n+4}$.

2. С помощью инфинитезимального критерия точной инвариантности [3], [4] удается полностью решить вопрос об условиях точной инвариантности уравнения (1.1) относительно группы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00128).

с оператором $X = \partial_x + \varepsilon X_1$. А именно, можно доказать (мы опускаем достаточно громоздкие выкладки), что уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon\Big[(\zeta_1' x - \varphi^{-1}\int \theta_2\zeta_1' dt)u -$$

$$- \Big(\frac{1}{2}x^2\theta_1' + x\theta_2' - \varphi^{-1}\zeta_3\int \theta_2\theta_2'\zeta_3^{-1}dt\Big)\sigma u^{-1} + \zeta_5^{n+1}\psi(\zeta_4^{-1}u, \zeta_5^{-1}\sigma)\Big] \quad (2.1)$$

тогда и только тогда точно инвариантно относительно группы с оператором X, когда функции φ, θ_1, θ_2 удовлетворяют системе уравнений

$$(\varphi\theta_1')' + \theta_1'\theta_1 = 0, \quad (\varphi\zeta_1')' + \theta_1\zeta_1' = 0, \quad (\varphi\theta_2')' + \theta_2\theta_1' = 0. \quad (2.2)$$

Для сокращения записи были введены обозначения

$$\zeta_3 = \exp\int \theta_1\varphi^{-1}dt, \quad \zeta_4 = \exp\int \zeta_1\varphi^{-1}dt, \quad \zeta_5 = \exp\int \zeta_2\varphi^{-1}dt.$$

Основной задачей раздела 2 является построение инвариантных решений уравнения (2.1). С этой целью прежде всего отметим, что для любого решения φ, θ_1, θ_2 системы уравнений (2.2) справедливы соотношения

$$\begin{gathered}\zeta_1' = C_1(\varphi\zeta_3)^{-1}, \ \ \theta_1' = C_2(\varphi\zeta_3)^{-1}, \ \ C_1C_2^{-1}\theta_1 - \zeta_1 = C_3, \ \ \varphi\theta_1' + \tfrac{1}{2}\theta_1^2 = C_4, \\ \varphi(\theta_1\theta_2' - \theta_2\theta_1') = C_5, \quad \textstyle\int \theta_2\theta_2'\zeta_3^{-1}dt = -\frac{1}{2C_2}(\varphi\theta_2')^2,\end{gathered} \quad (2.3)$$

где константы C_k, $k = \overline{1,5}$, определяются выбором решения.

Инвариантное решение уравнения (2.1) следует искать в виде

$$u = \chi_1(J)\zeta_4, \quad \sigma = \chi_2(J)\zeta_5, \quad (2.4)$$

где инвариант $J = x\zeta_3^{-1} - C_2^{-1}(\varepsilon^{-1}\theta_1 - \varphi\theta_2')$, а неизвестные функции χ_1, χ_2 подлежат определению. После подстановки (2.4) в уравнение $\sigma = uu_x$ получим

$$\chi_2 = \chi_1\chi_1' \quad (2.5)$$

(здесь и далее функции χ_1, χ_2 дифференцируются по аргументу J).

Чтобы получить второе уравнение для определения функций χ_1, χ_2, следует подставить (2.4) в уравнение (2.1). С этой целью вычислим, учитывая равенства (2.4) и соотношения (2.3),

$$u_t = \zeta_1\varphi^{-1}u - \chi_1'\zeta_4(C_2\varphi)^{-1}\Big(C_2\theta_1 J + \frac{\theta_1^2}{2\varepsilon} + C_4\varepsilon^{-1} - C_5\Big), \quad (2.6)$$

$$(u^2\sigma^n)_x = \varphi^{-1}\zeta_4(\chi_1^2\chi_2^n)', \quad (2.7)$$

$$\varepsilon u\Big(x\zeta_1' - \varphi^{-1}\int \theta_2\zeta_1' dt\Big) = u\varphi^{-1}(\varepsilon C_1 J + C_3 + \zeta_1), \quad (2.8)$$

$$\varepsilon\sigma u^{-1}\Big(\zeta_3\varphi^{-1}\int \theta_2\theta_2'\zeta_3^{-1}dt - \frac{1}{2}x^2\theta_1' - x\theta_2'\Big) =$$

$$= -\varepsilon\zeta_4\varphi^{-1}\chi_1'[\tfrac{1}{2}(C_2J^2 + C_2^{-1}\varepsilon^{-2}\theta_1^2) + \varepsilon^{-1}\theta_1 J]. \quad (2.9)$$

Наконец, имеем

$$\zeta_5^{n+1}\psi(\zeta_4^{-1}u, \zeta_5^{-1}\sigma) = \zeta_4\varphi^{-1}\psi(\chi_1, \chi_2). \quad (2.10)$$

Подставляя соотношения (2.6)–(2.10) в уравнение (2.1), получим второе уравнение для определения функций χ_1, χ_2

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' + \Big(\frac{C_1}{\varepsilon C_2} - \frac{C_5}{C_2} - \frac{1}{2}\varepsilon C_2 J^2\Big)\chi_1' + (C_3 + \varepsilon C_1 J)\chi_1 + \varepsilon\psi(\chi_1, \chi_2) = 0. \quad (2.11)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. *Каждому решению φ, θ_1, θ_2 системы уравнений (2.2) соответствует инвариантное относительно группы с оператором X уравнение (2.1). Его инвариантное решение имеет вид (2.4), где функции χ_1, χ_2 являются любым решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.5), (2.11) (постоянные C_k, $k=\overline{1,5}$, определяются выбранным решением системы (2.2) согласно формулам (2.3)).*

Выберем функцию ψ в уравнении (2.1) в виде

$$\psi=\varepsilon^{-1}[C_2^{-1}(C_5-\varepsilon^{-1}C_4)\zeta_5^{-1}\sigma(\zeta_4^{-1}u)^{-1}-C_3\zeta_4^{-1}u]. \tag{2.12}$$

В этом случае для функции χ_1, определяющей инвариантное решение уравнения (2.1), получим

$$(\chi_1^{n+2}\chi_1'^{\,n})'-\frac{1}{2}\varepsilon C_2J^2\chi_1'+\varepsilon C_1J\chi_1=0. \tag{2.13}$$

Нетрудно заметить, что обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (2.13) допускает группу растяжений с оператором

$$J\frac{\partial}{\partial J}+p\chi_1\frac{\partial}{\partial\chi_1}. \tag{2.14}$$

Следовательно, оно допускает понижение порядка, а значит, приводится к динамической системе на плоскости. Чтобы осуществить такое сведéние, найдем, следуя известной методике [5], дифференциальные инварианты нулевого, первого и второго порядков группы с оператором (2.14). Они имеют соответственно вид

$$I_0=\chi_1J^{-p},\quad I_1=\chi_1'J^{(n-1)q},\quad I_2=\chi_1''J^{3nq}. \tag{2.15}$$

Из (2.15) получаем

$$\frac{dI_1}{dI_0}=(I_2+(n-1)qI_1)(I_1-pI_0)^{-1}. \tag{2.16}$$

Уравнение (2.13) записывается через инварианты (2.15) в виде

$$nI_0^{n+2}I_1^{n-1}I_2+(n+2)(I_0I_1)^{n+1}-\frac{1}{2}\varepsilon C_2I_1+\varepsilon C_1I_0=0.$$

Разрешив это уравнение относительно I_2 и подставив полученный результат в (2.16), придем после простых преобразований к дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dz}=\frac{P(z,y)}{Q(z,y)}, \tag{2.17}$$

где $z=I_0$, $y=J\frac{dI_0}{dJ}=I_1-pI_0$ — также дифференциальный инвариант первого порядка группы (2.14),

$$P=y[(n+2)z^{n+1}w^n+npz^{n+2}w^{n-1}]+r^{-1}z^{n+2}w^n+d_1y+d_2z,$$
$$Q=-nyz^{n+2}w^{n-1},$$
$$w=y+pz,\quad d_1=-\tfrac{1}{2}\varepsilon C_2,\quad d_2=\varepsilon(C_1-\tfrac{1}{2}pC_2).$$

Уравнение (2.17) можно переписать в виде динамической системы

$$\frac{dy}{dt}=P(z,y),\quad \frac{dz}{dt}=Q(z,y),$$

которая может быть исследована методами теории динамических систем на плоскости [6]. Отметим, что в случае равенства коэффициентов $C_1 = -C_2$ уравнение (2.13) решается в замкнутой форме; для $\varepsilon C_1 > 0$ и нечетного n получаем

$$\chi_1 = \left[\frac{\varepsilon C_1}{2} p^{-n} (J_0^{(n+2)/n} - J^{(n+2)/n})^n\right]^q, \quad J \le J_0.$$

Построенное решение является волной с подвижной точкой фронта

$$x_f = \zeta_3 (J_0 + C_2^{-1}(\varepsilon^{-1}\theta_1 - \varphi\theta_2')),$$

где (поскольку $C_1 = -C_2$)

$$\zeta_3 = \varphi^m \exp\left(-\frac{m}{q} C_3 \int \frac{dt}{\varphi}\right), \quad \theta_1 = m(\varphi' - q^{-1}C_3), \quad m = (3n+2)^{-1},$$

θ_2 определяется последним из уравнений (2.2), а функция φ из уравнения

$$m\varphi\varphi'' + \frac{m^2}{2}(\varphi' - q^{-1}C_3)^2 = C_4.$$

Отметим, что для построенного решения $u = \chi_1\zeta_4$ поток $u^{n+2}u_x^n$ при $x = x_f$ обращается в нуль. Приведем конкретный пример, положив $\varphi = (\frac{t}{l})^l$, $l = \frac{6n+4}{6n+5}$, $\theta_1 = \theta_2$, тогда $\theta_1 = m\varphi'$, $C_1 = \frac{m^2}{2}$, $C_3 = C_4 = C_5 = 0$. Получаем (после замены $x + 1$ на x), что уравнение

$$u_t = (u^{n+2}u_x^n)_x + \frac{\varepsilon m^2}{2}\left(\frac{t}{l}\right)^{-1-\frac{lm}{2}}\left(xu + \frac{1}{2}x^2\frac{\sigma}{u}\right)$$

имеет решение

$$u = \chi_1\zeta_4 = \left(\frac{t}{l}\right)^{-lm}\left[\frac{\varepsilon m^2}{4} p^{-n}(J_0^{(n+2)/n} - J^{(n+2)/n})^n\right]^q, \quad J \le J_0 \quad \left(J = x\left(\frac{t}{l}\right)^{-lm} + \frac{2}{\varepsilon m}\left(\frac{t}{l}\right)^{-lm/2}\right)$$

— волну с точкой фронта $x_f = J_0(\frac{t}{l})^{ml} - \frac{2}{m\varepsilon}(\frac{t}{l})^{\frac{ml}{2}}$. На больших временах ($t \gg 1$) при $J_0 > 0$ точка фронта x_f движется вправо (волна наступает), при $J_0 < 0$ — влево (волна отступает).

3. Перейдем к уравнению (1.2). С помощью инфинитезимального критерия точной инвариантности можно показать (снова опускаем достаточно громоздкие выкладки), что уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon\left[(\zeta_1 + \beta)u + \left(\gamma - \theta_2 - \lambda\int\theta_1 dt + (\delta - \theta_1)x + \delta\lambda t\right)\sigma u^{-1} + f(I, u, \sigma)\right] \tag{3.1}$$

тогда и только тогда инвариантно относительно группы с оператором (1.3), когда функции φ, θ_1, θ_2 удовлетворяют системе интегродифференциальных уравнений (β, γ, δ — произвольные постоянные)

$$(\varphi(\zeta_1 + \beta))' = 0, \quad ((\delta - \theta_1)\varphi)' = 0, \tag{3.2}$$

$$\delta(\theta_2 + \lambda(\varphi - t\theta_1)) - \gamma(\theta_1 - \varphi') = \left[\varphi\left(\theta_2 + \lambda\int\theta_1 dt\right) - \frac{\lambda}{2}\left(\int\theta_1 dt\right)^2\right]' - \lambda t(\varphi\theta_1)', \tag{3.3}$$

а функция f является любым решением однородного уравнения

$$(\lambda\varphi + \theta_1 x + \theta_2)\frac{\partial f}{\partial I} + \zeta_1 u\frac{\partial f}{\partial u} + \zeta_2\sigma\frac{\partial f}{\partial\sigma} - (n+1)\zeta_2 f = 0, \tag{3.4}$$
$$I = x + \lambda t,$$

зависящим лишь от аргументов I, u, σ.

Обозначим

$$\eta[v] = \exp\left(\varepsilon \int \frac{v\, dt}{1+\varepsilon\varphi}\right), \quad v = v(t), \quad \eta = \eta[-\theta_1].$$

В силу (1.3) инвариантное решение уравнения (3.1) следует искать в виде

$$u = \chi_1(J)\eta[\zeta_1], \quad \sigma = \chi_2(J)\eta[\zeta_2], \tag{3.5}$$

где

$$J = x\eta - \int \frac{\varepsilon\theta_2 - \lambda}{1+\varepsilon\varphi}\eta\, dt \tag{3.6}$$

— инвариант группы X_λ (при $\varepsilon = 0$ $J = x + \lambda t = I$ — инвариант группы с оператором $\partial_t - \lambda\partial_x$), а неизвестные функции χ_1, χ_2 подлежат определению. Подстановка (3.5) в уравнение $\sigma = uu_x$ дает

$$\chi_2 = \chi_1\chi_1'. \tag{3.7}$$

Чтобы получить второе уравнение для определения функций χ_1, χ_2, подставим (3.5) в уравнение (3.1). Отметим, что из (3.2) следует

$$\varphi(\zeta_1 + \beta) = C_1, \quad (\delta - \theta_1)\varphi = C_2, \tag{3.8}$$

C_1, C_2 — константы, которые определяются выбором решения φ, θ_1, θ_2 системы (3.2), (3.3). С учетом соотношений (3.6)–(3.8) найдем

$$u_t = (1+\varepsilon\varphi)^{-1}[\varepsilon\zeta_1 u + (\lambda - \varepsilon(\theta_1 x + \theta_2))\chi_1'\eta[\zeta_1 - \theta_1]],$$
$$(u^2\sigma^n)_x + \varepsilon f = ((\chi_1^2\chi_2^n)' + \varepsilon f_1)\eta[(n+1)\zeta_2],$$
$$f_1 = f\eta[-(n+1)\zeta_2], \quad \sigma u^{-1} = \chi_1'\eta[\zeta_2 - \zeta_1].$$

После подстановки этих равенств в уравнение (3.1) получим дифференциальное уравнение

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' + F(t,x)\chi_1' + \varepsilon(\beta + \varepsilon C_1)\chi_1 + \varepsilon f_1 = 0, \tag{3.9}$$

где

$$F(t,x) = \left[\varepsilon\left(\gamma - \lambda\int\theta_1 dt + \delta I\right)(1+\varepsilon\varphi) - \varepsilon^2\varphi(\theta_1 x + \theta_2) - \lambda\right]\eta.$$

С помощью соотношения (3.6) и второго из равенств (3.8) нетрудно выразить функцию F через инвариант J. Найдем $F = \nu(t) + \varepsilon(\delta + \varepsilon C_2)J$, где

$$\nu(t) = \left[\varepsilon\left(\gamma - \lambda\int\theta_1 dt + \delta\lambda t\right)(1+\varepsilon\varphi) - \varepsilon^2\varphi\theta_2 - \lambda\right]\eta + \varepsilon(\delta + \varepsilon C_2)\int\frac{\varepsilon\theta_2 - \lambda}{1+\varepsilon\varphi}\eta\, dt. \tag{3.10}$$

Докажем, что в силу уравнений (3.3), (3.4) для функций φ, θ_1, θ_2 функция $\nu(t)$ является константой, $\nu(t) = C_3$. Константа C_3 определяется выбором решения φ, θ_1, θ_2. С этой целью вычислим производную ν'. С учетом второго из соотношений (3.8) и равенства

$$\frac{\delta + \lambda + \varepsilon C_2(\varepsilon\theta_2 - \lambda) + \varepsilon^2\varphi\theta_1\theta_2}{1+\varepsilon\varphi} = \lambda\theta_1 + \varepsilon\delta\theta_2 - \delta\lambda$$

имеем

$$\nu' = \varepsilon^2\eta\left[\varphi'\left(\gamma - \lambda\int\theta_1 dt + \delta\lambda t\right) + \lambda\varphi(\delta - \theta_1) - (\varphi\theta_2)' - \gamma\theta_1 + \lambda\theta_1\int\theta_1 dt - \delta\lambda t\theta_1 + \delta\theta_2\right].$$

С учетом уравнения (3.3) получаем $\nu' = \varepsilon^2\lambda t\eta(\delta\varphi - \varphi\theta_1)'$ и в силу (3.8) $\nu' = 0$. Итак, $F = C_3 + \varepsilon(\delta + \varepsilon C_2)J$ и уравнение (3.9) принимает вид

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' + (C_3 + \varepsilon(\delta + \varepsilon C_2)J)\chi_1' + \varepsilon(\beta + \varepsilon C_1)\chi_1 + \varepsilon f_1 = 0.$$

Перейдем к определению решений $f = f(I, u, \sigma)$ уравнения (3.4), которое для удобства перепишем в виде

$$(\lambda(\varphi - t\theta_1) + \theta_1 I + \theta_2) f_I + \zeta_1 u f_u + \zeta_2(\sigma f_\sigma - (n+1) f) = 0. \tag{3.11}$$

Переменная t играет роль параметра в уравнении (3.11) и f от t не зависит. При А) $\theta_1 \neq 0$, $\zeta_1 \neq 0$ общее решение уравнения (3.11) имеет вид

$$f = \sigma^{n+1}\psi\Big(\Big(I + \frac{\lambda(\varphi - t\theta_1) + \theta_2}{\theta_1}\Big)u^{-\theta_1/\zeta_1},\ \sigma u^{-\zeta_2/\zeta_1}\Big). \tag{3.12}$$

Возможны следующие варианты.

A_1) Функция $\psi = C = \mathrm{const}$.

1°. Получаем уравнение (3.1) с функцией $f = C\sigma^{n+1}$, допускающее группу с оператором X_λ (1.3), функции φ, θ_1, θ_2 должны удовлетворять лишь системе уравнений (3.2), (3.3) (или, что то же самое, (3.8), (3.3)). Его инвариантное решение имеет вид (3.5), (3.6), причем

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' + (C_3 + \varepsilon(\delta + \varepsilon C_2)J)\chi_1' + \varepsilon(\beta + \varepsilon C_1)\chi_1 + \varepsilon C\chi_2^{n+1} = 0$$

(кроме того, здесь и всюду ниже $\sigma = uu_x$, $\chi_2 = \chi_1\chi_1'$; эти уравнения будем опускать).

A_2) Функция ψ зависит от обоих аргументов. Уравнение (3.4) будет иметь решение f (3.12), зависящее лишь от I, u, σ, тогда и только тогда, когда функции φ, θ_1, θ_2, кроме уравнений (3.3), (3.8), будут удовлетворять соотношениям

$$\zeta_1 = \mu\theta_1, \quad \lambda(\varphi - t\theta_1) + \theta_2 = \nu\theta_1, \tag{3.13}$$

μ, ν — константы. Обозначим $(n+1)\delta + (2n+1)\beta = a$, $(n+1)C_2 + (2n+1)C_1 = b$. Система уравнений (3.8), (3.3), (3.13) переопределена и будет совместной лишь при определенных соотношениях между параметрами β, γ, δ, C_1, C_2, λ, μ, ν. Ниже во всех случаях приводим

1) соотношения, возникающие между этими параметрами;

2) функции φ, θ_1, θ_2 (или определяющие их уравнения);

3) инвариантное уравнение вида (3.1);

4) оператор допускаемой уравнением группы;

5) инвариантное решение (3.5), инвариант (3.6) и уравнение для функций χ_1, χ_2.

Отметим, что всегда $\sigma = uu_x$, $\chi_2 = \chi_1\chi_1'$ и что в ряде случаев оказалось удобным в уравнении, операторе X_λ и инварианте J заменить $x + \nu$ на x.

Детальный анализ показывает, что будем иметь лишь следующие случаи (с учетом $\theta_1 \neq 0$).

2°.

1) $\mu = (n+1)q$, $\lambda = 0$, $\gamma = \delta\nu$;

2) $\varphi = \varphi_0 = \mathrm{const} \neq 0$, $a\varphi_0 = b$, $\theta_1 = \delta - \frac{C_2}{\varphi_0}$, $\theta_2 = \nu\theta_1$, $C_3 = 0$;

3) $u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon\varphi_0^{-1}(C_1 u + C_2 x\frac{\sigma}{u}) + \varepsilon\sigma^{n+1}\psi(u^{-1/\mu}x, \sigma u^{-\frac{1}{n+1}})$;

4) $(1 + \varepsilon\varphi_0)\partial_t + \varepsilon\theta_1(x\partial_x + \mu u\partial_u + (2\mu - 1)\sigma\partial_\sigma)$;

5) $u = \chi_1(J)\widetilde{\eta}^\mu$, $\sigma = \chi_2(J)\widetilde{\eta}^q$, $J = x\widetilde{\eta}^{-1}$, $\widetilde{\eta} = \exp\big(\varepsilon\frac{\theta_1 t}{1+\varepsilon\varphi_0}\big)$, $(\chi_1^2\chi_2^n)' + \varepsilon[(\delta + \varepsilon C_2)J\chi_1' + (\beta + \varepsilon C_1)\chi_1 + \chi_2^{n+1}\psi(J\chi_1^{-1/\mu}, \chi_2\chi_1^{-\frac{1}{n+1}})] = 0$.

3°.

1) $\mu = (n+1)q$, $C_1 = C_2 = C_3 = \lambda = 0$, $\gamma = \delta\nu$;

2) $\theta_1(t)$ — произвольная функция, $\theta_2 = \nu\theta_1$, $\varphi = 0$;

3) $u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon[(\mu\theta_1 + \beta)u + (\delta - \theta_1)x\frac{\sigma}{u} + \sigma^{n+1}\psi(xu^{-1/\mu}, \sigma u^{-\frac{1}{n+1}})]$;

4) $\partial_t + \varepsilon\theta_1(t)(x\partial_x + \mu u\partial_u + q\sigma\partial_\sigma)$;

5) $u = \chi_1\exp\big(\varepsilon\mu\int\theta_1 dt\big)$, $\sigma = \chi_2\exp\big(\varepsilon q\int\theta_1 dt\big)$, $J = x\exp\big(-\varepsilon\int\theta_1 dt\big)$, $(\chi_1^2\chi_2^n)' + \varepsilon(\delta J\chi_1' + \beta\chi_1 + \chi_2^{n+1}\psi(J\chi_1^{-1/\mu}, \chi_2\chi_1^{-\frac{1}{n+1}})) = 0$.

Пусть теперь $\mu \neq (n+1)q$, тогда $\varphi' \neq 0$, откуда $\delta\mu + \beta = \mu C_2 + C_1 = 0$ (следовательно, $a \neq 0$, если $\delta \neq 0$). Получаем следующие случаи.

4°.

1) $\beta=-nq\delta$, $C_1=-nqC_2$, $C_3=\varepsilon\gamma-\varepsilon\delta\nu-\lambda$;

2) $\delta\varphi-C_2=\varphi\varphi'$ (это уравнение для функции φ легко решается в неявном виде), $\theta_1=\varphi'$, $\theta_2=(\nu+\lambda t)\varphi'-\lambda\varphi$;

3) $u_t=(u^2\sigma^n)_x+\varepsilon\big[\frac{C_1}{\varphi}u+(\gamma-(\nu+\lambda t)\varphi'+C_2\varphi^{-1}x+\delta\lambda t)\frac{\sigma}{u}+\sigma^{n+1}\psi(u^{-\frac{1}{nq}}(I+\nu),\sigma u^{1/n})\big]$;

4) $\partial_t-\lambda\partial_x+\varepsilon[((x+\nu+\lambda t)\varphi'-\lambda\varphi)\partial_x+q\varphi'(nu\partial_u-\sigma\partial_\sigma)]$;

5) $u=\chi_1(1+\varepsilon\varphi)^{nq}$, $\sigma=\chi_2(1+\varepsilon\varphi)^{-q}$, $J=(I+\nu)(1+\varepsilon\varphi)^{-1}$, $(\chi_1^2\chi_2^n)'+(C_3+\varepsilon(\delta+\varepsilon C_2)J)\chi_1'+nq\varepsilon(\delta+\varepsilon C_2)\chi_1+\varepsilon\chi_2^{n+1}\psi(J\chi_1^{-1/nq},\chi_2\chi_1^{-1/n})=0$.

5°.

1) $\delta=-2\beta$, $C_2=-2C_1$, $C_3=-\lambda$, $\gamma=\delta\nu$;

2) $\delta\varphi-C_2=2\varphi\varphi'$, $\theta_1=2\varphi'$, $\theta_2=2(\nu+\lambda t)\varphi'-\lambda\varphi$;

3) $u_t=(u^2\sigma^n)_x+\varepsilon\big[-\frac{C_2}{2\varphi}u+((\delta-2\varphi')I-\lambda\varphi)\frac{\sigma}{u}+\sigma^{n+1}\psi(u^{-2}I,\sigma)\big]$;

4) $\partial_t-\lambda\partial_x+\varepsilon[(2\varphi'I-\lambda\varphi)\partial_x+\varphi'u\partial_u]$;

5) $u=\chi_1(1+\varepsilon\varphi)$, $\sigma=\chi_2$, $J=I(1+\varepsilon\varphi)^{-2}$, $(\chi_1^2\chi_2^n)'+(-\lambda+\varepsilon(\delta+\varepsilon C_2)J)\chi_1'-\frac{\varepsilon}{2}(\delta+\varepsilon C_2)\chi_1+\varepsilon\chi_2^{n+1}\psi(\chi_1^{-2}J,\chi_2)=0$.

6°.

1) $\gamma=\delta\nu$, $\lambda=0$, $\delta C_1=\beta C_2$, $C_3=0$;

2) $a(\delta\varphi-C_2)=\delta\varphi\varphi'$, $\theta_1=\frac{\delta\varphi'}{a}$, $\theta_2=\frac{\gamma\varphi'}{a}$;

3) $u_t=(u^2\sigma^n)_x+\varepsilon\big[\frac{C_1}{\varphi}u+\delta(1-\frac{\varphi'}{a})x\frac{\sigma}{u}+\sigma^{n+1}\psi(xu^{\delta/\beta},\sigma u^{-\frac{2\beta+\delta}{\beta}})\big]$;

4) $(1+\varepsilon\varphi)\partial_t+\varepsilon\delta a^{-1}(x\partial_x-\frac{\beta}{\delta}\varphi'u\partial_u-\frac{2\beta+\delta}{\delta}\sigma\partial_\sigma)$;

5) $u=\chi_1(1+\varepsilon\varphi)^{-\beta/a}$, $\sigma=\chi_2(1+\varepsilon\varphi)^{-\frac{2\beta+\delta}{a}}$, $J=x(1+\varepsilon\varphi)^{-\delta/a}$, $(\chi_1^2\chi_2^n)'+\varepsilon[(\delta+\varepsilon C_2)J\chi_1'+\beta(1+\varepsilon C_2\delta^{-1})\chi_1+\chi_2^{n+1}\psi(J\chi_1^{\delta/\beta},\chi_2\chi_1^{-\frac{2\beta+\delta}{\beta}})]=0$.

7°.

1) $\delta=\beta=\gamma=\lambda=0$, $C_1=1$, $\mu=-\frac{1}{C_2}$, $C_3=0$;

2) $\varphi\varphi'=-b$, $\theta_1=-C_2\varphi^{-1}$, $\theta_2=\nu\theta_1$;

3) $u_t=(u^2\sigma^n)_x+\varepsilon((u+C_2x\frac{\sigma}{u})\varphi^{-1}+\sigma^{n+1}\psi(xu^{C_2},\sigma u^{-(2+C_2)}))$;

4) $(1+\varepsilon\varphi)\partial_t-\varepsilon\varphi^{-1}(C_2x\partial_x-u\partial_u-(2+C_2)\sigma\partial_\sigma)$;

5) $u=\chi_1(1+\varepsilon\varphi)^{-1/b}$, $\sigma=\chi_2(1+\varepsilon\varphi)^{-\frac{2+C_2}{b}}$, $J=x(1+\varepsilon\varphi)^{-C_2/b}$, $(\chi_1^2\chi_2^n)'+\varepsilon^2(C_2J\chi_1'+\chi_1)+\varepsilon\chi_2^{n+1}\psi(J\chi_1^{C_2},\chi_2\chi_1^{-(2+C_2)})=0$.

A_3) Функция ψ зависит лишь от второго аргумента

$$f=\sigma^{n+1}\psi(\sigma u^{-\zeta_2/\zeta_1}). \tag{3.14}$$

Условие (3.13) сводится лишь к условию $\zeta_1=\mu\theta_1$, тогда $\zeta_2=\frac{2\mu-1}{\mu}\zeta_1$. Получаем следующие случаи.

8°.

1) $\mu=(n+1)q$;

2) $\varphi=\varphi_0=\mathrm{const}$, $\varphi_0\neq0$, $\theta_1=\delta-\frac{C_2}{\varphi_0}$, $a\varphi_0=b$, θ_2 определяется из уравнения $\varphi_0\theta_2'-\delta\theta_2=\lambda C_2-(\delta-\frac{C_2}{\varphi_0})(\gamma+\frac{\lambda C_2}{\varphi_0})$;

3) $u_t=(u^2\sigma^n)_x+\varepsilon[\frac{C_1}{\varphi_0}u+(\gamma-\theta_2+\frac{C_2}{\varphi_0}I)\frac{\sigma}{u}+\sigma^{n+1}\psi(\sigma u^{-\frac{1}{n+1}})]$;

4) $(1+\varepsilon\varphi_0)\partial_t+(-\lambda+\varepsilon((\delta-\frac{C_2}{\varphi_0})x+\theta_2))\partial_x+\varepsilon q(\delta-\frac{C_2}{\varphi_0})((n+1)u\partial_u+\sigma\partial_\sigma)$;

5) $u=\chi_1\exp(\varepsilon\frac{\zeta_1 t}{1+\varepsilon\varphi_0})$, $\sigma=\chi_2\exp(\varepsilon\frac{\zeta_2 t}{1+\varepsilon\varphi_0})$, $\zeta_1=(n+1)q(\delta-\frac{C_2}{\varphi_0})$, $\zeta_2=q(\delta-\frac{C_2}{\varphi_0})$, $(\chi_1^2\chi_2^n)'+(C_3+\varepsilon(\delta+\varepsilon C_2)J)\chi_1'+\varepsilon(\beta+\varepsilon C_1)\chi_1+\varepsilon\chi_2^{n+1}\psi(\chi_2\chi_1^{-\frac{1}{n+1}})=0$.

9°.

1) $\mu=(n+1)q$, $C_1=C_2=0$;

2) $\varphi=0$, θ_1 произвольно, $\delta(\theta_2-(\gamma+\lambda t)\theta_1)=-\lambda\theta_1\int\theta_1dt$ (при $\delta=\lambda=0$ $\theta_2(t)$ произвольно). Получим уравнение (3.1) с функцией f (3.14), допускающее группу с оператором X_λ, и

инвариантное решение (3.5), причем

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' + (C_3 + \varepsilon\delta J)\chi_1' + \varepsilon\beta\chi_1 + \varepsilon\chi_2^{n+1}\psi(\chi_2\chi_1^{-\frac{1}{n+1}}) = 0.$$

10°.

1) $\mu \neq (n+1)q$, $\varphi' \neq 0$, $C_2\mu = -C_1$, $C_1\delta = C_2\beta$. Обозначив $h = n + 1 - \mu(2n+1)$, найдем

2) $\theta_1 = \frac{\varphi'}{h}$, φ и θ_2 определяются из уравнений $\delta\varphi - C_2 = \frac{\varphi\varphi'}{h}$, $(\varphi\theta_2)' - \delta\theta_2 = h^{-1}((2h-1)\lambda C_2 + (h-1)((\gamma + \delta\lambda t)\varphi' - \delta\lambda\varphi))$. Снова получим уравнение (3.1) с функцией (3.14), оператор

$$\partial_t - \lambda\partial_x + \varepsilon[\theta_2\partial_x + h^{-1}\varphi'(x\partial_x + \mu u\partial_u + (2\mu-1)\sigma\partial_\sigma)],$$

инвариантное решение (3.5), уравнение для χ_1, χ_2

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' + (C_3 + \varepsilon(\delta + \varepsilon C_2)J)\chi_1' + \varepsilon(\beta + \varepsilon C_1)\chi_1 + \varepsilon\chi_2^{n+1}\psi(\chi_2\chi_1^{-\frac{2\mu-1}{\mu}}) = 0.$$

В случае, когда функция ψ зависит лишь от первого аргумента, снова необходимо требовать выполнения обоих условий (3.13), поэтому данный случай входит в вариант А$_2$).

В варианте В) $\theta_1 = 0$, $\zeta_1 = -q\varphi' \neq 0$, $\zeta_2 = 2\zeta_1$, $\eta = 1$, общее решение уравнения (3.4) имеет вид

$$f = \sigma^{n+1}\psi\Big(u\exp\Big(-\frac{\zeta_1 I}{\lambda\varphi + \theta_2}\Big), \sigma u^{-2}\Big).$$

Получаем два случая.

11°. Функция ψ зависит лишь от второго аргумента. Из (3.3), (3.8) находим

1) $\delta = C_2 = 0$;

2) функция φ удовлетворяет уравнению

$$\beta - \frac{C_1}{\varphi} = q\varphi', \tag{3.15}$$

$\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \gamma - \frac{\varkappa}{\varphi}$, $\varkappa = \text{const}$, $C_3 = \varepsilon\gamma + \varepsilon^2\varkappa - \lambda$;

3) $u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon((C_1 u + \varkappa\frac{\sigma}{u})\varphi^{-1} + \sigma^{n+1}\psi(\sigma u^{-2}))$;

4) $(1+\varepsilon\varphi)\partial_t + (-\lambda + \varepsilon(\gamma - \frac{\varkappa}{\varphi}))\partial_x - \varepsilon q\varphi'(u\partial_u + 2\sigma\partial_\sigma)$;

5)
$$u = \chi_1(J)(1+\varepsilon\varphi)^{-q}, \quad \sigma = \chi_2(J)(1+\varepsilon\varphi)^{-2q}, \tag{3.16}$$

$$J = x - \int \frac{\varepsilon(\gamma - \frac{\varkappa}{\varphi}) - \lambda}{1 + \varepsilon\varphi} dt,$$

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' + (\varepsilon\gamma + \varepsilon^2\varkappa - \lambda)\chi_1' + \varepsilon(\beta + \varepsilon C_1)\chi_1 + \varepsilon\chi_2^{n+1}\psi(\chi_2\chi_1^{-2}) = 0.$$

12°. Функция ψ зависит от обоих аргументов (или только от первого аргумента). Условия (3.13) следует заменить одним условием $\lambda\varphi + \theta_2 = \nu\zeta_1$. В результате получаем

1) $\delta = C_2 = \lambda = 0$, $\gamma + \nu\beta = 0$;

2) функция φ определяется из уравнения (3.15), $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = -\nu q\varphi'$, $C_3 = -\varepsilon\nu(\beta + \varepsilon C_1)$;

3) $u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon(C_1(u - \nu\frac{\sigma}{u})\varphi^{-1} + \sigma^{n+1}\psi(u\exp(-\frac{x}{\nu}), \sigma u^{-2}))$;

4) $(1+\varepsilon\varphi)\partial_t - \varepsilon q\varphi'(\nu\partial_x + u\partial_u + 2\sigma\partial_\sigma)$;

5) инвариантное решение имеет вид (3.16), причем $J = x + \nu q\ln(1+\varepsilon\varphi)$, $(\chi_1^2\chi_2^n)' - \varepsilon(\beta + \varepsilon C_1)(\nu\chi_1' - \chi_1) + \varepsilon\chi_2^{n+1}\psi(\chi_1\exp(-\frac{J}{\nu}), \chi_2\chi_1^{-2}) = 0$.

Вариант $\zeta_1 \neq 0$ рассмотрен полностью. Перейдем к варианту

С) $\zeta_1 = 0$, $\theta_1 \neq 0$, следовательно, $\theta_1 = \frac{\varphi'}{n+1}$, $\varphi' \neq 0$, $\zeta_2 = -\theta_1$.

Общее решение уравнения (3.11)

$$f = \sigma^{n+1}\psi\Big(\sigma\Big(\frac{\theta_2 + \lambda(\varphi - t\theta_1)}{\theta_1} + I\Big), u\Big)$$

и условия (3.13) необходимо заменить одним условием

$$\theta_2 + \lambda(\varphi - t\theta_1) = \nu\theta_1, \quad \nu = \text{const}. \tag{3.17}$$

Анализ уравнений (3.3), (3.8), (3.17) показывает, что возможен единственный случай
13°.

1) $\beta = C_1 = \lambda = 0$, $\gamma = \nu\delta$;

2) φ удовлетворяет уравнению $\delta\varphi - C_2 = \frac{\varphi'\varphi}{n+1}$, $\theta_1 = \frac{\varphi'}{n+1}$, $\theta_2 = \frac{\nu\varphi'}{n+1}$, $C_3 = 0$;

3) $u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon((\delta - \frac{\nu\varphi'}{n+1})x\frac{\sigma}{u} + \sigma^{n+1}\psi(\sigma x, u))$;

4) $(1+\varepsilon\varphi)\partial_t + \frac{\varepsilon\varphi'}{n+1}(x\partial_x - \sigma\partial_\sigma)$;

5) $u = \chi_1(J)$, $\sigma = \chi_2(J)(1+\varepsilon\varphi)^{-\frac{1}{n+1}}$, $J = x(1+\varepsilon\varphi)^{-\frac{1}{n+1}}$, $(\chi_1^2\chi_2^n)' + \varepsilon(\delta + \varepsilon C_2)J\chi_1' + \varepsilon\chi_2^{n+1}\psi(\chi_2 J, \chi_1) = 0$.

Остается рассмотреть последнюю возможность —

D) $\zeta_1 = 0$, $\theta_1 = 0$, следовательно, $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, $\zeta_2 = 0$, $\delta\varphi_0 = C_2$, $\beta\varphi_0 = C_1$.

Возможны два варианта.

D$_1$) $\theta_2 = -\lambda\varphi_0$, из уравнения (3.4) находим $f = f(I,u,\sigma)$ — произвольную функцию своих аргументов. В результате получим тривиальный результат (слагаемое $\beta u + (\gamma + \lambda\varphi_0 + \delta I)\frac{\sigma}{u}$ включено в функцию f).
14°.

1) $\beta\varphi_0 = C_1$, $\delta\varphi_0 = C_2$;

2) $\varphi = \varphi_0$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = -\lambda\varphi_0$; уравнение $u_t = (u^2\sigma^n)_x + f(I,u,\sigma)$ допускает группу с оператором $\partial_t - \lambda\partial_x$. Его инвариантное решение — бегущая волна $u = \chi_1(I)$, $\sigma = \chi_2(I)$, $(\chi_1^2\chi_2^n)' - \lambda\chi_1' + f(I,\chi_1,\chi_2) = 0$.

D$_2$) $\theta_2 \neq -\lambda\varphi_0$, тогда $f = f(u,\sigma)$, θ_2 определяется из уравнения $\delta(\theta_2 + \lambda\varphi_0) = \varphi_0\theta_2'$. Возможны следующие случаи.
$\widetilde{14}$°.

1) $\delta \neq 0$, $C_1 = C_2 = \varphi_0 = 0$;

2) $\varphi = \theta_1 = \theta_2 = 0$. Этот случай сводится к случаю 14° с $f = f(u,\sigma)$.
15°.

1) $\delta = \varphi_0 = 0$;

2) $\varphi = \theta_1 = 0$, θ_2 — произвольная функция. Получаем уравнение

$$u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon\Big(- \theta_2\frac{\sigma}{u} + f(u,\sigma)\Big) \tag{3.18}$$

(снова включили в f слагаемое $\beta u + \gamma\frac{\sigma}{u}$), оператор $\partial_t + (-\lambda + \varepsilon\theta_2)\partial_x$ и инвариантное решение $u = \chi_1(J)$, $\sigma = \chi_2(J)$,

$$(\chi_1^2\chi_2^n)' - \lambda\chi_1' + f(\chi_1,\chi_2) = 0, \quad J = I - \varepsilon\int\theta_2 dt. \tag{3.19}$$

16°.

1) $\delta = 0$;

2) $\varphi = \varphi_0 \neq 0$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \theta_{20} = \text{const}$. Получаем уравнение (3.18) ($\theta_2 = \theta_{20}$), оператор $(1+\varepsilon\varphi_0)\partial_t + (-\lambda + \varepsilon\theta_{20})\partial_x$. Для инвариантного решения $u = \chi_1(J)$, $\sigma = \chi_2(J)$ снова имеем уравнение (3.19).
17°.

1) $\delta \neq 0$, $\delta^{-1}C_2 = \varphi_0 \neq 0$;

2) $\varphi = \varphi_0$, $\theta_1 = \zeta_1 = \zeta_2 = 0$, $\theta_2 = -\lambda\varphi_0 + C\exp\frac{\delta t}{\varphi_0}$;

3) $u_t = (u^2\sigma^n)_x + \varepsilon((\delta I - C\exp\frac{\delta t}{\varphi_0})\frac{\sigma}{u} + f(u,\sigma))$, слагаемое $\beta u + (\gamma + \lambda\varphi_0)\frac{\sigma}{u}$ включено в f;

4) $\partial_t + \big(- \lambda + \frac{\varepsilon C\exp\frac{\delta t}{\varphi_0}}{1+\varepsilon\varphi_0}\big)\partial_x$;

5) $u = \chi_1(J)$, $\sigma = \chi_2(J)$, $J = I - \frac{\varepsilon C\varphi_0}{\delta(1+\varepsilon\varphi_0)}\exp\frac{\delta t}{\varphi_0}$, $(\chi_1^2\chi_2^n)' + (\varepsilon\delta J - \lambda)\chi_1' + f(\chi_1,\chi_2) = 0$.

Итак, доказана

Теорема 2. *Все возможности точно инвариантных относительно группы с оператором* X_λ (1.3) *уравнений* (3.1) *исчерпываются случаями* 1°–17°.

Полученные уравнения для инвариантных решений (для функций χ_1, χ_2) при $f=0$, $C_3=0$ допускают группу растяжений, следовательно, и понижение порядка. Рассмотрим, например, уравнение для функции χ_1 в случае 2°, записав его в виде

$$(\chi_1^{n+2}{\chi_1'}^n)' + \varepsilon[(\delta+\varepsilon C_2)J\chi_1' + (\beta+\varepsilon C_1)\chi_1] = 0. \tag{3.20}$$

Уравнение (3.20) допускает группу растяжений с оператором $J\partial_J + (n+1)q\chi_1\partial_{\chi_1}$, ее дифференциальные инварианты $I_0 = \chi_1 J^{-(n+1)q}$, $I_1 = \chi_1' J^{nq}$, $I_2 = \chi_1'' J^{(3n+1)q}$. Рассуждая, как при выводе уравнения (2.17) и обозначая $z = I_0$, $y = J\frac{dI_0}{dJ}$, $w = y + (n+1)qz$, получим из (3.20) уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dz} = \frac{P(z,y)}{Q(z,y)}, \tag{3.21}$$

где

$$P = y[(n+2)z^{n+1}w^n + n(n+1)qz^{n+2}w^{n-1}] + (3n+2)qz^{n+2}w^n + \varepsilon(d_1y + d_2z),$$
$$Q = -nyz^{n+2}w^{n-1}, \quad d_1 = \delta + \varepsilon C_2, \quad d_2 = \beta + \varepsilon C_1 + (n+1)qd_1.$$

Исследование уравнения (3.21) методами теории динамических систем аналогично исследованию уравнения (2.17).

Литература

1. Тонконог С.Л. *Приближенный групповой анализ уравнений динамики субизотермических ледников* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 4. – С. 33–47.
2. Саламатин А.Н., Чугунов В.А., Мазо А.Б. *Численное исследование и инвариантные решения задачи о динамике субизотермического ледника в одномерном приближении* // Задачи механ. природных процессов. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – С. 82–95.
3. Овсянников Л.В. *Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений.* – Новосибирск, 1966. – 131 с.
4. Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике.* – М.: Наука, 1983. – 280 с.
5. Ибрагимов Н.Х. *Опыт группового анализа.* – М.: Знание, 1991. – 48 с.
6. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.* – М.: Наука, 1990. – 488 с.

Казанский государственный университет

Поступил окончательный вариант 27.03.2003