ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 11 (486)

УДК 514.7

М.В. СМОЛЬНИКОВА, С.Е. СТЕПАНОВ

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ВНЕШНИХ И СИММЕТРИЧЕСКИХ ФОРМАХ

1. Введение

Обозначим через M m-мерное C^∞-многообразие, через $C^\infty M$ — кольцо вещественных функций на M. Положим $T^{(r,s)}M$ векторным расслоением r раз ковариантных и s раз контравариантных тензоров на многообразии M, в частности, $TM = T^{(0,1)}M$ и $T^*M = T^{(1,0)}M$. При этом $T_x^{(r,s)}M$ для каждой точки $x \in M$ является пространством представления полной линейной группы $GL(m,\mathbb{R})$. Если M — риманово многообразие с метрикой g, то существует канонический изоморфизм $g_x : T_x^{(r,s)}M \cong T_x^{(r+s,0)}M$, при этом каждое $T_x^{(p,0)}M$ становится пространством представления ортогональной группы $\mathrm{O}(m,\mathbb{R})$.

Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита, задаваемую метрикой g, а через $C^\infty A$ — векторное пространство C^∞-сечений подрасслоения A тензорного расслоения $T^{(p,0)}M$. В частности, в качестве $C^\infty A$ будем рассматривать $C^\infty \Lambda^p M$ и $C^\infty S^p M$ — пространства сечений расслоений внешних дифференциальных и симметрических p-форм.

Дифференциальный оператор D порядка k, определенный на пространстве сечений $C^\infty A$ расслоения A и принимающий значения в пространстве сечений $C^\infty B$ расслоения B, называется *фундаментальным*, если последовательность его относительных символов (относительно связности Леви-Чивита ∇) состоит из $O(m,\mathbb{R})$-эквивариантных отображений относительно естественных представлений ортогональной группы в слоях $S^aT^*M \otimes A$ и B для $a = 1, 2, \dots, k$. Было доказано [1] существование базиса, состоящего из трех фундаментальных операторов в пространстве дифференциальных операторов первого порядка, действующих на $C^\infty \Lambda^p M$, и указаны три фундаментальных дифференциальных оператора первого порядка, действующих на пространстве сечений $C^\infty S_0^2$ расслоения $S_0^2 M$ симметрических бесследовых 2-форм.

В [2]–[4] решены аналогичные задачи отыскания фундаментальных дифференциальных операторов первого порядка, действующих на $C^\infty \Lambda^p M$ и $C^\infty S_0^2 M$, но уже над псевдоримановым многообразием M. Был найден вид этих операторов, указаны их свойства, дано описание ядер этих операторов и указаны возможные приложения полученных результатов в релятивистской физике.

В данной статье, продолжающей эти иссследования, рассматриваются расслоения $\Lambda^p M$ и $S^p M$ над многообразием M с линейной связностью ∇ без кручения, даются определения фундаментальных дифференциальных операторов первого порядка, действующих на пространствах сечений этих расслоений, находятся все эти операторы и описываются их ядра.

2. Фундаментальные дифференциальные операторы первого порядка на внешних формах

Пусть M — C^∞-многообразие с линейной связностью ∇ без кручения. Рассмотрим $C^\infty M$-модуль $\mathrm{Diff}(\Lambda^p M, T^*M \otimes \Lambda^p M)$ линейных дифференциальных операторов первого порядка на пространстве $C^\infty M$-сечений $C^\infty \Lambda^p M$ расслоения внешних дифференциальных p-форм $\Lambda^p M$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 00-01-00553 и 01-01-06275).

Линейный дифференциальный оператор первого порядка D на пространстве $C^\infty M$-сечений $C^\infty \Lambda^p M$ назовем *фундаментальным*, если его главный символ (относительно связности ∇) является проектором на поточечно $GL(m,\mathbb{R})$-неприводимое подрасслоение тензорного расслоения $T^*M \otimes \Lambda^p M$. Справедлива

Теорема 2.1. *Пусть M — многообразие m измерений с линейной связностью ∇ без кручения, $\Lambda^p M$ — расслоение внешних дифференциальных p-форм над M для произвольного $1 \leq p \leq m-1$. Существуют два фундаментальных дифференциальных оператора первого порядка на пространстве $C^\infty \Lambda^p M$ сечений расслоения $\Lambda^p M$. Этими операторами будут $D_1 = \frac{1}{p+1}d$ и $D_2 = \nabla - \frac{1}{p+1}d$ для оператора внешнего дифференцирования $d : C^\infty \Lambda^p M \to C^\infty \Lambda^{p+1} M$. Причем ядром первого оператора D_1 служат замкнутые, а ядром второго оператора D_2 — киллинговы p-формы, составляющие два подпространства $\mathbf{D}^p(M,\mathbb{R})$ и $\mathbf{K}^p(M,\mathbb{R})$ векторного пространства дифференциальных p-форм $\mathbf{\Omega}^p(M,\mathbb{R})$ на многообразии M.*

Доказательство. Рассмотрим над m-мерным многообразием M тензорное расслоение $T^*M \otimes \Lambda^p M$ для $1 \leq p \leq m-1$. Стандартным слоем последнего является тензорное пространство $E^* \otimes \Lambda^p E$, а структурной группой — полная линейная группа $GL(m,\mathbb{R})$. Существуют два $GL(m,\mathbb{R})$-неприводимых подпространства $S_1(E^* \otimes \Lambda^p E) = \Lambda^{p+1} E$ и $S_2(E^* \otimes \Lambda^p E) = \ker \Lambda^{p+1}$, сумма которых составляет все пространство $E^* \otimes \Lambda^p E$. Здесь $\Lambda^{p+1} : E^* \otimes \Lambda^p E \to \Lambda^{p+1} E$ — известный линейный проектор, называемый антисимметризацией или альтернированием. В результате приходим к поточечно $GL(m,\mathbb{R})$-неприводимому разложению расслоения $T^*M \otimes \Lambda^p M$ вида

$$T^*M \otimes \Lambda^p M = \Lambda^{p+1} M \oplus \ker \Lambda^{p+1}.$$

Известно ([5], с. 87), что значение на $\theta \in C^\infty T^*M$ главного символа $\sigma(\nabla)$ оператора ковариантного дифференцирования $\nabla : C^\infty \Lambda^p M \to C^\infty(T^*M \otimes \Lambda^p M)$ есть гомоморфизм по закону $\sigma(\nabla)\theta : \omega \in C^\infty \Lambda^p M \to \theta \otimes \omega \in C^\infty(T^*M \otimes \Lambda^p M)$, а значение на $\theta \in C^\infty T^*M$ главного символа $\sigma(d)$ оператора внешнего дифференцирования $d : C^\infty \Lambda^p M \to C^\infty \Lambda^{p+1} M$ будет гомоморфизмом по закону ([5], с. 78) $\sigma(d)\theta : \omega \in C^\infty \Lambda^p M \to \theta \wedge \omega \in C^\infty \Lambda^{p+1} M$. Поэтому в первом фундаментальном операторе D_1 легко узнать нормированный оператор внешнего дифференцирования, т. е. $D_1 = \frac{1}{p+1}d$.

Если через $\sigma(D_2)$ обозначить главный символ оператора первого порядка $D_2 = \nabla - \frac{1}{p+1}d$, то будем иметь

$$\sigma(D_2)\theta : \omega \in C^\infty \Lambda^p M \to \left(\theta \otimes \omega - \frac{1}{p+1}\theta \wedge \omega\right) \in C^\infty(\ker \Lambda^{p+1}). \tag{2.1}$$

Поэтому вторым фундаментальным оператором будет $D_2 = \nabla - \frac{1}{p+1}d$.

Ядром первого фундаментального оператора являются замкнутые p-формы, множество которых на M образует подпространство пространства $\mathbf{\Omega}^p(M,\mathbb{R})$ внешних дифференциальных p-форм на M. Обозначим его через $\mathbf{D}^p(M,\mathbb{R})$; тогда, как известно, $\mathbf{D}^*(M) = \bigoplus_{p\geq 0} \mathbf{D}^p(M,\mathbb{R})$ является подалгеброй градуированной антикоммутативной ассоциативной алгебры Картана $\Lambda^*(M) = \bigoplus_{p\geq 0} \Lambda^p(M,\mathbb{R})$.

Для получения характеристики внешних дифференциальных p-форм $\omega \in C^\infty \Lambda^p M$, составляющих ядро второго фундаментального оператора, рассмотрим на M произвольную геодезическую γ, отнесенную к аффинному параметру $t \in J \subset \mathbb{R}$ ([6], с. 135), и положим $X = \frac{d\gamma}{dt}$; имеем $\nabla_X X = 0$. Введем следующее обозначение: $(i_X\omega)(X_2, \ldots, X_p) = \omega(X, X_2, \ldots, X_p)$, тогда условие ковариантной постоянности дифференциальной $(p-1)$-формы $i_X\omega$ вдоль геодезической γ в силу произвольности выбора последней примет вид $d\omega = (p+1)\nabla\omega$, что означает $\omega \in \ker D_2$. Это уравнение в случае псевдориманова многообразия M со связностью Леви-Чивита ∇ совпадает с уравнениями для киллинговых p-форм ([7], с. 339–340). По аналогии p-форму $\omega \in \ker D_2$ на многообразии M с линейной связностью ∇ назовем также *киллинговой* (см. также [8]). Непосредственно проверяется, что множество киллинговых p-форм на M образует подпространство в $\mathbf{\Omega}^p(M,\mathbb{R})$, которое обозначим через $\mathbf{K}^p(M,\mathbb{R})$. $\square$

В [8] было доказано, что на m-мерном многообразии M с (η,∇)-структурой, где η — не обращающаяся на M в нуль m-форма и ∇ — линейная связность без кручения такая, что $\nabla\eta = 0$, и равным нулю тензором проективной кривизны Вейля ([9], с. 165) с необходимостью вытекает неравенство

$$\dim \mathbf{K}^p(M,\mathbb{R}) \geq \frac{m!}{p!(m-p)!}.$$

Точно оценить размерность векторного пространства внешних дифференциальных киллинговых форм мы можем на плоском многообразии M, т. е. многообразии с линейной связностью ∇, чьи тензоры кручения и кривизны равны нулю. Справедлива

Теорема 2.2. *Пусть M является плоским m-мерным многообразием с линейной связностью ∇ и внешней дифференциальной киллинговой p-формой ω на M. Тогда в локальной системе координат $x^1,\dots,x^m$ окрестности произвольной точки $x \in M$, аффинно диффеоморфной открытому подмножеству аффинного пространства, компоненты формы ω имеют следующий вид*:

$$\omega_{i_1\dots i_p} = A_{ki_1\dots i_p}x^k + B_{i_1\dots i_p}, \tag{2.2}$$

где $A_{ki_1\dots i_p}$ и $B_{i_1\dots i_p}$ — компоненты постоянных кососимметрических тензоров A и B, и вследстие этого

$$\dim \mathbf{K}^p(M,\mathbb{R}) = \frac{(m+1)!}{(p+1)!(m-p)!}.$$

Доказательство. Пусть многообразие M с линейной связностью ∇ является плоским, тогда по теореме 1.7.18 из [10] каждая его точка x имеет окрестность, аффинно диффеоморфную открытому подмножеству аффинного пространства $\mathbf{A}^m$. В этой окрестности существует (см. также [11], с. 136) локальная система координат $x^1,\dots,x^m$, в которой $\nabla_k = \frac{\partial}{\partial x^k}$ и справедливо правило дифференцирования $\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^j} = \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k}$. На этом основании уравнения, определяющие киллингову форму, можно переписать в виде

$$\partial_j \omega_{ii_2\dots i_p} + \partial_i \omega_{ji_2\dots i_p} = 0, \tag{2.3}$$

где положим $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$. Продифференцируем левую и правую части каждого из уравнений системы (2.3) по переменной x^k, получим

$$\partial_k\partial_j \omega_{ii_2\dots i_p} + \partial_k\partial_i \omega_{ji_2\dots i_p} = 0. \tag{2.4}$$

В результате циклической замены индексов k, j и i получим еще две аналогичные системы уравнений:

$$\partial_j\partial_i \omega_{ki_2\dots i_p} + \partial_j\partial_k \omega_{ii_2\dots i_p} = 0; \tag{2.5}$$

$$\partial_i\partial_k \omega_{ji_2\dots i_p} + \partial_i\partial_j \omega_{ki_2\dots i_p} = 0. \tag{2.6}$$

Сложим почленно уравнения систем (2.4) и (2.5), а из результата также почленно вычтем уравнения системы (2.6). Вследствие этих действий получим систему уравнений вида

$$\partial_k\partial_j \omega_{ii_2\dots i_p} = 0. \tag{2.7}$$

Из (2.7) с необходимостью следуют равенства (2.2), при этом условия на компоненты тензоров A и B следуют из уравнений (2.3).

Теперь можно подсчитать размерность пространства $\mathbf{K}^p(\mathrm{M},\mathbb{R})$ на плоском многообразии M, которая совпадает с числом линейно независимых внешних дифференциальных киллинговых p-форм. А оно определяется числом кососимметрических компонент тензоров A и B, которое равно $\frac{(m+1)!}{(p+1)!(m-p)!}$. $\square$

В заключение отметим, что для любой внешней дифференциальной p-формы ω справедливо $GL(m,\mathbb{R})$-неприводимое разложение $\nabla\omega = D_1\omega + D_2\omega$, из которого выводим, что D_1 и D_2 являются обобщенными $GL(m,\mathbb{R})$-градиентами (см. [12] и [13]).

3. Фундаментальные дифференциальные операторы первого порядка на симметрических формах

Пусть M — C^∞-многообразие с линейной связностью ∇ без кручения. Рассмотрим C^∞M-модуль $\mathrm{Diff}(S^pM, T^*M\otimes S^pM)$ линейных дифференциальных операторов первого порядка на пространстве $C^\infty M$-сечений $C^\infty S^pM$ расслоения симметрических дифференциальных p-форм S^pM.

Линейный дифференциальный оператор первого порядка D на пространстве $C^\infty M$-сечений $C^\infty M$ назовем *фундаментальным*, если его главный символ (относительно связности ∇) является проектором на поточечно $GL(m,\mathbb{R})$-неприводимое подрасслоение тензорного расслоения $T^*M\otimes S^pM$.

Теорема 3.1. *Пусть M — многообразие m измерений с линейной связностью ∇ без кручения, S^pM — расслоение симметрических p-форм над M. Существуют два фундаментальных дифференциальных оператора первого порядка на пространстве $C^\infty S^pM$ сечений расслоения S^pM. Этими операторами будут $D_1 = \frac{1}{p+1}\delta^*$ и $D_2 = \nabla - \frac{1}{p+1}\delta^*$. Ядром первого служат киллинговы, а ядром второго — кодаццевы симметрические p-формы, составляющие два векторных подпространства $\mathbf{G}^p(M,\mathbb{R})$ и $\mathbf{C}^p(M,\mathbb{R})$ пространства симметрических p-форм $\mathbf{\Phi}^p(M,\mathbb{R})$.*

Доказательство. Рассмотрим над m-мерным многообразием M тензорное расслоение $T^*M\otimes S^pM$. Стандартным слоем последнего является тензорное пространство $E^*\otimes S^pE$, а структурной группой — полная линейная группа $GL(m,\mathbb{R})$. Существуют только два $GL(m,\mathbb{R})$-неприводимых подпространства: $S_1(E^*\otimes S^pE) = S^{p+1}E$ и $S_2(E^*\otimes S^pE) = \ker S^{p+1}$, сумма которых составит все пространство $E^*\otimes S^pE$. Здесь $S^{p+1} : E^*\otimes S^pE \to S^{p+1}E$ — известный линейный проектор, называемый симметризацией.

В результате приходим к поточечно $GL(m,\mathbb{R})$-неприводимому разложению расслоения $T^*M\otimes S^pM = S^{p+1}M \oplus \ker S^{p+1}$. Согласно определению (см. [15], с. 54) оператора симметрического дифференцирования $\delta^* : C^\infty S^pM \to C^\infty S^{p+1}M$ значение на $\theta \in C^\infty T^*M$ его главного символа $\sigma(\delta^*)$ есть гомоморфизм по закону $\sigma(\delta^*)\theta : \varphi \in C^\infty S^pM \to \theta\circ\varphi \in C^\infty S^{p+1}M$ для симметрического умножения $\circ$. Поэтому первым фундаментальным оператором будет нормированный симметрический дифференциал, т. е. $D_1 = \frac{1}{p+1}\delta^*$.

Если через $\sigma(D_2)$ обозначить теперь главный символ оператора первого порядка $D_2 = \nabla - \frac{1}{p+1}\delta^*$, то имеем

$$\sigma(D_2)\theta : \varphi \in C^\infty S^pM \to \left(\theta\otimes\varphi - \frac{1}{p+1}\theta\circ\varphi\right) \in C^\infty(\ker S^{p+1}).$$

Следовательно, вторым фундаментальным оператором будет $D_2 = \nabla - \frac{1}{p+1}\delta^*$.

Ядром первого фундаментального оператора служат симметрические дифференциальные p-формы $\varphi \in C^\infty S^pM$ такие, что $(\nabla_X\varphi)(X,\ldots,X) = 0$ для произвольного $X \in C^\infty TM$. Подобные симметрические дифференциальные формы назовем *киллинговыми* по аналогии с симметрическими киллинговыми формами на псевдоримановом многообразии (см. [7], с. 339). Для каждой симметрической киллинговой p-формы φ вдоль произвольной геодезической γ на M, отнесенной к аффинному параметру $t \in J \subset \mathbb{R}$, имеем $\varphi(X,\ldots,X) = \mathrm{const}$ для $X = \frac{d\gamma}{dt}$.

Непосредственно проверяется, что все множество симметрических киллинговых p-форм на многообразии M с линейной связностью ∇ образует подпространство пространства $\mathbf{\Phi}^p(M,\mathbb{R})$ всех симметрических дифференциальных p-форм на M. Обозначим его через $\mathbf{G}^p(M,\mathbb{R})$ и положим $\mathbf{G}^*(M) = \bigoplus_{p\geq 0}\mathbf{G}^p(M,\mathbb{R})$. Поскольку выполняется равенство

$$S^{p+r+1}(\nabla(\varphi\circ\varphi')) = S^{p+r+1}(S^{p+1}(\nabla\varphi)\otimes\varphi') + S^{p+r+1}(\varphi\otimes S^{r+1}(\nabla\varphi')) = 0$$

для оператора симметризации S^q и произвольных $\varphi \in C^\infty S^p M$ и $\varphi' \in C^\infty S^r M$, то симметрическое умножение $\circ$ превращает $\mathbf{G}^*(M)$ в подалгебру градуированной коммутативной ассоциативной алгебры симметрических форм $\mathbf{\Phi}^*(M,\mathbb{R}) = \bigoplus\limits_{p\geq 0} \mathbf{\Phi}^p(M,\mathbb{R})$.

Ядро второго дифференциального оператора $D_2 = \nabla - \frac{1}{p+1}\delta^*$ составляют симметрические дифференциальные p-формы $\varphi \in C^\infty S^p M$, подчиняющиеся дифференциальному уравнению $(p+1)\nabla\varphi = \delta^*\varphi$ или равносильному ему уравнению $(\nabla_X\varphi)(Y, X_2, ..., X_p) = (\nabla_Y\varphi)(X, X_2, ..., X_p)$ для всех $X, Y, X_2, \ldots, X_p \in C^\infty TM$. Назовем эти p-формы *кодаццевыми*, поскольку для $p = 2$ подобные уравнения на многообразии с линейной связностью ([11], с. 169) и на римановом многообразии со связностью Леви-Чивита (см. [15], с. 590–598) принято называть *уравнениями Кодацци*, а удовлетворяющие им симметрические 2-формы — *кодаццевыми*.

Непосредственно проверяется, что множество кодаццевых симметрических p-форм на M образует подпространство $\mathbf{\Phi}^p(M,\mathbb{R})$. Обозначим его через $\mathbf{C}^p(M,\mathbb{R})$. $\square$

Наиболее общий пример симметрических кодаццевых p-форм можно построить на плоском многообразии M, где нетрудно проверить, что p-форма φ с компонентами $\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \partial_{i_1}\partial_{i_2}\ldots\partial_{i_p} f$ для произвольной $f \in C^p M$ в локальной системе координат $x^1, x^2, \ldots, x^m$ произвольной точки $x \in \mathrm{M}$ является кодаццевой. Способ же построения симметрических кодаццевых 2-форм на многообразии со структурой (η, ∇) и равным нулю тензором проективной кривизны Вейля описан А.П. Норденом ([11], с. 169). А именно, любая кодаццева симметрическая 2-форма φ на подобном многообразии M имеет вид $\varphi = \nabla^2 f + \frac{1}{m-1} f\,\mathrm{Ric}$ для произвольной $f \in C^2 M$ и тензора Риччи Ric связности ∇.

Для симметрических киллинговых форм справедлива

Теорема 3.2. *На m-мерном многообразии M со структурой (η, ∇) и равным нулю тензором проективной кривизны Вейля*

$$\dim \mathbf{G}^p(M,\mathbb{R}) \geq \frac{(m+p-1)!}{p!(m-1)!}.$$

Доказательство. На m-мерном многообразии M со структурой (η, ∇) и равным нулю тензором проективной кривизны Вейля существует m линейно независимых киллинговых 1-форм $\omega_{(1)}, \ldots, \omega_{(m)}$ [8]. Тогда для симметрической дифференциальной p-формы $\varphi = S^p(\omega_{(i_1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{(i_p)})$, где $i_1, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, m$, будем иметь $S^p(\nabla\varphi) = 0$. Это означает, что $\varphi \in \mathbf{G}^p(M,\mathbb{R})$. $\square$

Точно оценить размерность векторного пространства симметрических киллинговых форм возможно на плоском многообразии M, для этого воспользовавшись результатами более чем тридцатилетней давности (см. [16] и [14]), можно сформулировать теорему, аналогичную теореме 2.2.

Теорема 3.3. *Пусть M является плоским m-мерным многообразием с линейной связностью ∇ и дифференциальной симметрической киллинговой p-формой φ на M. Тогда в локальной системе координат $x^1, \ldots, x^m$ окрестности произвольной точки $x \in M$, аффинно диффеоморфной открытому подмножеству аффинного пространства, компоненты $\varphi_{i_1 \ldots i_p}$ формы φ имеют вид*

$$\varphi_{i_1 \ldots i_p} = \sum_{q=0}^{p} A_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q} x^{j_1} \ldots x^{j_q},$$

где $A_{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_q}$ — компоненты постоянных тензоров, симметричные по группам индексов $i_1, \ldots, i_p$ и $j_1, \ldots, j_q$ и при этом симметризация каждого по индексам $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_{q-1}$ для $q = 1, \ldots, p$ должна давать нуль. Вследствие этого

$$\dim \mathbf{G}^p(M,\mathbb{R}) = \frac{p(p+1)^2(p+2)^2 \ldots (m+p-1)^2(m+p)}{p!(p+1)!}.$$

Вопрос существования симметрических киллинговых форм длительное время был актуальным в общей теории относительности (напр., [7], с. 340–342). Теперь нам известен способ построения симметрических киллинговых форм по крайней мере на плоском многообразии M и многообразии со структурой (η, ∇) и равным нулю тензором проективной кривизны Вейля.

В заключение отметим, что для любой симметрической p-формы φ справедливо следующее $GL(m,\mathbb{R})$-неприводимое разложение: $\nabla\varphi = D_1\varphi + D_2\varphi$, из которого выводим, что D_1 и D_2 являются обобщенными $GL(m,\mathbb{R})$-градиентами (см. [12] и [13]).

Литература

1. Бургиньон Ж.-П. *Формулы Вейценбёка в размерности* 4 // Четырехмерная риманова геометрия: Семинар Артура Бессе 1978/1979. – М.: Мир, 1985. – С. 260–279.
2. Stepanov S.E. *On conformal Killing* 2*-form of the electromagnetic field* // Journal of Geometry and Physics. – 2000. – V. 33. – № 3–4. – P. 191–209.
3. Степанов С.Е., Родионов В.В. *Дополнение к одной работе Ж.-П. Бургиньона* // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. – 1997. – Вып. 28. – С. 68–72.
4. Stepanov S.E. *A class of closed forms and special Maxwell's equations* // Tensor. – 1997. – V. 58. – P. 233–242.
5. Пале Р. *Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе.* – М.: Мир, 1970. – 359 с.
6. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* – М.: Наука, 1981. – Т. 1. – 344 с.
7. Крамер Д. и др. *Точные решения уравнений Эйнштейна.* – М.: Энергоиздат, 1982. – 416 с.
8. Степанов С.Е. *Техника Бохнера для m-мерных компактных многообразий с $SL(m,\mathbb{R})$-структурой* // Алгебра и анализ. – 1998. – Т. 10. – № 4. – С. 703–714.
9. Эйзенхарт Л.П. *Риманова геометрия.* – М.: Иност. лит., 1948. – 316 с.
10. Вольф Дж. *Пространства постоянной кривизны.* – М.: Наука, 1982. – 480 с.
11. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.
12. Kalina J., Pierzchalski A., Walczak P. *Only one of generalized gradients can be elliptic* // Ann. Polon. Math. – 1997. – LXVII.2. – P. 111–120.
13. Kalina J., Orsted B., Pierzchalski A., Walczak P., Zhang G. *Elliptic gradients and highest weights* // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. – 1996. – V. 44. – P. 511–519.
14. Katzin G.H., Levine J. *Note on the number of linearly independent m^{th}-order first integrals space of constant curvature* // Tensor. – 1968. – V. 19. – № 1. – P. 42–44.
15. Бессе А. *Многообразия Эйнштейна.* Т. 1, 2. – М.: Мир, 1990. – 703 с.
16. Nijenhuis A. *A note on first integrals of geodesics* // Proc. Kon. Ned. Acad. Van Wetens. – Amsterdam. – Ser. A. – 1967. – V. 52. – P. 141–145.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступили
первый вариант 05.02.2001
окончательный вариант 28.12.2001