И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2002 МАТЕМАТИКА № 5 (480)

УДК 514.756.2

А.В. СТОЛЯРОВ

ОСНАЩЕНИЯ И АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ КОНФОРМНОГО ПРОСТРАНСТВА

В работе во 2-й дифференциальной окрестности внутренним образом строятся различные инвариантные полные оснащения распределений m-мерных линейных элементов $\mathfrak{M}$, погруженных в n-мерное собственно конформное пространство C_n, а также изучаются свойства аффинных связностей, индуцируемых при этом на подмногообразии $\mathfrak{M}$. Индексы принимают следующие значения:

$$\lambda, \mu, \rho = \overline{0, n+1};\quad \overline{I}, \overline{K}, \overline{L} = \overline{0, n};\quad I, K, L = \overline{1, n};\quad i, j, k, l, s, t = \overline{1, m};$$
$$\overline{i}, \overline{j}, \overline{k} = \overline{0, m};\quad \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n}.$$

1. Рассмотрим собственно конформное пространство C_n; отнесем его к подвижному полуизотропному [1] реперу $R = \{A_\lambda\}$, состоящему из двух точек A_0, A_{n+1} и n гиперсфер A_K действительных ненулевых радиусов, проходящих через эти точки. Если скалярные произведения $(A_\lambda A_\mu)$ элементов выбранного репера обозначить через $g_{\lambda\mu}$, то справедливо [2]

$$\|g_{\lambda\mu}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{IK} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}, \tag{1}$$

причем в собственно конформном пространстве C_n матрица $\|g_{IK}\|$ является невырожденной и положительно определенной.

Известно [1], [2], что все точки конформного пространства C_n отображаются в точки неподвижной действительной овальной гиперквадрики Дарбу Q^2_n проективного пространства P_{n+1}:

$$g_{IK}x^I x^K + 2x^0 x^{n+1} = 0,$$

где x^λ — координаты точек $P \in \mathrm{C}_n$ относительно репера R.

При бесконечно малом преобразовании конформной группы $\mathfrak{L}$ (т. е. стационарной подгруппы абсолюта $Q^2_n \subset \mathrm{P}_{n+1}$) элементы конформного репера R получают приращения, главную часть которых определяют дифференциалы dA_λ, являющиеся гиперсферами. Эти дифференциалы разлагаются по элементам исходного репера R в виде

$$dA_\lambda = \omega^\mu_\lambda A_\mu, \tag{2}$$

где дифференциальные формы Пфаффа ω^μ_λ зависят от параметров группы $\mathfrak{L}$; при этом число линейно независимых форм ω^μ_λ равно числу $(n+1)(n+2)/2$ независимых параметров этой группы. Условиями полной интегрируемости системы уравнений (2) являются следующие структурные уравнения:

$$D\omega^\mu_\lambda = \omega^\rho_\lambda \wedge \omega^\mu_\rho.$$

Кроме того, в силу соотношений (1), (2) формы ω_λ^μ удовлетворяют следующим линейным зависимостям [2]:

$$\omega_0^{n+1} = \omega_{n+1}^0 = 0, \quad \omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = 0;$$
$$\omega_I^0 + g_{IL}\omega_{n+1}^L = 0, \quad \omega_I^{n+1} + g_{IL}\omega_0^L = 0;$$
$$dg_{IK} - g_{IL}\omega_K^L - g_{LK}\omega_I^L = 0.$$

2. Согласно [3] дифференциальные уравнения взаимно ортогональных распределений $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно m-мерных и $(n-m)$-мерных линейных элементов (A_0, L_m) и (A_0, L_{n-m}) в полуортогональном $(g_{i\alpha} = (A_i A_\alpha) = 0)$ и полуизотропном репере R 0-го порядка $(A_i \in L_m$, $A_\alpha \in L_{n-m})$ имеют вид

$$\omega_i^\alpha = \Lambda_{iK}^\alpha \omega_0^K, \tag{3}$$
$$\omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha K}^i \omega_0^K, \tag{4}$$

где

$$g_{ij}\Lambda_{\alpha K}^j + g_{\alpha\beta}\Lambda_{iK}^\beta = 0. \tag{5}$$

Каждая из систем функций g_{ij}, $g_{\alpha\beta}$ образует невырожденный положительно определенный симметричный тензор:

$$dg_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{kj}\omega_i^k = 0, \quad dg_{\alpha\beta} - g_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma - g_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma = 0; \tag{6}$$
$$g_1 \overset{\text{def}}{=} |g_{ij}| > 0, \quad d\ln\sqrt{g_1} = \omega_k^k; \quad g_2 \overset{\text{def}}{=} |g_{\alpha\beta}| > 0, \quad d\ln\sqrt{g_2} = \omega_\gamma^\gamma; \tag{7}$$
$$g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j, \quad g_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta;$$
$$dg^{ij} + g^{ik}\omega_k^j + g^{kj}\omega_k^i = 0, \quad dg^{\alpha\beta} + g^{\alpha\gamma}\omega_\gamma^\beta + g^{\gamma\beta}\omega_\gamma^\alpha = 0. \tag{8}$$

Продолжая уравнения (3), (4), имеем

$$\begin{aligned} &(\text{а}) \quad \nabla\Lambda_{ij}^\alpha + \Lambda_{ij}^\alpha\omega_0^0 - g_{ij}\omega_{n+1}^\alpha = \Lambda_{ijL}^\alpha\omega_0^L, \\ &(\text{б}) \quad \nabla\Lambda_{i\beta}^\alpha + \Lambda_{i\beta}^\alpha\omega_0^0 - \delta_\beta^\alpha\omega_i^0 = \Lambda_{i\beta L}^\alpha\omega_0^L; \end{aligned} \tag{9}$$

$$\Lambda_{i[jk]}^\alpha = \Lambda_{i\delta}^\alpha\Lambda_{[jk]}^\delta, \quad \Lambda_{i[\beta\gamma]}^\alpha = \Lambda_{is}^\alpha\Lambda_{[\beta\gamma]}^s,$$
$$\Lambda_{ij\beta}^\alpha - \Lambda_{i\beta j}^\alpha = \Lambda_{i\delta}^\alpha\Lambda_{j\beta}^\delta - \Lambda_{is}^\alpha\Lambda_{\beta j}^s,$$

$$\begin{aligned} &(\text{а}) \quad \nabla\Lambda_{\alpha j}^i + \Lambda_{\alpha j}^i\omega_0^0 - \delta_j^i\omega_\alpha^0 = \Lambda_{\alpha jL}^i\omega_0^L, \\ &(\text{б}) \quad \nabla\Lambda_{\alpha\beta}^i + \Lambda_{\alpha\beta}^i\omega_0^0 - g_{\alpha\beta}\omega_{n+1}^i = \Lambda_{\alpha\beta L}^i\omega_0^L; \end{aligned} \tag{10}$$

$$\Lambda_{\alpha[jk]}^i = \Lambda_{\alpha\delta}^i\Lambda_{[jk]}^\delta, \quad \Lambda_{\alpha[\beta\gamma]}^i = \Lambda_{\alpha s}^i\Lambda_{[\beta\gamma]}^s,$$
$$\Lambda_{\alpha j\beta}^i - \Lambda_{\alpha\beta j}^i = \Lambda_{\alpha\delta}^i\Lambda_{j\beta}^\delta - \Lambda_{\alpha s}^i\Lambda_{\beta j}^s.$$

Из уравнений (9(а)), (10(б)) следует, что каждая из систем функций $\Lambda_{[ij]}^\alpha$, $\Lambda_{[\alpha\beta]}^i$ образует кососимметричный тензор 1-го порядка; обращение в нуль тензора $\Lambda_{[ij]}^\alpha$ или $\Lambda_{[\alpha\beta]}^i$ есть условие голономности распределения $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{N}$ соответственно.

3. Пространство C_n называется нормализованным [4], если в нем задано дифференцируемое точечное соответствие $A_0 \to X_{n+1}$, $X_{n+1} \neq A_0$ (A_0 — нормализуемая точка, X_{n+1} — нормализующая точка пространства C_n). Известно [3], что при задании взаимно ортогональных распределений $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ нормализация пространства C_n равносильна тому, что в каждом центре A_0 к m-мерному и $(n-m)$-мерному элементам L_m и L_{n-m} подмногообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ присоединены инвариантные касательные m-сфера $[P_\alpha]$ и $(n-m)$-сфера $[P_i]$ соответственно, проходящие через точки A_0 и X_{n+1}; при этом каждое из распределений $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ согласно терминологии М.А. Акивиса [2] назовем *вполне оснащенным* (или просто *оснащенным*). В силу ортогональности элементов L_m и L_{n-n} $(n-m)$-сфера $[P_i]$ является нормальной по отношению к L_m в соответствующем центре A_0.

Гиперсферы P_i, P_α и точка X_{n+1} имеют следующие разложения:

$$P_i = A_i + x_i^0 A_0, \quad P_\alpha = A_\alpha + x_\alpha^0 A_0,$$

$$X_{n+1} = -\frac{1}{2}(g^{ij}x_i^0 x_j^0 + g^{\alpha\beta}x_\alpha^0 x_\beta^0)A_0 - g^{ij}x_j^0 A_i - g^{\alpha\beta}x_\beta^0 A_\alpha + A_{n+1};$$

здесь функции x_i^0, x_α^0 подчинены уравнениям [3]

$$\begin{aligned} &(\text{а}) \quad \nabla x_i^0 + \omega_i^0 = x_{iK}^0 \omega_0^K, \\ &(\text{б}) \quad \nabla x_\alpha^0 + \omega_\alpha^0 = x_{\alpha K}^0 \omega_0^K. \end{aligned} \tag{11}$$

Если в (11) выполняется лишь одна из систем уравнений ((а) или (б)), то говорят [2], что задано частичное оснащение распределения $\mathfrak{M}$ (или $\mathfrak{N}$). Например, если выполнена система уравнений (11(а)), то имеем частичное оснащение распределения $\mathfrak{M}$ полем нормальных $(n-m)$-сфер $[P_i]$ (нормальное оснащение, см. [2], [3]); если выполнена система уравнений (11(б)), то говорят, что задано частичное оснащение распределения $\mathfrak{M}$ полем касательных m-сфер $[P_\alpha]$ (касательное оснащение, см. [2], [3]).

Показано [3], что

1) инвариантное полное оснащение каждого из взаимно ортогональных распределений $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, погруженных в собственно конформное пространство C_n, определяется внутренним образом в первой дифференциальной окрестности полями квазитензоров

$$\Lambda_i \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-m}\Lambda_{i\gamma}^\gamma, \quad \Lambda_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{m}\Lambda_{\alpha j}^j; \tag{12}$$

2) в дифференциальной окрестности ниже 3-го порядка невозможно построить внутренним образом инвариантное полное оснащение поверхности $\mathrm{V}_m \subset \mathrm{C}_n$; инвариантное касательное оснащение ее определяется внутренним образом во 2-й дифференциальной окрестности полем квазитензора Λ_α.

4. Во 2-й дифференциальной окрестности построим полные оснащения распределения $\mathfrak{M}$ в C_n, определяемые внутренним образом.

В силу уравнений (6), (8), (9(а)) на распределении $\mathfrak{M}$ в C_n каждая из следующих систем функций образует тензор первого порядка:

$$a_{ij}^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{ij}^\alpha - \frac{1}{m}g_{ij}g^{ts}\Lambda_{st}^\alpha, \quad \nabla a_{ij}^\alpha + a_{ij}^\alpha\omega_0^0 = a_{ijK}^\alpha\omega_0^K; \tag{13}$$

$$a^{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} g^{is}g^{jt}a_{ij}^\alpha a_{st}^\beta, \quad \nabla a^{\alpha\beta} + 2a^{\alpha\beta}\omega_0^0 = a_K^{\alpha\beta}\omega_0^K; \tag{14}$$

$$\mathrm{A}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} g_{\alpha\beta}g^{st}a_{is}^\alpha a_{jt}^\beta, \quad \nabla\mathrm{A}_{ij} + 2\mathrm{A}_{ij}\omega_0^0 = \mathrm{A}_{ijK}\omega_0^K, \quad \mathrm{A}_{[ij]} = \mathrm{A}_{[ij]K} = 0. \tag{15}$$

Отметим, что поля этих тензоров определены и на поверхности $\mathrm{V}_m \subset \mathrm{C}_n$, но принадлежат 2-й дифференциальной окрестности точки $\mathrm{A}_0 \subset \mathrm{V}_m$.

С использованием уравнений (8), (9(б)) убеждаемся, что на распределении $\mathfrak{M}$ $(m < n-1)$ каждая из следующих систем функций также образует тензор первого порядка:

$$b_{i\beta}^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{i\beta}^\alpha - \frac{1}{n-m}\delta_\beta^\alpha\Lambda_{i\gamma}^\gamma, \quad \nabla b_{i\beta}^\alpha + b_{i\beta}^\alpha\omega_0^0 = b_{i\beta K}^\alpha\omega_0^K; \tag{16}$$

$$b_\beta^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} g^{st}b_{s\gamma}^\alpha b_{t\beta}^\gamma, \quad \nabla b_\beta^\alpha + 2b_\beta^\alpha\omega_0^0 = b_{\beta K}^\alpha\omega_0^K; \tag{17}$$

$$\mathrm{B}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} b_{i\gamma}^\alpha b_{j\alpha}^\gamma, \quad \nabla\mathrm{B}_{ij} + 2\mathrm{B}_{ij}\omega_0^0 = \mathrm{B}_{ijK}\omega_0^K, \quad \mathrm{B}_{[ij]} = \mathrm{B}_{[ij]K} = 0. \tag{18}$$

Заметим, что на поверхности $\mathrm{V}_m \subset \mathrm{C}_n$ поля тензоров (16)–(18) отсутствуют, а на распределении гиперплоскостных элементов ($m = n-1$) тензоры (16)–(18) обращаются в нуль.

Предполагая, что на распределении $\mathfrak{M}$ (или на поверхности V_m) при некотором фиксированном $a = \overline{1,3}$ относительный инвариант $\overset{a}{\mathrm{A}}$ первого (второго) порядка, где

$$\overset{1}{\mathrm{A}} \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt[2m]{\frac{|\mathrm{A}_{ij}|}{g_1}}, \quad \overset{2}{\mathrm{A}} \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt{g_{\alpha\beta}a^{\alpha\beta}}, \quad \overset{3}{\mathrm{A}} \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt[2(n-m)]{|a^{\alpha\beta}|g_2}, \tag{19}$$

отличен от нуля, в силу уравнений (6), (7), (14), (15) находим

$$d\ln\overset{a}{\mathrm{A}} + \omega_0^0 = \overset{a}{\mathrm{A}}_L\omega_0^L, \quad a = \overline{1,3}; \tag{20}$$

здесь

$$\overset{1}{\mathrm{A}}_L = 2mA^{ks}\mathrm{A}_{ksL}, \quad \mathrm{A}^{ik}\mathrm{A}_{kj} = \delta_j^i, \quad \nabla\mathrm{A}^{ij} - 2\mathrm{A}^{ij}\omega_0^0 = -\mathrm{A}^{is}\mathrm{A}^{jt}\mathrm{A}_{stL}\omega_0^L. \tag{21}$$

Замечание. При $m = n-1$ относительные инварианты $\overset{2}{\mathrm{A}}$ и $\overset{3}{\mathrm{A}}$ совпадают.

Аналогично, предполагая, что на распределении $\mathfrak{M}$ ($m < n-1$) при некотором фиксированном $a = \overline{1,3}$ относительный инвариант $\overset{a}{\mathrm{B}}$ первого порядка, где

$$\overset{1}{\mathrm{B}} \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt[2m]{\frac{|\mathrm{B}_{ij}|}{g_1}}, \quad \overset{2}{\mathrm{B}} \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt{b_\gamma^\gamma}, \quad \overset{3}{\mathrm{B}} \overset{\mathrm{def}}{=} \sqrt[2(n-m)]{|b_\beta^\alpha|},$$

отличен от нуля, в силу уравнений (7), (17), (18) имеем

$$d\ln\overset{a}{\mathrm{B}} + \omega_0^0 = \overset{a}{\mathrm{B}}_L\omega_0^L, \quad a = \overline{1,3}, \tag{22}$$

где, например,

$$\overset{1}{\mathrm{B}}_L = 2m\mathrm{B}^{ks}\mathrm{B}_{ksL}, \quad \mathrm{B}^{ik}\mathrm{B}_{ks} = \delta_j^i.$$

Продолжая уравнения (20), (22), получим

$$\begin{aligned} &(\text{а}) \quad \nabla\overset{a}{\mathrm{A}}_i + \overset{a}{\mathrm{A}}_i\omega_0^0 + \omega_i^0 = \overset{a}{\mathrm{A}}_{iL}\omega_0^L, \quad \overset{a}{\mathrm{A}}_{[ij]} = -\overset{a}{\mathrm{A}}_\gamma\Lambda_{[ij]}^\gamma, \\ &(\text{б}) \quad \nabla\overset{a}{\mathrm{A}}_\alpha + \overset{a}{\mathrm{A}}_\alpha\omega_0^0 + \omega_\alpha^0 = \overset{a}{\mathrm{A}}_{\alpha L}\omega_0^L; \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &(\text{а}) \quad \nabla\overset{a}{\mathrm{B}}_i + \overset{a}{\mathrm{B}}_i\omega_0^0 + \omega_i^0 = \overset{a}{\mathrm{B}}_{iL}\omega_0^L, \\ &(\text{б}) \quad \nabla\overset{a}{\mathrm{B}}_\alpha + \overset{a}{\mathrm{B}}_\alpha\omega_0^0 + \omega_\alpha^0 = \overset{a}{\mathrm{B}}_{\alpha L}\omega_0^L. \end{aligned} \tag{24}$$

Отметим, что все квазитензоры $\overset{a}{\mathrm{A}}_i$, $\overset{a}{\mathrm{A}}_\alpha$, $\overset{a}{\mathrm{B}}_i$, $\overset{a}{\mathrm{B}}_\alpha$ принадлежат окрестности 2-го порядка образующего элемента распределения $\mathfrak{M}$; квазитензоры $\overset{a}{\mathrm{A}}_i$ определены и на поверхности $\mathrm{V}_m \subset \mathrm{C}_n$ и охвачены ее компонентами фундаментального объекта 3-го порядка.

Сравнение уравнений (23) и (24) с соответствующими уравнениями (11) доказывает справедливость следующих предложений.

Теорема 1. *Различные попарные сочетания нормальных и касательных оснащений распределения m-мерных линейных элементов $\mathfrak{M}$ в C_n, определяемых полями квазитензоров соответственно $\overset{a}{\mathrm{A}}_i$, $\overset{a}{\mathrm{A}}_\alpha$, $a = \overline{1,3}$ (см. (23)), во 2-й дифференциальной окрестности внутренним образом индуцируют*

а) *при $m \neq n-1$ девять (в общем случае) инвариантных полных оснащений подмногообразия $\mathfrak{M}$;*

б) *при $m = n-1$ четыре инвариантных полных оснащений подмногообразия $\mathfrak{M}$.*

Следствие. Поля квазитензоров 3-го порядка $\overset{a}{\mathrm{A}}_i$, $a=\overline{1,3}$, внутренним образом определяют
а) при $m\neq n-1$ три (в общем случае) нормальных оснащения поверхности $\mathrm{V}_m\subset \mathrm{C}_n$;
б) при $m=n-1$ два нормальных оснащения гиперповерхности $\mathrm{V}_{n-1}\subset \mathrm{C}_n$.

Каждое из этих полей вместе с полем квазитензора 2-го порядка Λ_α (см. (12)) в 3-й дифференциальной окрестности задает внутреннее полное оснащение подмногообразия V_m.

Теорема 2. *При $m<n-1$ различные попарные сочетания нормальных и касательных оснащений распределения m-мерных линейных элементов $\mathfrak{M}$ в C_n, определяемых полями квазитензоров соответственно $\overset{a}{\mathrm{B}}_i$, $\overset{a}{\mathrm{B}}_\alpha$, $a=\overline{1,3}$ (см. (24)), во 2-й дифференциальной окрестности внутренним образом индуцируют девять (в общем случае) инвариантных полных оснащений подмногообразия $\mathfrak{M}$.*

Замечание 1. Из теорем 1 и 2 следует, что при $m<n-1$ в общем случае во 2-й дифференциальной окрестности имеем тридцать шесть инвариантных полных оснащений распределения $\mathfrak{M}$ в C_n, определяемых внутренним образом полями квазитензоров $\overset{a}{\mathrm{A}}_i$, $\overset{a}{\mathrm{A}}_\alpha$, $\overset{a}{\mathrm{B}}_i$, $\overset{a}{\mathrm{B}}_\alpha$.

Замечание 2. В случае распределения $\mathfrak{M}$ гиперплоскостных элементов $(m=n-1)$ в предположении невырожденности тензора a^n_{ij} (см. (13)), т. е. $a\overset{\mathrm{def}}{=}|a^n_{ij}|\neq 0$, согласно [3] в качестве относительного инварианта типа $\overset{a}{\mathrm{A}}$ (см. (19)) можно взять

$$\mathrm{A}\overset{\mathrm{def}}{=}\sqrt[n-1]{\frac{a}{g_1}},\quad d\ln\mathrm{A}+\omega^0_0=\mathrm{A}_L\omega^L_0;$$

при этом поля квазитензоров A_i, A_α во 2-й дифференциальной окрестности внутренним образом определяют полное оснащение подмногообразия $\mathfrak{M}$.

5. В [5] доказано, что при полном оснащении распределения $\mathfrak{M}$, погруженного в конформное пространство C_n, полями квазитензоров x^0_i, x^0_α (см. (11)) в расслоении линейных элементов L_m подмногообразия $\mathfrak{M}$ индуцируется вейлево пространство $W_{n,m}$ (вообще говоря, с кручением) с полем метрического тензора g_{ij} и дополнительной формой $\theta=\omega^0_0-x^0_L\omega^L_0$, базой которого является пространство C_n, а слоевыми формами —

$$\overset{0}{\theta}{}^j_0=\omega^j_0,\quad \overset{0}{\theta}{}^j_i=\omega^j_i-\delta^j_i(\omega^0_0-x^0_L\omega^L_0)+g^{jk}x^0_k\omega^{n+1}_i+x^0_i\omega^j_0; \tag{25}$$

тензоры кручения $\overset{0}{r}{}^j_{0KL}$ и кривизны $\overset{0}{r}{}^j_{iKL}$ пространства $W_{n,m}$ имеют соответственно вид

$$\overset{0}{r}{}^j_{0st}=0,\quad \overset{0}{r}{}^j_{0s\alpha}=-(\Lambda^j_{\alpha s}+x^0_\alpha\delta^j_s),\quad \overset{0}{r}{}^j_{0\beta\gamma}=2\Lambda^j_{[\beta\gamma]}; \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\overset{0}{r}{}^j_{iKL}&=2[g^{st}x^0_tx^0_sg_{i[K}\delta^j_{L]}-g^{js}x^0_sg_{i[K}\delta^t_{L]}x^0_t+x^0_{i[K}\delta^j_{L]}+\\&+\Lambda^\gamma_{i[K}\Lambda^j_{|\gamma|L}-x^0_ix^0_s\delta^s_{[K}\delta^j_{L]}-g^{js}x^0_s\Lambda^\gamma_{i[K}g_{L]\gamma}-g^{js}x^0_{s[K}g_{L]i}+\\&+\delta^j_i(x^0_{s[K}\delta^s_{L]}-x^0_s\Lambda^s_{\gamma[K}\delta^\gamma_{L]}+x^0_{\gamma[K}\delta^\gamma_{L]}+x^0_\gamma\delta^s_{[K}\Lambda^\gamma_{|s|L})].\end{aligned} \tag{27}$$

Заметим, что на поверхности $\mathrm{V}_m\subset\mathrm{C}_n$ в силу $\omega^\alpha_0=0$ для получения форм вейлевой связности $\overset{0}{\theta}{}^j_i$ (см. (25)) достаточно задать ее частичное оснащение, определяемое полем квазитензора x^0_k, т. е. достаточно задать нормальное оснащение подмногообразия V_m.

Другая аффинная связность ∇ на вполне оснащенном распределении $\mathfrak{M}$ согласно работе [6] определяется системой форм $\{\omega^I_0,\theta^j_i\}$, в которой слоевые формы θ^j_i получаются в результате преобразования

$$\theta^j_i=\overset{0}{\theta}{}^j_i+\Gamma^j_{iK}\omega^K_0.$$

Требование, чтобы система форм θ_i^j удовлетворяла структурным уравнениям Картана–Лаптева [7], [8]

$$D\theta_0^j = \theta_0^k \wedge \theta_k^j + \frac{1}{2} r_{0KL}^j \omega_0^K \wedge \omega_0^L, \quad D\theta_i^j = \theta_i^k \wedge \theta_k^j + \frac{1}{2} r_{iKL}^j \omega_0^K \wedge \omega_0^L,$$

равносильно следующей системе дифференциальных уравнений:

$$d\Gamma_{0K}^j + \Gamma_{0K}^j \omega_0^0 - \Gamma_{0L}^j \omega_K^L + \Gamma_{0K}^s \overset{0}{\theta}{}_s^j - \Gamma_{tK}^j \overset{0}{\theta}{}_0^t + \Gamma_{0K}^t \Gamma_{tL}^j \omega_0^L + \frac{1}{2} \overset{0}{r}{}_{0LK}^j \omega_0^L = \widetilde{\Gamma}_{0KL}^j \omega_0^L, \tag{28}$$

$$d\Gamma_{iK}^j + \Gamma_{iK}^j \omega_0^0 - \Gamma_{iL}^j \omega_K^L - \Gamma_{tK}^j \overset{0}{\theta}{}_i^t + \Gamma_{iK}^t \overset{0}{\theta}{}_t^j - \Gamma_{iL}^t \Gamma_{tK}^j \omega_0^L + \frac{1}{2} \overset{0}{r}{}_{iKL}^j \omega_0^L = \widetilde{\Gamma}_{iKL}^j \omega_0^L, \tag{29}$$

причем

$$r_{0KL}^j = -2\widetilde{\Gamma}_{0[KL]}^j, \quad r_{iKL}^j = -2\widetilde{\Gamma}_{i[KL]}^j. \tag{30}$$

Расписывая с учетом (25) уравнения системы (28) при $K = s$, $K = \alpha$, убеждаемся, что каждая из систем функций Γ_{0s}^j и $\Gamma_{0\alpha}^j$ есть тензор:

$$\begin{aligned} d\Gamma_{0s}^j - \Gamma_{0t}^j \omega_s^t + \Gamma_{0s}^t \omega_t^j &= \Gamma_{0sL}^j \omega_0^L, \\ d\Gamma_{0\alpha}^j - \Gamma_{0\beta}^j \omega_\alpha^\beta + \Gamma_{0\alpha}^t \omega_t^j &= \Gamma_{0\alpha L}^j \omega_0^L; \end{aligned} \tag{31}$$

в уравнениях (31) функции Γ_{0sL}^j, $\Gamma_{0\alpha L}^j$ имеют вид

$$\Gamma_{0sL}^j = \widetilde{\Gamma}_{0sL}^j + \Gamma_{0\beta}^j \Lambda_{sL}^\beta - \Gamma_{0s}^j x_L^0 + \Gamma_{0s}^k g^{jt} x_t^0 g_{kL} - \Gamma_{0s}^k x_k^0 \delta_L^j + \Gamma_{Ls}^j - \Gamma_{0s}^t \Gamma_{tL}^j + \frac{1}{2} \overset{0}{r}{}_{0sL}^j \quad (\Gamma_{\alpha s}^j = 0), \tag{32}$$

$$\Gamma_{0\alpha L}^j = \widetilde{\Gamma}_{0\alpha L}^j + \Gamma_{0k}^j \Lambda_{\alpha L}^k - \Gamma_{0\alpha}^j x_L^0 + \Gamma_{0\alpha}^k g^{jt} x_t^0 g_{kL} - \Gamma_{0\alpha}^k x_k^0 \delta_L^j + \Gamma_{t\alpha}^j \delta_L^t - \Gamma_{0\alpha}^t \Gamma_{tL}^j + \frac{1}{2} \overset{0}{r}{}_{0\alpha L}^j. \tag{33}$$

Ниже будем считать, что $\theta_0^j \equiv \overset{0}{\theta}{}_0^j = \omega_0^j$, следовательно,

$$\Gamma_{0s}^j = \Gamma_{0\alpha}^j = 0. \tag{34}$$

Из дифференциальных уравнений (31) с учетом равенств (34) находим

$$\Gamma_{0sL}^j = \Gamma_{0\alpha L}^j = 0. \tag{35}$$

Теперь из соотношений (30) с использованием выражений (26), (32)–(35) получим компоненты тензора кручения пространства $\mathrm{A}_{n,m}$

$$r_{0st}^j = -2\Gamma_{[st]}^j, \quad r_{0\alpha s}^j = -r_{0s\alpha}^j = \Lambda_{\alpha s}^j + x_\alpha^0 \delta_s^j + \Gamma_{s\alpha}^j, \quad r_{0\alpha\beta}^j = 2\Lambda_{[\alpha\beta]}^j. \tag{36}$$

Из уравнений (29) при $K = s$ и $K = \alpha$ находим

$$\nabla\Gamma_{is}^j + \Gamma_{is}^j \omega_0^0 = \Gamma_{isL}^j \omega_0^L, \quad \nabla\Gamma_{i\alpha}^j + \Gamma_{i\alpha}^j \omega_0^0 = \Gamma_{i\alpha L}^j \omega_0^L; \tag{37}$$

в уравнениях (37) функции Γ_{isL}^j, $\Gamma_{i\alpha L}^j$ имеют вид

$$\Gamma_{isL}^j = \widetilde{\Gamma}_{isL}^j + \Gamma_{i\beta}^j \Lambda_{sL}^\beta - \Gamma_{ks}^j g^{kl} x_l^0 g_{iL} + \Gamma_{ks}^j x_i^0 \delta_L^k + \Gamma_{iL}^k \Gamma_{ks}^j + \Gamma_{is}^k g^{jl} x_l^0 g_{kL} - \Gamma_{is}^k x_k^0 \delta_L^j + \frac{1}{2} \overset{0}{r}{}_{isL}^j, \tag{38}$$

$$\Gamma_{i\alpha L}^j = \widetilde{\Gamma}_{i\alpha L}^j + \Gamma_{ik}^j \Lambda_{\alpha L}^k - \Gamma_{k\alpha}^j g^{kl} x_l^0 g_{iL} + \Gamma_{k\alpha}^j x_i^0 \delta_L^k + \Gamma_{iL}^k \Gamma_{k\alpha}^j + \Gamma_{i\alpha}^k g^{jl} x_l^0 g_{kL} - \Gamma_{i\alpha}^k x_k^0 \delta_L^j + \frac{1}{2} \overset{0}{r}{}_{i\alpha L}^j. \tag{39}$$

Уравнения (37) показывают, что каждая из систем функций Γ_{is}^j, $\Gamma_{i\alpha}^j$ есть тензор; ниже в качестве тензора $\Gamma_{i\alpha}^j$ возьмем

$$\Gamma_{i\alpha}^j = 0. \tag{40}$$

Тогда в силу (37)

$$\Gamma_{i\alpha L}^j = 0. \tag{41}$$

Из соотношений (30) с использованием (38)–(41) находим компоненты

$$r^j_{ist} = -2(\Gamma^j_{i[st]} + g^{kl}x^0_l\Gamma^j_{k[s}g_{t]i} + x^0_i\Gamma^j_{[st]} - \Gamma^j_{k[s}\Gamma^k_{|i|t]} - g^{jl}x^0_l\Gamma^k_{i[s}g_{t]k} + x^0_k\Gamma^k_{i[s}\delta^j_{t]}) + \overset{0}{r}{}^j_{ist}, \tag{42}$$

$$r^j_{i\alpha s} = -r^j_{is\alpha} = \Gamma^j_{is\alpha} + \Gamma^j_{ik}\Lambda^k_{\alpha s} + \overset{0}{r}{}^j_{i\alpha s}, \tag{43}$$

$$r^j_{i\alpha\beta} = 2\Gamma^j_{ik}\Lambda^k_{[\alpha\beta]} + \overset{0}{r}{}^j_{i\alpha\beta} \tag{44}$$

тензора кривизны пространства аффинной связности $\mathrm{A}_{n,m}$.

Таким образом, доказана

Теорема 3. *На вполне оснащенном распределении m-мерных линейных элементов $\mathfrak{M}$ в C_n, кроме вейлева пространства $W_{n,m}$, определяемого слоевыми формами $\overset{0}{\theta}{}^j_i$* (25), *при задании на подмногообразии $\mathfrak{M}$ поля тензора Γ^j_{ik} индуцируется пространство аффинной связности $\mathrm{A}_{n,m}$ со слоевыми формами*

$$\theta^j_0 = \overset{0}{\theta}{}^j_0, \quad \theta^j_i = \overset{0}{\theta}{}^j_i + \Gamma^j_{ik}\omega^k_0, \tag{45}$$

причем тензоры кручения и кривизны пространства $\mathrm{A}_{n,m}$ имеют соответственно вид (36) *и* (42)–(44).

6. Продолжая уравнения (15), имеем, в частности,

$$\nabla \mathrm{A}_{ijk} + 3\mathrm{A}_{ijk}\omega^0_0 + \mathrm{A}_{ij}\omega^0_k + \mathrm{A}_{(ij}\omega^0_{k)} - \mathrm{A}_{s(i}g_{j)k}g^{st}\omega^0_t = \mathrm{A}_{ijkL}\omega^L_0. \tag{46}$$

Предполагая, что распределение $\mathfrak{M}$ частично оснащено полем квазитензора x^0_i (т. е. задано нормальное оснащение его полем $(n-m)$-сфер $[P_i]$), возьмем охват

$$\overset{1}{D}_{ijk} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{A}_{ijk} - \mathrm{A}_{ij}x^0_k - \mathrm{A}_{(ij}x^0_{k)} + \mathrm{A}_{s(i}g_{j)k}g^{st}x^0_t, \quad \overset{1}{D}_{[ij]k} = 0; \tag{47}$$

согласно уравнениям (11(a)), (15), (46) совокупность функций $\overset{1}{D}_{ijk}$ на распределении $\mathfrak{M}$ образует тензор порядка не ниже второго (на поверхности $\mathrm{V}_m \subset \mathrm{C}_n$ — не ниже третьего):

$$\nabla \overset{1}{D}_{ijk} + 3\overset{1}{D}_{ijk}\omega^0_0 = \overset{1}{D}_{ijkL}\omega^L_0. \tag{48}$$

В силу соотношений (21), (47) справедливо

$$\mathrm{A}^{ij}\overset{1}{D}_{ijk} = 2m(\overset{1}{\mathrm{A}}_k - x^0_k);$$

следовательно, *тензоры A^{ij} и $\overset{1}{D}_{ijk}$ аполярны тогда и только тогда, когда в компонентах тензора $\overset{1}{D}_{ijk}$* (см. (47)) *в качестве функций x^0_k берется квазитензор $\overset{1}{\mathrm{A}}_k$ второго порядка.*

В силу уравнений (21), (48) в качестве тензора $\overset{1}{\Gamma}{}^j_{ik}$ (см. (37)) можно взять охват

$$\overset{1}{\Gamma}{}^j_{ik} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{A}^{js}\overset{1}{D}_{sik}, \tag{49}$$

следовательно, согласно (45), (49) слоевые формы связности $\overset{1}{\nabla}$ на вполне оснащенном распределении $\mathfrak{M}$ примут вид

$$\overset{1}{\theta}{}^j_0 = \overset{0}{\theta}{}^j_0, \quad \overset{1}{\theta}{}^j_i = \overset{0}{\theta}{}^j_i + \mathrm{A}^{js}\overset{1}{D}_{sik}\omega^k_0. \tag{50}$$

Дифференциальные уравнения (15) с использованием выражений (25), (50) запишутся в виде

$$d\mathrm{A}_{ij} - \mathrm{A}_{ik}\overset{0}{\theta}{}^k_j - \mathrm{A}_{kj}\overset{1}{\theta}{}^k_i = (\mathrm{A}_{ij\alpha} - 2\mathrm{A}_{ij}x^0_\alpha)\omega^\alpha_0. \tag{51}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Аффинные связности* $\overset{0}{\nabla}$ *и* $\overset{1}{\nabla}$ *пространств* $W_{n,m}$ *и* $\overset{1}{\mathrm{A}}_{n,m}$*, индуцируемые полным оснащением распределения* $\mathfrak{M}$ *в* C_n*, сопряжены* [9] *относительно поля симметричного тензора первого порядка* A_{ij} *вдоль любой кривой, принадлежащей подмногообразию* $\mathfrak{M}$.

Заметим, что этот результат справедлив и на нормально оснащенной поверхности $\mathrm{V}_m \subset \mathrm{C}_n$; в этом случае в силу $\omega_0^\alpha = 0$ уравнения (51) запишутся в виде

$$d\mathrm{A}_{ij} - \mathrm{A}_{ik}\overset{0}{\theta}{}_j^k - \mathrm{A}_{kj}\overset{1}{\theta}{}_i^k = 0. \tag{52}$$

На нормально оснащенной поверхности $\mathrm{V}_m \subset \mathrm{C}_n$ тензор кручения $\overset{1}{r}{}^j_{0st}$ связности $\overset{1}{\nabla}$ в силу соотношений (36), (49) имеет вид

$$\overset{1}{r}{}^j_{0st} = -2\mathrm{A}^{jk}\overset{1}{D}_{k[st]}. \tag{53}$$

Тензор кривизны $\overset{1}{r}{}^j_{ist}$ связности $\overset{1}{\nabla}$ имеет строение (42), где в качестве Γ^j_{ik} взят тензор $\overset{1}{\Gamma}{}^j_{ik}$ (см. (49)). Приведем вычисление компонент тензора $\overset{1}{r}{}^j_{ist}$, используя сопряженность связностей $\overset{0}{\nabla}$ и $\overset{1}{\nabla}$ относительно поля симметричного тензора A_{ij}. Замыкая уравнения (52), имеем

$$\mathrm{A}_{ik}\overset{0}{r}{}^k_{jst} + \mathrm{A}_{jk}\overset{1}{r}{}^k_{ist} = 0,$$

откуда непосредственно находим

$$\overset{1}{r}{}^j_{ist} = -\mathrm{A}_{ik}\mathrm{A}^{jl}\overset{0}{r}{}^k_{lst}; \tag{54}$$

здесь компоненты тензора кривизны $\overset{0}{r}{}^k_{lst}$ связности $\overset{0}{\nabla}$ имеют строение (27).

Из выражений (54) получим

$$\overset{1}{r}{}^k_{kst} = -\overset{0}{r}{}^k_{kst} = 2\overset{0}{r}_{[st]},$$

где $\overset{0}{r}_{[st]}$ — объемный тензор [9] вейлева пространства $W_{m,m}$. Таким образом, если пространство $\overset{1}{\mathrm{A}}_{m,m}$ имеет нулевое кручение (см. (53)) (заметим, что пространство $W_{m,m} \equiv \overset{0}{\mathrm{A}}_{m,m}$ без кручения, см. (26)), то $\overset{1}{r}_{[st]} = \overset{0}{r}_{[st]}$. Следовательно, справедлива

Теорема 5. *Если на нормально оснащенной поверхности* $V_m \subset C_n$ *связность пространства* $\overset{1}{\mathrm{A}}_{m,m}$ *не имеет кручения, то вейлево пространство* $W_{m,m}$ *является римановым тогда и только тогда, когда связность пространства* $\overset{1}{\mathrm{A}}_{m,m}$ *эквиаффинна.*

Так как аффинная связность $\overset{01}{\nabla}$, средняя [9] по отношению к $\overset{0}{\nabla}$ и $\overset{1}{\nabla}$, определяется слоевыми формами $\overset{01}{\theta}{}^j_i = \frac{1}{2}(\overset{0}{\theta}{}^j_i + \overset{1}{\theta}{}^j_i)$, то из уравнений (52) следует

$$d\mathrm{A}_{ij} - \mathrm{A}_{ik}\overset{01}{\theta}{}^k_j - \mathrm{A}_{kj}\overset{01}{\theta}{}^k_i = 0.$$

Последние уравнения в случае нулевого кручения связности $\overset{01}{\nabla}$ доказывают следующее предложение.

Теорема 6. *Если на нормально оснащенной поверхности* $V_m \subset C_n$ *связность* $\overset{01}{\nabla}$*, средняя по отношению к аффинным связностям* $\overset{0}{\nabla}$ *и* $\overset{1}{\nabla}$ *пространств* $W_{m,m}$ *и* $\overset{1}{\mathrm{A}}_{m,m}$*, имеет нулевое кручение, то она является римановой с полем метрического тензора* A_{ij}.

7. Предположим, что $m < n-1$; в этом случае наряду с полем тензора $\overset{1}{D}_{ijk}$ (см. (47)) на нормально оснащенном распределении $\mathfrak{M}$ в C_n можно рассмотреть поле тензора

$$\begin{gathered}\overset{2}{D}_{ijk} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{B}_{ijk} - \mathrm{B}_{ij}x_k^0 - \mathrm{B}_{(ij}x_{k)}^0 + \mathrm{B}_{s(i}g_{j)k}g^{st}x_t^0, \quad \overset{2}{D}_{[ij]k} = 0, \\ \nabla\overset{2}{D}_{ijk} + 3\overset{2}{D}_{ijk}\omega_0^0 = \overset{2}{D}_{ijkL}\omega_0^L.\end{gathered} \tag{55}$$

В силу уравнений (18), (55) в качестве тензора Γ_{ik}^j (см. (37)) можно взять $\overset{2}{\Gamma}{}_{ik}^j = \mathrm{B}^{js}\overset{2}{D}_{sik}$, следовательно, слоевые формы связности $\overset{2}{\nabla}$ пространства $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,m}$, индуцируемого на вполне оснащенном распределении $\mathfrak{M}$ $(m < n-1)$, примут вид

$$\overset{2}{\theta}{}_0^j = \overset{0}{\theta}{}_0^j, \quad \overset{2}{\theta}{}_i^j = \overset{0}{\theta}{}_i^j + \mathrm{B}^{js}\overset{2}{D}_{sik}\omega_0^k.$$

Справедливы уравнения, идентичные уравнениям (51),

$$d\mathrm{B}_{ij} - \mathrm{B}_{ik}\overset{0}{\theta}{}_j^k - \mathrm{B}_{kj}\overset{2}{\theta}{}_i^k = (\mathrm{B}_{ij\alpha} - 2\mathrm{B}_{ij}x_\alpha^0)\omega_0^\alpha;$$

последнее доказывает следующее предложение, аналогичное теореме 4.

Теорема 7. *Аффинные связности $\overset{0}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ пространств $W_{n,m}$ и $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,m}$, индуцируемых полным оснащением распределения m-мерных линейных элементов $\mathfrak{M}$ в C_n $(m < n-1)$, сопряжены относительно поля симметричного тензора B_{ij} вдоль любой кривой, принадлежащей подмногообразию $\mathfrak{M}$.*

Литература

1. Бушманова Г.В., Норден А.П. *Элементы конформной геометрии.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972. – 178 с.
2. Акивис М.А. *К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей* // Матем. сб. – 1961. – Т. 53. – № 1. – С. 53–72.
3. Столяров А.В. *Конформно-дифференциальная геометрия оснащенных распределений* // Чувашск. гос. пед. ун-т.- Чебоксары, 2000. – 21 с. – Деп в ВИНИТИ 13.03.00, № 629-В00.
4. Норден А.П. *Конформная интерпретация пространства Вейля* // Матем. сб. – 1949. – Т. 24. – № 1. – С. 75–85.
5. Столяров А.В. *Линейные связности на распределениях конформного пространства* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 3. – С. 60–72.
6. Лаптев Г.Ф. *Многообразия, погруженные в обобщенные пространства* // Тр. 4-го Всесоюзн. матем. съезда. – 1964. – Т. 2. – С. 226–233.
7. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
8. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1979. – Т. 9. – 246 с.
9. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.

Чувашский государственный
педагогический университет

Поступила
28.03.2001