ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 9 (532)

УДК 517.51

*Г.В. ХРОМОВА*

# О МОДУЛЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Исследуется вопрос о получении точных по порядку оценок модулей непрерывности неограниченных операторов. При этом исследование неограниченного оператора заменяется исследованием семейства линейных ограниченных, аппроксимирующих неограниченный, а сами ограниченные операторы берутся из теории методов регуляризации. Приводится общая схема получения порядковых оценок указанных модулей непрерывности, в которой используется предложенная ранее автором методика нахождения порядковых оценок погрешностей приближенных решений уравнений первого рода методами регуляризации. Для ряда операторов, связанных с дифференцированием функций на отрезке и с решением краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, приводятся конкретные оценки с указанием величины порядка и констант в оценках.

Модули непрерывности неограниченных операторов являются предметом исследования в различных разделах математики, в частности, в теории приближения функций и в теории уравнений первого рода.

В теории приближения функций вопрос о величине модуля непрерывности связан с задачей Стечкина о наилучшем приближении неограниченных операторов линейными ограниченными и задачей вычисления точных констант в неравенствах типа Колмогорова (см., напр., [1]). Большое количество результатов в этом направлении получено для модулей непрерывности вида

$$\omega_k(\delta,1)=\sup\{\|u^{(k)}\|_{L_p}:\|u^{(n)}\|_{L_q}\le 1,\ \|u\|_{L_r}\le\delta\}.$$

При этом функции $u(x)$ считаются заданными на оси или полуоси.

В теории уравнений первого рода исследуются модули непрерывности операторов, обратных к операторам в уравнении

$$Au=f, \tag{1}$$

где $A$ — линейный ограниченный, действующий из пространства $X_1$ в пространство $X_2$, имеющий неограниченный обратный. При этом считается, что правая часть задана ее $\delta$-приближением $f_\delta$ в пространстве $X_2$, а точное решение принадлежит компактному множеству $M$. Тогда модуль непрерывности оператора $A^{-1}$ в нуле имеет вид

$$\omega(\delta,M)=\sup\{\|u\|_{X_1}:u\in M,\ \|Au\|_{X_2}\le\delta\}. \tag{2}$$

Это одна из важных характеристик при изучении вопроса об оптимальности по порядку методов регуляризации, применяемых для приближенного решения уравнения (1) и об оценке погрешности приближенных решений этого уравнения на классе $M$ ([2], с. 122; [3], с. 22).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00003).

## 1. Общий подход к получению порядковых оценок модулей непрерывности

Пусть $R_\alpha$ ($\alpha > 0$ — параметр) — семейство регуляризирующих операторов для уравнения (1) ([2], с. 41). Тогда для любого $u \in M$ $\|R_\alpha Au - u\|_{X_1} \to 0$ при $\alpha \to 0$ и существует согласование $\alpha = \alpha(\delta)$ такое, что для любого $u \in M$

$$\|R_{\alpha(\delta)} f_\delta - u\|_{X_1} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \tag{3}$$

Значит, семейство $R_{\alpha(\delta)}$ определяет метод приближенного решения уравнения (1).

Пусть (3) выполняется равномерно по $u \in M$.

Введем величины

$$\Delta(\delta, R_\alpha, M) = \sup\{\|R_\alpha f_\delta - u\|_{X_1} : u \in M,\ \|f_\delta - Au\|_{X_2} \leq \delta\},$$
$$\Delta_1(R_\alpha A, M) = \sup\{\|R_\alpha Au - u\|_{X_1} : u \in M\}.$$

Первая из них характеризует погрешность приближенного решения уравнения (1) на классе $M$, вторая — скорость аппроксимации элементов множества $M$ при примененииии к ним операторов $R_\alpha A$.

В теории уравнений первого рода наиболее изучены классы вида

$$M = \{u \in X_1 : u = Bv,\ \|v\|_Z \leq 1\}, \tag{4}$$

где $B$ — вполне непрерывный оператор, действующий из некоторого пространства $Z$ в пространство $X_1$ ([2], гл. 4).

В дальнейшем под $M$ будем понимать классы вида (4) и обозначать $\omega(\delta, M)$ в (2) через $\omega(\delta, 1)$.

Приведем известные факты из теории методов регуляризации.

1. Для величины $\Delta(\delta, R_\alpha, M)$ имеет место двусторонняя оценка ([3], с. 81; [4])

$$\tfrac{1}{2}\varphi(\delta, R_\alpha, M) \leq \Delta(\delta, R_\alpha, M) \leq \varphi(\delta, R_\alpha, M), \tag{5}$$

где $\varphi(\delta, R_\alpha, M) = \Delta_1(R_\alpha A, M) + \|R_\alpha\|_{X_2 \to X_1}\delta$.

2. Если обозначить через $T_\delta$ любой метод приближенного решения уравнения (1), то $\inf\limits_{T_\delta} \Delta(\delta, T_\delta, M) \geq \omega(\delta, 1)$ ([2], с. 115).

3. Если для семейства $R_\alpha$ существует согласование $\alpha = \overline{\alpha}(\delta)$ и константа $K$ такая, что

$$\Delta(\delta, R_{\overline{\alpha}(\delta)}, M) \leq K\omega(\delta, 1), \tag{6}$$

то метод $R_{\overline{\alpha}(\delta)}$ будет оптимальным по порядку, т.е. для него будет иметь место оценка $\Delta(\delta, R_{\overline{\alpha}(\delta)}, M) \leq K \inf\limits_{T_\delta} \Delta(\delta, T_\delta, M)$ ([2], с. 111).

Пусть теперь для $\Delta_1(R_\alpha A, M)$ и $\|R_\alpha\|_{X_2 \to X_1}$ найдены асимптотические по $\alpha$ при $\alpha \to 0$ представления

$$\begin{aligned} \Delta_1(R_\alpha A, M) &= \varphi_1(\alpha) + \psi_1(\alpha), \\ \|R_\alpha\|_{X_2 \to X_1} &= \varphi_2(\alpha) + \psi_2(\alpha), \end{aligned} \tag{7}$$

где $\psi_1(\alpha) = o(\varphi_1(\alpha))$, $\psi_2(\alpha) = o(\varphi_2(\alpha))$ при $\alpha \to 0$, либо двусторонние оценки

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_1\varphi_1(\alpha) + \widetilde{\psi}_1(\alpha) &\leq \Delta_1(R_\alpha A, M) \leq C_1\varphi_1(\alpha) + \psi_1(\alpha), \\ \widetilde{C}_2\varphi_2(\alpha) + \widetilde{\psi}_2(\alpha) &\leq \|R_\alpha\|_{X_2 \to X_1} \leq C_2\varphi_2(\alpha) + \psi_2(\alpha), \end{aligned} \tag{8}$$

где $\psi_k(\alpha)$, $\widetilde{\psi}_k(\alpha)$, $k = 1, 2$, имеют тот же смысл, что и в предыдущем случае, а константы в оценках не зависят от $\alpha$.

Обозначим через $\Phi(\delta, \alpha) = \varphi_1(\alpha) + \delta\varphi_2(\alpha)$ для представлений (7) и $\Phi(\delta, \alpha) = C_1\varphi_1(\alpha) + \delta C_2\varphi_2(\alpha)$ для оценок (8). Пусть далее $\widetilde{\alpha}(\delta) = \arg\inf\limits_\alpha \Phi(\delta, \alpha)$.

**Лемма 1.** *Если метод $R_{\overline{\alpha}(\delta)}$ оптимален по порядку, то и метод $R_{\tilde{\alpha}(\delta)}$ также оптимален по порядку.*

**Доказательство.** Очевидно, достаточно ограничиться случаем, когда $\Phi(\delta,\alpha) = \varphi_1(\alpha) + \delta\varphi_2(\alpha)$. По заданному числу $\varepsilon > 0$ найдется такое $\alpha(\varepsilon)$, что $|\psi_1(\alpha)| \le \varepsilon\varphi_1(\alpha)$, $|\psi_2(\alpha)| \le \varepsilon\varphi_2(\alpha)$ при $0 < \alpha \le \alpha(\varepsilon)$. Отсюда, из оценки (5) и представлений (7) получаем

$$\begin{aligned}&\Delta(\delta, R_{\widetilde{\alpha}(\delta)}, M) \le (1+\varepsilon)\Phi(\delta,\widetilde{\alpha}) \le (1+\varepsilon)\Phi(\delta,\overline{\alpha}),\\ &\Delta(\delta, R_{\overline{\alpha}(\delta)}, M) \ge \tfrac{1}{2}(1-\varepsilon)\Phi(\delta,\overline{\alpha}),\end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы.

**Теорема 1.** *Если $R_\alpha$ — семейство операторов, порождающее при $\alpha = \overline{\alpha}(\delta)$ метод решения уравнения* (1), *оптимальный по порядку, то для модуля непрерывности* (2) *имеет место двусторонняя оценка, асимптотическая по $\delta$ при $\delta \to 0$:*

$$\frac{1}{2K}\Phi(\delta,\widetilde{\alpha}(\delta)) + \widetilde{\psi}(\delta) \le \omega(\delta,1) \le \Phi(\delta,\widetilde{\alpha}(\delta)) + \psi(\delta), \tag{9}$$

*где $K$ — константа в оценке* (6), *$\psi(\delta)$, $\widetilde{\psi}(\delta)$ суть $o(\Phi(\delta,\widetilde{\alpha}(\delta))$.*

**Доказательство.** Так как согласование $\alpha = \widetilde{\alpha}(\delta) = \arg\inf\limits_{\alpha}\Phi(\delta,\alpha)$ определяет метод, оптимальный по порядку, то для этого метода справедлива оценка $\Delta(\delta, R_{\widetilde{\alpha}(\delta)}, M) \le K\omega(\delta,1)$, где $K$ — некоторая константа.

С другой стороны, для метода $R_{\widetilde{\alpha}(\delta)}$ имеет место оценка $\Delta(\delta, R_{\widetilde{\alpha}(\delta)}, M) \ge \inf\limits_{T_\delta}\Delta(\delta, T_\delta, M) \ge \omega(\delta,1)$, где $T_\delta$ — любой метод решения уравнения (1).

Из этих оценок, представлений (7) (либо оценок (8)) и двусторонней оценки (5) с $\alpha = \widetilde{\alpha}(\delta)$ следует утверждение теоремы.

## 2. Получение конкретных оценок модулей непрерывности

В дальнейшем будем считать, что $X_1 = C^l[a,b]$, $l = 0,1,\ldots$; $X_2 = L_2[a,b]$. В качестве оператора $A$ в уравнении (1) будем рассматривать либо интегральный оператор, либо оператор вложения из $C^l[a,b]$ в $L_2[a,b]$ [5], а в качестве $R_\alpha$ будем брать тихоновские регуляризирующие семейства либо $l$-го, $l = 1,2,\ldots$, либо нулевого порядка гладкости [6]. В качестве $M$ будем рассматривать классы вида (6).

Заметим, что для рассматриваемых нами случаев операторы $R_\alpha A$ являются интегральными [7], [8]. Обозначим их ядра через $K_\alpha(x,t)$. В случае, когда $l \ne 0$, рассмотрим наряду с $R_\alpha$ операторы $R_{\alpha p}$, $p = 0,1,\ldots,l$, $R_{\alpha 0} \equiv R_\alpha$, соответствующие приближениям к производным от решения $u(x)$, а также величины

$$\left.\begin{aligned}&\Delta_1^{(p)}(R_\alpha A, M) = \sup\{\|R_{\alpha p}Au - u^{(p)}\|_{C[a,b]} : u \in M\},\\ &\Delta^{(p)}(\delta, R_\alpha, M) = \sup\{\|R_{\alpha p}f_\delta - u^{(p)}\|_{C[a,b]} : u \in M,\ \|f_\delta - Au\|_{L_2[ab]} \le \delta\},\end{aligned}\right\} \quad p = 0,1,\ldots,l. \tag{10}$$

Для получения асимптотических представлений (7) или оценок (8) необходимо иметь более конкретные выражения величин $\Delta_1(R_\alpha A, M)$ и $\|R_\alpha\|_{X_2\to X_1}$ через операторы $R_\alpha A$ и $R_\alpha$.

1. Пусть

$$M = \{u(x) \in C^l[a,b] : \|u\|_{W_2^{l+1}} \le 1\}, \tag{11}$$

где $W_2^{l+1}[a,b]$ — одномерное пространство Соболева с нормой $\|u\|^2_{W_2^{l+1}} = \|u\|^2_{L_2} + \|u^{(l+1)}\|^2_{L_2}$.

Очевидно, это классы вида (6) с $Z = W_2^{l+1}[a,b]$ и $B$ — оператором вложения из $W_2^{l+1}[a,b]$ в $C^l[a,b]$.

**Теорема 2.** *Для модулей непрерывности*

$$\omega_p(\delta,1) = \sup\{\|u^{(p)}\|_{C[a,b]} : \|u\|_{W_2^{l+1}[a,b]} \le 1,\ \|u\|_{L_2[a,b]} \le \delta\}, \quad p = 0,1,\ldots,l, \tag{12}$$

*справедливы двусторонние оценки, асимптотические по $\delta$ при $\delta \to 0$:*

$$\frac{C_p}{2K_p}\delta^{\frac{2(l-p)+1}{2(l+1)}} + \widetilde{\psi}_{1p}(\delta) \le \omega_p(\delta,1) \le C_p\delta^{\frac{2(l-p)+1}{2(l+1)}} + \psi_{1p}(\delta), \tag{13}$$

*где*

$$C_p = \frac{2(l+1)}{2p+1}C_{1p}^{\frac{2p+1}{2(l+1)}}\left(\frac{C_{2p}(2p+1)}{2(l-p)+1}\right)^{\frac{2(l-p)+1}{2(l+1)}},$$

$$K_p = \max\left\{2\left(\frac{1}{C_{0p}}+1\right)^{\frac{1}{2}}, (C_{0p}+1)^{\frac{1}{2}}+1\right\}, \tag{14}$$

$$C_{0p} = \left(\frac{C_{2p}}{C_{1p}}\frac{2p+1}{2(l-p)+1}\right)^2, \tag{15}$$

$$C_{1p} = \left|\widetilde{C}_p^2 + (-1)^{p+1}(l+1)^{-1}\sum_{i\in I}\lambda_i^{2p+1}\right|^{\frac{1}{2}}, \quad C_{2p} = |\widetilde{C}_p|, \tag{16}$$

$$\widetilde{C}_p = 2(l+1)^{-2}\sum_{i,j\in I}\frac{\lambda_i^{p+1}\lambda_j^{p+1}}{\lambda_i+\lambda_j},$$

*$\lambda_i$ — корни $2(l+1)$ из $-1$ при $l$ нечетном, из $1$ — при $l$ четном, $I$ — система индексов, для которых $\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$.*

**Доказательство.** Рассмотрим уравнение (1) с оператором вложения из $C^l[a,b]$ в $L_2[a,b]$. Тогда модулем непрерывности обратного оператора будет величина

$$\omega(\delta,1) = \sup\{\|u\|_{C^l[a,b]} : \|u\|_{W_2^{l+1}[a,b]} \le 1,\ \|u\|_{L_2[a,b]} \le \delta\}.$$

В качестве семейства $R_\alpha$ возьмем регуляризирующее семейство Тихонова $l$-го порядка гладкости.

Тогда [7]

$$R_\alpha f_\delta = \arg\inf_u\{\|u-f_\delta\|^2_{L_2[a,b]} + \alpha\|u\|_{W_2^{l+1}[a,b]}\}, \tag{17}$$

откуда следует

$$R_\alpha f_\delta = \frac{1}{\alpha}\int_a^b G\left(x,t,-\frac{1}{\alpha}\right)f_\delta(t)dt,$$

где $G(x,t,-\frac{1}{\alpha})$ — функция Грина дифференциального оператора $\widehat{L} + \frac{1}{\alpha}E$,

$$\widehat{L} = \{\widehat{l}y = (-1)^{l+1}y^{2(l+1)} + y, \quad y^{(k)}(a) = y^{(k)}(b) = 0, \quad k = l+1,\dots,2l+1\}.$$

Очевидно, операторы $R_\alpha A$ имеют тот же вид, что и $R_\alpha$, только применяются к функциям из $C^l[a,b]$.

Поскольку $\|R_\alpha Au - u\|_{C^l[a,b]} \to 0$ при $\alpha \to 0$, то для каждого $p = 0,1,\dots,l$ имеет смысл рассматривать величины $\Delta_1^{(p)}(R_\alpha A, M)$ и $\Delta^{(p)}(\delta, R_\alpha, M)$, определенные в (10), и величины $\omega_p(\delta,1)$, определенные в (12).

Все предыдущие рассуждения, представления (7), оценки (8), факты из теории уравнений первого рода, лемма 1 и т. д. будут иметь место с заменой $R_\alpha$ на $R_{\alpha p}$, $\Delta_1(R_\alpha A, M)$ на $\Delta_1^{(p)}(R_\alpha A, M)$, $\Delta(\delta, R_\alpha, M)$ на $\Delta^{(p)}(\delta, R_\alpha, M)$, $\omega(\delta,1)$ на $\omega_p(\delta,1)$, $\widetilde{\alpha}$ на $\widetilde{\alpha}_p$; $\varphi_i(\alpha)$ на $\varphi_{ip}(\alpha)$, $\psi_i(\alpha)$ на $\psi_{ip}(\alpha)$, $i = 1,2$, $\varphi(\delta, R_\alpha, M)$ на $\varphi_p(\delta, R_\alpha, M)$, $K$ на $K_p$.

В этом можно убедиться, проведя доказательства, аналогичные доказательствам соответствующих фактов для операторов $R_\alpha$ ([2], сс. 111, 115; [4]).

Для получения представлений вида (7) или оценок вида (8) нужны более конкретные выражения для величин $\Delta_1^{(p)}(R_\alpha A, M)$, $\|R_{\alpha p}\|_{L_2\to C}$, $p = 0,1,\dots,l$.

Для классов $M$ вида (11) в [9], [10] получены формулы, в которых указанные выше величины непосредственно выражаются через ядра $K_\alpha(x,t)$ операторов $R_\alpha A$. Приведем эти формулы.

**Лемма 2.** *Если для уравнения* (1) $M$ *— класс решений вида* (11), *то имеют место представления, асимптотические по* $\alpha$ *при* $\alpha \to 0$:

$$\Delta_1^{(p)}(R_\alpha A, M) = \sup_{a\le x\le b}\left(\int_a^b \frac{\partial^p}{\partial x^p}K_\alpha(x,t)\frac{\partial^p}{\partial x^p}g(x,t,\alpha)dt - \frac{\partial^{2p}g(x,t,\alpha)}{\partial x^p \partial t^p}\bigg|_{t=x}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad p=0,1,\ldots,l,$$

*где* $g(x,t,\alpha) = \int\limits_a^b K_\alpha(x,\eta)G(t,\eta)d\eta - G(t,x)$, $G(t,x)$ *– функция Грина оператора* $\widehat{L}$.

**Лемма 3.** *Если* $R_\alpha$ *— регуляризирующие операторы Тихонова* $l$*-го порядка гладкости, то справедливы представления*

$$\|R_{\alpha p}\|_{L_2\to C} = \alpha^{-\frac{1}{2}} \sup_{a\le x\le b}\left(-\int_a^b \frac{\partial^p}{\partial x^p}K_\alpha(x,t)\frac{\partial^p}{\partial x^p}g(x,t,\alpha)dt\right)^{\frac{1}{2}}, \quad p=0,1,\ldots,l,$$

*где функция* $g(x,t,\alpha)$ *определена в лемме* 2.

Обозначим через $\widehat{L}_0$ дифференциальный оператор, отличающийся от $\widehat{L}$ лишь тем, что содержит в дифференциальном выражении только старшую производную. Тогда на $G(x,t,-\frac{1}{\alpha})$ и $G(x,t)$ можно смотреть как на ядра резольвенты оператора $\widehat{L}_0$, соответствующие различным значениям спектрального параметра: $\lambda = -\frac{1}{\alpha}+1$ в первом случае и $\lambda=-1$ во втором случае.

Отсюда по формуле Гильберта для резольвенты будем иметь

$$g(x,t,\alpha) = -G\left(x, t-\frac{1}{\alpha}\right) + O(\alpha),$$

$$\frac{1}{\alpha}\int_a^b \frac{\partial^p}{\partial x^p}G\left(x,t,-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{\partial^p}{\partial x^p}g(x,t,\alpha)dt = -\frac{1}{\alpha}\int_a^b\left(\frac{\partial^p}{\partial x^p}G\left(x,t,-\frac{1}{\alpha}\right)\right)^2dt.$$

Берем выражение функции Грина в виде, приведенном в [8], с $n=2(l+1)$ (для определенности считаем $l$ нечетным). Проводим соответствующие выкладки.

В результате приходим к представлениям $\Delta_1^{(p)}(R_\alpha A, M) = C_{1p}\alpha^{\frac{2(l-p)+1}{4(l+1)}} + O\big(\alpha^{\frac{l-p}{2(l+1)}}\big)$, $\|R_{\alpha p}\|_{L_2\to C} = \alpha^{-\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{2(l-p)+1}{4(l+1)}} + O\big(\alpha^{\frac{l-p}{2(l+1)}}\big)$, где $C_{1p}$, $C_{2p}$ приведены в (16).

Далее составляем выражения $\Phi_p(\delta,\alpha)$, выбираем согласования $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}_p(\delta)$ из условий $\Phi_p(\delta,\alpha) \to \inf\limits_\alpha$ и получаем

$$\widetilde{\alpha}_p(\delta) = C_{0p}\delta^2, \tag{18}$$

где $C_{0p}$ приведены в (15).

Подставляя (18) в выражения для функций $\varphi_p(\delta, R_\alpha, M)$, получаем оценку сверху в (13).

Для получения оценки снизу найдем константы $K_p$. Проведем рассуждения по схеме из ([2], с. 118). Обозначим $u_\delta = R_{\widetilde{\alpha}(\delta)}f_\delta$. Из вида функционала Тихонова (17) имеем

$$\|u_\delta\|_{W_2^{l+1}} \le \sqrt{\frac{1}{C_{0p}}+1}.$$

Отсюда, т. к. точное решение $\overline{u}$ уравнения (1) берется из класса $M$, $u_\delta$ вместе с $\overline{u}$ принадлежат классу $M_R$, отличающемуся от (11) тем, что $\|v\|_{L_2} \le R$, $R = \sqrt{\frac{1}{C_{0p}}+1}$.

Далее, $\|Au_\delta - Au\|_{L_2} \le \delta(\sqrt{C_{0p}+1}+1) \equiv \tau$. Отсюда имеем $\|u_\delta^{(p)} - \overline{u}^{(p)}\|_{C[a,b]} \le \sup\{\|u_1^{(p)} - u_2^{(p)}\|_{C[a,b]} : u_1 = Bv_1,\ u_2 = Bv_2,\ \|v_1-v_2\| \le R,\ \|Au_1 - Au_2\|_{L_2} \le \tau\} \equiv \omega_{1p}(\tau,R) = \omega_p(\tau, 2R)$. Тогда $\omega_p(\tau,2R) \le K_p\omega_p(\delta,1)$, где $K_p$ имеют вид (14). $\square$

Приведем частные случаи оценок (13) [11] при $l=0$

$2^{-2}\delta^{\frac{1}{2}}+O(\delta)\le\omega_0(\delta,1)\le 2^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}+O(\delta)$;

при $l=1$

$2^{-\frac{5}{4}}3^{-\frac{3}{8}}\delta^{\frac{3}{4}}+O(\delta)\le\omega_0(\delta,1)\le 2^{\frac{1}{4}}3^{-\frac{3}{8}}\delta^{\frac{3}{4}}+O(\delta)$;

$C_2\delta^{\frac{1}{4}}+O(\delta)\le\omega_1(\delta,1)\le C_1\delta^{\frac{1}{4}}+O(\delta^{\frac{1}{2}})$,

$C_1=2^{\frac{17}{8}}3^{-\frac{3}{4}}5^{\frac{3}{8}}$, $C_2=2^{-\frac{9}{8}}3^{-\frac{3}{4}}5^{-\frac{1}{8}}(1+9\cdot 2^{\frac{1}{2}}+5)^{\frac{1}{2}}$.

Рассмотрим теперь дифференциальный оператор $L$, порожденный дифференциальным выражением

$$ly=y^{(m)}+p_2(x)y^{(m-2)}+\cdots+p_m(x)y,\quad p_i(x)\in C^{m-i}[a,b],\quad i=2,\dots,m,$$

и краевыми условиями $U_i(y)=0$, $i=1,\dots,m$, где $U_i(y)$ — линейно независимые линейные формы относительно значений функции $y(x)$ и ее производных до $(n-1)$-го порядка включительно на концах отрезка.

Обобщением теоремы 2 на случай дифференциального оператора $L$ является

**Теорема 3.** *Для модулей непрерывности*

$$\omega_p(\delta,1)=\sup\{\|(Ly)^{(p)}\|_{C_\varepsilon}:\|Ly\|_{W_2^{l+1}[a,b]}\le 1,\ \|y\|_{L_2[a,b]}\le 1\},\tag{19}$$

*где $C_\varepsilon=C[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$ — произвольное малое число, справедливы двусторонние оценки (13) с заменой $l$ на $m+l$, $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i^{2p+1}$ на $\sum\limits_{i\in I}\lambda_i^{2(m+p)+1}$, $\sum\limits_{i,j\in I}\frac{\lambda_i^{p+1}\lambda_j^{p+1}}{\lambda_i+\lambda_j}$ на $\sum\limits_{i,j\in I}\frac{\lambda_i^{p+1}\lambda_j^{m+p+1}}{\lambda_i+\lambda_j}$, а функций $\psi_{ip}(\alpha)$ и $\widetilde{\psi}_{ip}(\alpha)$, $i=1,2$, — на $\psi_{1p}(\alpha,\varepsilon)$, $\widetilde{\psi}_{ip}(\alpha,\varepsilon)$ соответственно.*

**Доказательство.** Рассмотрим интегральное уравнение (1) с ядром Грина дифференциального оператора $L$. Тогда на (19) можно смотреть как на модуль непрерывности вида $\omega_p(\delta,1)=\sup\{\|u^{(p)}\|_{C_\varepsilon}:\|u\|_{W_2^{l+1}[a,b]}\le 1,\ \|Au\|_{L_2[a,b]}\le\delta\}$. В [12] для метода регуляризации $(l+1)$-го порядка гладкости получены представления вида (7) для $\Delta_{1\varepsilon}^{(p)}(R_\alpha A,M)$ и $\|R_{\alpha p}\|_{L_2[a,b]\to C_\varepsilon}$, где $\Delta_{1\varepsilon}^{(p)}(R_\alpha A,M)$ имеет вид (10) с заменой $C[a,b]$ на $C_\varepsilon$.

Заметим, что доказательство указанных представлений не является аналогом соответствующего доказательства в теореме 2, поскольку в данном случае оператору $R_\alpha A$ соответствует резольвента оператора $\widetilde{L}=LL^*\widehat{L}$ (а не $\widehat{L}$), кроме того, в дифференциальном выражении этого оператора присутствуют наряду со старшей производной производные меньших порядков, что приводит к необходимости использовать метод возмущений из теории дифференциальных операторов. В результате вместо пространства $C[a,b]$ приходится рассматривать пространство $C_\varepsilon$.

Дальнейшие рассуждения аналогичны соответствующим рассуждениям теоремы 2.

2. Пусть теперь о семействе операторов $R_\alpha$ неизвестна информация об оптимальности по порядку соответствующего метода регуляризации, т. е. о наличии оценки (6). Тогда, очевидно, вместо двусторонней оценки (9) в теореме 1 будет иметь место лишь оценка сверху. Покажем, что тем не менее, и в этом случае возможно получение точных по порядку оценок модулей непрерывности.

В качестве примера рассмотрим

$$\omega(\delta,1)=\sup\{\|u'\|_{C[0,1]}:\|u''\|_{L_2[0,1]}\le 1,\ \|u\|_{L_2[0,1]}\le\delta,\ u(0)=u'(1)=0\}.\tag{20}$$

С точки зрения уравнений первого рода к (20) придем, если рассмотрим уравнение с $Au\equiv\int\limits_0^x u(t)dt$ на классе $M$ вида (4) с $Bv\equiv\int\limits_x^1 v(t)dt$, $B\in(L_2[0,1]\to C[0,1])$. В качестве $R_\alpha$ возьмем семейство

$$R_\alpha=(\alpha E+A^*A)^{-1}A^*,\tag{21}$$

соответствующее регуляризации Тихонова нулевого порядка [6]. В случае $u(x) \in R(A^*)$, как показано в [13], с помощью семейства (21) можно получать равномерные приближения к решению уравнения (1).

**Лемма 4.** *Если $K_\alpha$ — интегральные операторы с ядрами $K_\alpha(x,\xi)$ такие, что $\|K_\alpha u - u\|_{C[a,b]} \to 0$ при $\alpha \to 0$ равномерно по $u(x) \in M = \Big\{u(x) \in C[a,b] : u(x) = \int\limits_a^b B(x,t)v(t)dt,$ $\|v\|_{L_2[a,b]} \le 1\Big\}$, то справедливо представление*

$$\Delta_1(K_\alpha, M) = \sup_{a\le x\le b}\left(\int_a^b\left(\int_a^b K_\alpha(x,\xi)B(\xi,t)d\xi - B(x,t)\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство следует из определения $\Delta_1(K_\alpha, M)$.

**Лемма 5** ([14]). *Справедливо представление*

$$\|R_\alpha\|_{L_2\to C} = \alpha^{-\frac{1}{2}}\sup_{a\le x\le b}\left(K_\alpha(x,x) - \frac{1}{\alpha}\int_a^b K_\alpha^2(x,\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}},$$

*где $K_\alpha(x,\xi)$ — ядро оператора $R_\alpha A$.*

**Теорема 4.** *Для модуля непрерывности* (20) *справедлива двусторонняя оценка, асимптотическая по $\delta$ при $\delta \to 0$:*

$$\frac{1}{4}\delta^{\frac{1}{4}} + \psi_2(\delta) \le \omega(\delta, 1) \le C_1\delta^{\frac{1}{4}} + \psi_1(\delta), \tag{22}$$

*где $C_1 = 2\cdot 3^{-\frac{3}{4}}(2e^{-1}+1)^{\frac{3}{8}}(2e^{-1}+3)^{\frac{1}{8}}$, $\psi_1(\delta)$, $\psi_2(\delta)$ суть $O(e^{-\delta^{-\frac{1}{2}}})$.*

**Доказательство.** Сначала получим оценки для $\Delta_1(R_\alpha A, M)$, $\|R_\alpha\|_{L_2\to C}$ вида (8). Поскольку $R_\alpha A = \frac{1}{\alpha}\big((A^*A)^{-1} + \frac{1}{\alpha}E\big)^{-1}$, а $(A^*A)^{-1}$ есть дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением $ly = -y''$ и краевыми условиями $y(0) = y'(1) = 0$, то

$$K_\alpha(x,t) \equiv \frac{1}{\alpha}G\left(x,t,-\frac{1}{\alpha}\right) = \begin{cases}\alpha_1 \operatorname{ch}^{-1}\alpha_1[\operatorname{sh}\alpha_1(1-x)\operatorname{ch}\alpha_1 t], & t \le x;\\ \alpha_1\operatorname{ch}^{-1}\alpha_1[\operatorname{ch}\alpha_1 x\operatorname{sh}\alpha_1(1-t)], & t\ge x,\end{cases}$$

где $\alpha_1 = \alpha^{-\frac{1}{2}}$.

Из лемм 4 и 5 имеем

$$\int_0^1\left(\int_0^1 K_\alpha(x,t)B(t,\xi)dt - B(x,\xi)\right)^2 d\xi = \frac{1}{2}(xe^{-2\alpha_1 x} + (1-x)e^{-2\alpha_1(1-x)}) +$$
$$+ (4\alpha_1\operatorname{ch}^2\alpha_1)^{-1}(\operatorname{sh}^2\alpha_1(1-x)\operatorname{sh}2\alpha_1 x + \operatorname{ch}^2\alpha_1 x\operatorname{sh}^2 2\alpha_1(1-x)) + O(e^{-2\alpha_1}).$$

Отсюда получаем двустороннюю оценку

$$\frac{1}{4}\alpha^{\frac{1}{4}}\sqrt{e^{-1}+1} + O(e^{-2\alpha^{-\frac{1}{2}}}) \le \Delta_1(R_\alpha A, M) \le \frac{\alpha^{\frac{1}{4}}}{2}\sqrt{2e^{-1}+1} + O(e^{-2\alpha^{-\frac{1}{2}}}).$$

Далее, имеем

$$K_\alpha(x,x) = \frac{\alpha_1}{2}(1 - e^{-2\alpha_1(1-x)} + e^{-2\alpha_1 x}) + O(\alpha_1 e^{-2\alpha_1}),$$
$$\int_0^1 K_\alpha^2(x,\xi)d\xi = \frac{\alpha_1^2}{2}[-(1-x)e^{-2\alpha_1(1-x)} + xe^{-2\alpha_1 x} +$$
$$+O(e^{-2\alpha_1})] + \frac{\alpha_1}{8}[1 + e^{-2\alpha_1 x} - e^{-2\alpha_1(1-x)}] + O(\alpha_1 e^{-2\alpha_1})].$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3-e^{-1}}{2}}\alpha^{-\frac{3}{4}}+O(e^{-\alpha^{-\frac{1}{2}}})\le\|R_\alpha\|_{L_2\to C}\le\frac{1}{2}\sqrt{2e^{-1}+3}\alpha^{-\frac{3}{4}}+O(e^{-2\alpha^{-\frac{1}{2}}}).$$

Далее, выбирая $\alpha=\alpha(\delta)$ из условия $\alpha^{\frac{1}{4}}\sqrt{2e^{-1}+1}+\alpha^{-\frac{3}{4}}\delta\sqrt{2e^{-1}+3}\to\inf\limits_{\alpha}$, получаем $\alpha(\delta)=C\delta$, $C=3\sqrt{\frac{2e^{-1}+3}{2e^{-1}+1}}$, а отсюда — оценку сверху в (22).

Для оценки снизу построим функцию $u_0(x)=\frac{x}{2}\delta^{\frac{1}{4}}(e^{-\delta^{-\frac{1}{2}}x}-e^{-\delta^{-\frac{1}{2}}}(1-\delta^{-\frac{1}{2}}))$. Можно убедиться в том, что $u_0(0)=0$, $u_0'(1)=0$, $\|u_0''\|_{L_2}\le 1$, $\|u_0\|_{L_2}\le\delta$, а $\|u_0'\|_C>\frac{1}{4}\delta^{\frac{1}{4}}$ при достаточно малых $\delta$. Отсюда получаем оценку снизу. □

## Литература


1. Арестов В.В. *О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора* // Матем. заметки. – 1977. – Т. 22. – № 2. – С. 231–243.
2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* – М.: Наука, 1978. – 206 с.
3. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Некорректные задачи. Численные методы и приложения.* – М.: МГУ, 1989. – 200 с.
4. Страхов В.Н. *О построении оптимальных по порядку приближенных решений линейных условно-корректных задач* // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. IX. – № 10. – С. 1862–1874.
5. Хромова Г.В. *Задача восстановления и уравнения* 1 *рода* // Дифференц. уравнения и вычислит. матем. – Саратов, 1976. – Вып. 6. – Ч. 1. – С. 83–87.
6. Тихонов А.Н. *О регуляризации некорректно поставленных задач* // ДАН СССР. – 1963. – Т. 153. – № 1. – С. 49–52.
7. Хромова Г.В. *О задаче восстановления функций, заданных с погрешностью* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1977. – Т. 17. – № 5. – С. 1161–1171.
8. Хромова Г.В. *Об оценке погрешности метода регуляризации Тихонова для интегральных уравнений с ядром Грина* // Вестн. Моск. ун-та. – Сер. 15. – 1992. – № 4. – С. 22–28.
9. Хромова Г.В. *О неулучшаемых оценках погрешностей приближений к решениям и производным от решений интегральных уравнений* I *рода* // Вестн. Моск. ун-та. – Сер. 15. – 1994. – № 4. – С. 3–10.
10. Хромова Г.В. *О приближениях к непрерывным функциям и методах регуляризации* // Обратные и некорректно поставленные задачи. Тезисы докл. конференции. – Москва: МГУ, 1995. – С. 54.
11. Хромова Г.В. *Метод А.Н. Тихонова и оценки модулей непрерывности неограниченных операторов* // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Тезисы докл. Всероссийской науч. конференции. Екатеринбург. – 2004. – С. 85–86.
12. Хромова Г.В. *Об оценках погрешностей приближенных решений уравнений первого рода* // Докл. РАН. – 2001. – Т. 378. – № 5. – С. 605–609.
13. Хромова Г.В. *О регуляризации интегральных уравнений с ядром Грина* // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 8. – С. 94–104.
14. Хромова Г.В. *О нахождении равномерных приближений к решению интегральных уравнений первого рода* // Дифференц. уравнения и вычисл. матем. – Саратов, 1974. – Вып. 4. – С. 3–10.



*Саратовский государственный университет*



*Поступила* 21.12.2004