ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 5 (480)

УДК 512.579

А.Г. ПИНУС

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПРОИЗВОДНЫХ СТРУКТУР СВОБОДНЫХ РЕШЕТОК

Важную роль при изучении свободных алгебр играют свойства, выразимые в языке первого порядка. Поскольку инвариантом свободной алгебры $\mathcal{F}_V(k)$ многообразия V выступает число k их свободных порождающих, то элементарная эквивалентность свободных алгебр $\mathcal{F}_V(k) \equiv \mathcal{F}_V(\lambda)$ индуцирует некоторую эквивалентность на классе Card всех кардиналов. При этом, как хорошо известно, на классе всех бесконечных кардиналов эта эквивалентность тривиальна: $\mathcal{F}_V(k) \equiv \mathcal{F}_V(\lambda)$ для любых $k, \lambda \geq \aleph_0$. В связи с этим естествен интерес к использованию в контексте этой проблематики вместо самих свободных алгебр $\mathcal{F}_V(k)$ производных от них структур: $\mathrm{Sub}\,\mathcal{F}_V(k)$ — решеток подалгебр, $\mathrm{Con}\,\mathcal{F}_V(k)$ — решеток конгруэнций, $\mathrm{Aut}\,\mathcal{F}_V(k)$ — групп автоморфизмов, $\mathrm{Iso}\,\mathcal{F}_V(k)$ — полугрупп внутренних изоморфизмов (изоморфизмов между подалгебрами алгебры $\mathcal{F}_V(k)$), $\mathrm{End}\,\mathcal{F}_V(k)$ — полугрупп эндоморфизмов, $\mathrm{Ihm}\,\mathcal{F}_V(k)$ — полугрупп внутренних гомоморфизмов (гомоморфизмов между подалгебрами алгебры $\mathcal{F}_V(k)$) и иных. Возникающая при этом эквивалентность на классе Card всех кардиналов довольно часто оказывается эквивалентностью кардиналов в той или иной логике второго порядка. Обзор большей части подобных результатов можно найти в [1]. В данной работе остановимся на подобных результатах для многообразий решеток.

Напомним известный результат С. Шелаха [2] о логиках второго порядка. В формулировке теоремы имеется в виду, что совокупность отношений, по которым допускается навешивание кванторов, выделяется среди всех отношений с помощью некоторой формулы первого порядка.

Теорема A (С.Шелах). *Существуют лишь четыре логики второго порядка* (*с точностью до взаимной интерпретируемости логик второго порядка друг в друге*) :

1) *логика первого порядка* (*недопустимо навешивание кванторов по отношениям*);
2) *монадическая логика второго порядка* (*допустимо навешивание кванторов по любым одноместным отношениям*);
3) *перестановочная логика второго порядка* (*допустимо навешивание кванторов по отношениям, являющимся биекциями на основном множестве модели*);
4) *полная логика второго порядка* (*допустимо навешивание кванторов по любым отношениям*).

Эквивалентность двух моделей $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в логике первого порядка будем обозначать как $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, в перестановочной логике — как $\mathcal{A} \equiv_p \mathcal{B}$, в полной логике второго порядка — как $\mathcal{A} \equiv_2 \mathcal{B}$. Говоря об эквивалентности кардиналов k и λ в той или иной логике второго порядка, имеем в виду эквивалентность этих кардиналов как моделей пустой сигнатуры. Под кардиналом k будем, как обычно, понимать совокупность всех меньших кардиналов, а порождающими алгебры $\mathcal{F}_V(k)$ будем считать элементы кардинала k.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00571).

Теорема 1. *Для любого нетривиального конечно базируемого многообразия решеток V, для любых бесконечных кардиналов k и λ*

1) $\mathrm{Sub}\,\mathcal{F}_V(k) \equiv \mathrm{Sub}\,\mathcal{F}_V(\lambda) \Longleftrightarrow k \equiv_2 \lambda$;
2) $\mathrm{Aut}\,\mathcal{F}_V(k) \equiv \mathrm{Aut}\,\mathcal{F}_V(\lambda) \Longleftrightarrow k \equiv_p \lambda$;
3) $\mathrm{End}\,\mathcal{F}_V(k) \equiv \mathrm{End}\,\mathcal{F}_V(\lambda) \Longleftrightarrow k \equiv_2 \lambda$;
4) $\mathrm{Iso}\,\mathcal{F}_V(k) \equiv \mathrm{Iso}\,\mathcal{F}_V(\lambda) \Longleftrightarrow k \equiv_2 \lambda$;
5) $\mathrm{Ihm}\,\mathcal{F}_V(k) \equiv \mathrm{Ihm}\,\mathcal{F}_V(\lambda) \Longleftrightarrow k \equiv_2 \lambda$.

Доказательство. Утверждение 1) доказано в [3] для более широкого, чем в формулировке данной теоремы, класса многообразий.

Хорошо известно, что свободные порождающие свободной решетки $\mathcal{F}_V(k)$ суть неразложимые элементы этой решетки, т. е.

$$a \in k \Longleftrightarrow \mathcal{F}_V(k) \models \forall y, z[(a = y \vee z \to y = a \vee z = a)\&(a = y \wedge z \to y = a \vee z = a)].$$

Тем самым ограничение $\varphi|k$ любого автоморфизма φ решетки $\mathcal{F}_V(k)$ на множество порождающих k задает изоморфизм группы $\mathrm{Aut}\,\mathcal{F}_V(k)$ на $\mathrm{Sym}\,k$ — симметрическую группу множества k. В силу результатов [4]–[6] $\mathrm{Sym}\,k \equiv \mathrm{Sym}\,\lambda \Longleftrightarrow k \equiv_p \lambda$ для любых бесконечных кардиналов k и λ, что и доказывает утверждение 2).

Утверждение 3) доказано в [7] для любого конечно базируемого нетривиального многообразия универсальных алгебр конечной сигнатуры.

Утверждения 4) и 5) следуют из утверждения 1), т. к. решеткой идемпотентов полугрупп $\mathrm{Iso}\,\mathcal{F}_V(k)$ и $\mathrm{Ihm}\,\mathcal{F}_V(k)$ служит решетка $\mathrm{Sub}\,\mathcal{F}_V(k)$ подрешеток решетки $\mathcal{F}_V(k)$. $\square$

В связи с результатами теоремы 1 естественной представляется следующая открытая

Проблема. Описать эквивалентность на классе Card всех кардиналов, индуцированную отношением элементарной эквивалентности решеток $\mathrm{Con}\,\mathcal{F}_V(k)$ конгруэнций V-свободных решеток $\mathcal{F}_V(k)$, для конечно базируемых многообразий V решеток.

В силу открытости этой проблемы естествен интерес к эквивалентностям, индуцированным на классе Card элементарной эквивалентностью тех или иных натуральных обогащений решеток $\mathrm{Con}\,\mathcal{F}_V(k)$. В качестве такового обогащения рассмотрим частичную универсальную алгебру $\mathrm{Con}'\,\mathcal{F}_V(k)$, получаемую из решетки $\mathrm{Con}\,\mathcal{F}_V(k)$ путем добавления новой двухместной частичной операции $\circ$-произведения конгруэнций, т. е. для $\Theta_1, \Theta_2 \in \mathrm{Con}\,\mathcal{F}_V(k)$ результат операции $\Theta_1 \circ \Theta_2$ определен в $\mathrm{Con}'\,\mathcal{F}_V(k)$ тогда и только тогда, когда отношение $\Theta_1 \circ \Theta_2$ является конгруэнцией на $\mathrm{Con}\,\mathcal{F}_V(k)$, иначе говоря, когда $\Theta_1 \circ \Theta_2 = \Theta_1 \cup \Theta_2$. Таким образом, неравенство $\Theta_1 \circ \Theta_2 \neq \Theta_1 \cup \Theta_2$ равносильно неперестановочности конгруэнций Θ_1 и Θ_2, т.е. неопределенности операции $\circ$ на Θ_1 и Θ_2 в обогащенной решетке $\mathrm{Con}'\,\mathcal{F}_V(k)$.

Теорема 2. *Пусть V — многообразие дистрибутивных решеток, тогда* $\mathrm{Con}'\,\mathcal{F}_V(k) \equiv \mathrm{Con}'\,\mathcal{F}_V(k) \Longleftrightarrow k \equiv_2 \lambda$ *для любых бесконечных кардиналов k и λ.*

Доказательство. В силу конечной базируемости многообразия V и того, что сигнатура V конечна, импликация $k \equiv_2 \lambda \Longrightarrow \mathrm{Con}'\,\mathcal{F}_V(k) \equiv \mathrm{Con}'\,\mathcal{F}_V(\lambda)$ имеет место по тем же причинам общего характера, что и соответствующие импликации в утверждениях 1)–5) теоремы 1. Докажем обратное.

Через $\mathrm{Part}\,k$ обозначим решетку разбиений кардинала k. В работе [8] доказано, что для любых бесконечных кардиналов k и λ имеет место эквивалентность $\mathrm{Part}\,k \equiv \mathrm{Part}\,\lambda \Longleftrightarrow k \equiv_2 \lambda$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно построить интерпретацию решетки $\mathrm{Part}\,k$ в теории первого порядка обогащенной решетки $\mathrm{Con}'\,\mathcal{F}_V(k)$.

Пусть $\Phi_c(x)$ — формула первого порядка сигнатуры $\langle \wedge, \vee \rangle$, утверждающая, что x — коатом. Если Θ — коатом в $\mathcal{F}_V(k)$, то в силу идемпотентности решеток и того, что единственная простая дистрибутивная решетка двухэлементна (обозначим последнюю как $\underline{2}$), имеет место равенство

$|k/\Theta|k| = 2$. Здесь $\Theta|k$ – ограничение Θ на множество k. Рассмотрим следующую формулу сигнатуры $\langle\wedge,\vee,\circ\rangle$:

$$\Phi(x) = \forall y_1, y_2(\&_{i=1}^2 (x < y_i < 1) \& y_1 \neq y_2 \to y_1 \circ y_2 \neq y_1 \vee y_2) \& \\ \& \forall y_1, y_2, y_3 \Big(\&_{i-1}^3 (x < y_i < 1) \to \bigvee_{i \neq j} y_i = y_j \Big).$$

Пусть $\underline{3}$ обозначает трехэлементную цепь. Тогда для любой дистрибутивной решетки L и любой $\Theta \in \operatorname{Con} L$

$$\operatorname{Con}' L \models \Phi(\Theta) \iff L/\Theta \cong \underline{3}.$$

Два коатома Θ_1, Θ_2 решетки $\operatorname{Con}\mathcal{F}_V(k)$ назовем *параллельными* тогда и только тогда, когда $\operatorname{Con}'\mathcal{F}_V(k) \models \Phi(\Theta_1 \wedge \Theta_2)$, т. е. когда $\mathcal{F}_V(k)/\Theta_1 \wedge \Theta_2$ является трехэлементной цепью. Пусть Θ^* — произвольный коатом в $\operatorname{Con}\mathcal{F}_V(k)$ и $R_{\Theta^*} = \{\Theta \in \operatorname{Con}\mathcal{F}_V(k) \mid \Theta$ — коатом, параллельный $\Theta^*\}$. Отметим, что для любого коатома Θ, если $\Theta \in R_{\Theta^*}$, то $|k/\Theta \wedge \Theta^*|k| = 3$. Коатом Θ решетки $\mathcal{F}_V(k)$ назовем *унитарным*, если для некоторого $a \in k$ класс $[a]_{\Theta|k}$ $\Theta|k$-эквивалентных a элементов из k одноэлементен. Для любого $a \in k$ существуют в точности два связанных с a унитарных коатома: *верхний a-унитарный* коатом Θ^a — ядро гомоморфизма φ^a решетки $\mathcal{F}_V(k)$ на $\underline{2}$ такого, что для $b \in k$ $\varphi^a(b) = 1$ тогда и только тогда, когда $b = a$ и *нижний a-унитарный* коатом Θ_a — ядро гомоморфизма φ_a решетки $\mathcal{F}_V(k)$ на $\underline{2}$ такого, что $\varphi_a(b) = 0$ для $b \in k$ тогда и только тогда, когда $b = a$. Очевидно, параллельный Θ^* коатом Θ унитарен тогда и только тогда, когда для любого $\Theta_1 \in R_{\Theta^*}$ коатомы Θ и Θ_1 параллельны, т. е. существует формула первого порядка $\psi(x,\Theta^*)$ сигнатуры $\langle\wedge,\vee,\circ\rangle$, выделяющая в R_{Θ^*} унитарные коатомы. Причем, если $b \in k$ и $b \in \varphi^{-1}(1)$, то $\Theta^b \in R_{\Theta^*}$, $\Theta_b \notin R_{\Theta^*}$ и $\operatorname{Con}'\mathcal{F}_V(k) \models \psi(\Theta^b,\Theta^*)$, если $b \in \varphi^{-1}(0)$, то $\Theta_b \in R_{\Theta^*}$, $\Theta^b \notin R_{\Theta^*}$ и $\operatorname{Con}'\mathcal{F}_V(k) \models \psi(\Theta_b,\Theta^*)$. Здесь φ — гомоморфизм решетки $\mathcal{F}_V(k)$ на $\underline{2}$, ядром которого является коатом Θ^*. Тем самым совокупность унитарных коатомов решетки $\operatorname{Con}'\mathcal{F}_V(k)$ определима в этой решетке формулой

$$\alpha(x) = \exists y(\Phi_c(y) \& \psi(x,y)).$$

Пусть A — множество всех унитарных коатомов решетки $\operatorname{Con}'\mathcal{F}_V(k)$, т. е. $A = \{\Theta_a, \Theta^a \mid a \in k\}$. На A введем отношение $\sim$: для $\Theta_1, \Theta_2 \in A$ $\Theta_1 \sim \Theta_2$ тогда и только тогда, когда Θ_1 и Θ_2 не параллельны. Очевидно, отношение $\sim$ является эквивалентностью на A (формульной в языке первого порядка сигнатуры $\langle\wedge,\vee,\circ\rangle$) такой, что $|A/{\sim}| = 2$ и $\sim$ разбивает A на классы верхних унитарных и нижних унитарных коатомов. Очевидно также, что $a = b$ для любых $a, b \in k$ тогда и только тогда, когда не существует коатома Θ, параллельного одновременно и Θ_a и Θ^b (или, что равносильно, параллельного одновременно и Θ^a, и Θ_b). То есть существует формульная в языке первого порядка сигнатуры $\langle\wedge,\vee,\circ\rangle$ эквивалентность $\sim_1$ на формульном в том же языке множестве A такая, что

$$A/{\sim_1} = \{\{\Theta_a, \Theta^a\} \mid a \in k\}.$$

Заметим теперь, что для любого $a \in k$ класс $[a]_{\Theta^a \wedge \Theta_a}$ $\Theta^a \wedge \Theta_a$-эквивалентных a элементов решетки $\mathcal{F}_V(k)$ одноэлементен. Действительно, пусть терм $p(x, y_1, \ldots, y_n)$ сигнатуры $\langle\wedge,\vee\rangle$ таков, что для некоторых $a \in k$, $b_1, \ldots, b_n \in k \setminus \{a\}$ $\langle a, p(a, b_1, \ldots, b_n)\rangle \in \Theta^a \wedge \Theta_a$ и $a \neq p(a, b_1, \ldots, b_n)$. Тогда $\langle a, p(a, b_1, \ldots, b_1)\rangle \in \Theta^a \wedge \Theta_a$. Заметим, что при этом $a \neq p(a, b_1, \ldots, b_1)$. В противном случае, т. к. a — свободный порождающий элемент решетки $\mathcal{F}_V(k)$, а значит, как это уже отмечалось в доказательстве теоремы 1, a неразложим, то $p(a, b_1, \ldots, b_1) = a \wedge q(a, b_1, \ldots, b_1)$ для некоторого терма $q(a, y_1, \ldots, y_1)$ (случай, когда $p(a, b_1, \ldots, b_1) = a \vee q(a, b_1, \ldots, b_1)$, рассматривается аналогично). Таким образом, на V истинно тождество $x \leq q(x, y_1, \ldots, y_1)$. Но тогда для любой дистрибутивной решетки L с нулем 0 $L \models \forall x(x \leq q(x, 0, \ldots, 0))$ и тем самым на V истинно тождество $x \leq q(x, y_1, \ldots, y_n)$ (в силу монотонности всех термов на V). Последнее же влечет равенство $a = p(a, b_1, \ldots, b_n)$ в противоречии с нашим предположением. Итак, $\langle a, p(a, b_1, \ldots, b_1)\rangle \in \Theta^a \wedge \Theta_a$ и $a \neq p(a, b_1, \ldots, b_1)$. Но $p(x, y_1, \ldots, y_1)$ есть либо $x \wedge y_1$, либо $x \vee y_1$. В силу определения Θ^a и Θ_a имеем $p(a/\Theta^a, b_1/\Theta^a, \ldots, b_1/\Theta^a) = p(1, 0, \ldots, 0) = a/\Theta^a = 1$,

$p(a/\Theta_a, b_1/\Theta_a, \dots, b_1/\Theta_a) = a/\Theta_a = p(0, 1, \dots, 1) = 0$. В то же время термы $x \wedge y_1$ и $x \vee y_1$ коммутативны. Полученное противоречие и доказывает равенство $|[a]_{\Theta^a \wedge \Theta_a}| = 1$ для любого $a \in k$. При этом $\langle b, c\rangle \in \Theta^a \wedge \Theta_a$ для любых $b, c \in k$ и отличных от a.

Для любых $u, v \in \mathcal{F}_V(k)$ через $\Theta_{u,v}$ обозначим главную конгруэнцию решетки $\mathcal{F}_V(k)$, порожденную парой $\langle u, v\rangle$. Покажем, что главные конгруэнции $\Theta_{a,b}$, где $a, b \in k$, определимы формулой первого порядка сигнатуры $\langle \wedge, \vee, \circ\rangle$ в обогащенной решетке $\mathrm{Con}'\,\mathcal{F}_V(k)$. Точнее, существует формула $\beta(x, y_1, y_2, z_1, z_2)$ первого порядка сигнатуры $\langle \wedge, \vee, \circ\rangle$ такая, что для любых $\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ $\mathrm{Con}'\,\mathcal{F}_V(k) \models \beta(\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4) \Leftrightarrow$ для некоторых $a, b \in k$ $\Theta = \Theta_{a,b}$, $\Theta_1 = \Theta^a$, $\Theta_2 = \Theta_a$, $\Theta_3 = \Theta^b$, $\Theta_4 = \Theta_b$. Действительно, если $a, b \in k$, то свойство $\Theta \in \mathrm{Con}\,\mathcal{F}_V(k)$ такое, что $|\mathcal{F}_V(k)/(\Theta^a \wedge \Theta_a \wedge \Theta^b \wedge \Theta_b) \vee \Theta| = 4$ очевидным образом формульно в языке первого порядка. Обозначим множество подобных Θ как $B_{a,b}$. Конгруэнция $\Theta_{a,b}$ входит в $B_{a,b}$ и выделяется в $B_{a,b}$ следующим свойством: $|\{\Theta \in B_{a,b} | (\Theta^a \wedge \Theta_a \wedge \Theta^b \wedge \Theta_b) \vee \Theta = (\Theta^a \wedge \Theta_a \wedge \Theta^b \wedge \Theta_b) \vee \Theta_{a,b}\}| = 1$. Действительно, если $c, d \in k \setminus \{a, b\}$, то $(\Theta^a \wedge \Theta_a \wedge \Theta^b \wedge \Theta_b) \vee \Theta_{a,c} = (\Theta^a \wedge \Theta_a \wedge \Theta^b \wedge \Theta_b) \vee \Theta_{a,d}$ и аналогичное равенство имеет место для $\Theta_{b,c}$ и $\Theta_{b,d}$ вместо $\Theta_{a,c}$ и $\Theta_{a,d}$. В то же время равенство $|\{\Theta \in B_{a,b} | (\Theta^a \wedge \Theta_a \wedge \Theta^b \wedge \Theta_b) \vee \Theta = (\Theta^a \wedge \Theta_a \wedge \Theta^b \wedge \Theta_b) \vee \Theta_{a,b}\}| = 1$ вытекает из доказанной выше одноэлементности класса $[a]_{\Theta^a \wedge \Theta_a}$. Тем самым построена формульная в языке первого порядка сигнатуры $\langle \wedge, \vee, \circ\rangle$ интерпретация кардинала k (как множества $A/\sim_1$) и отношений $\Theta_{a,b}|k$ для $a, b \in k$ в обогащенной решетке $\mathrm{Con}'\,\mathcal{F}_V(k)$. Очевидно, этого достаточно для построения интерпретации решетки $\mathrm{Part}\,k$ в теории первого порядка обогащенной решетки $\mathrm{Con}'\,\mathcal{F}_V(k)$ (т.к. любая конгруэнция есть верхняя грань некоторой совокупности главных конгруэнций и отображение $\Theta \to \Theta|k$ является отображением решетки $\mathrm{Con}\,\mathcal{F}_V(k)$ на решетку $\mathrm{Part}\,k$). Как замечено в начале доказательства теоремы, отсюда следует справедливость импликации $\mathrm{Con}'\,\mathcal{F}_V(k) \equiv \mathrm{Con}'\,\mathcal{F}_V(k) \Rightarrow k \equiv_2 \lambda$. $\square$

Естественным представляется вопрос: для каких еще многообразий решеток справедливо утверждение теоремы 2?

Литература

1. Pinus A.G., Rose H. *Second order equivalence of cardinals: an algebraic approach* // Contributions to general algebra. 13, Verlag Johannes Heyn, Klagenfurt, 2001. – P. 275–284.
2. Shelah S. *There are just four second-order quantifiers* // Israel J. of Math. – 1973. – V. 15. – № 2. – P. 282–300.
3. Пинус А.Г., Роуз Г. *Элементарная эквивалентность решеток подалгебр свободных алгебр* // Алгебра и логика. – 2000. – Т. 39. – № 5. – С. 595–601.
4. Ершов Ю.Л. *Неразрешимость теорий симметрических и простых конечных групп* // ДАН СССР. – 1964. – Т. 158. – № 4. – С. 777–779.
5. McKenzie R. *On elementary types of symmetric groups* // Alg. univ. – 1971. – V. 1. – № 1. – P. 13–20.
6. Pinus A.G. *Elementary definability of symmetric groups* // Alg. univ. – 1973. – V. 3. – № 1. – P. 59–66.
7. Shelah S. *Interpreting set theory in the endomorphism semigroup of a free algebra or in a category* // Ann. Sci. Univ. Clermont, Math. – 1976. – V. 13. – P. 1–29.
8. Пинус А.Г. *Элементарная эквивалентность решеток разбиений* // Сиб. матем. журн. – 1988. – Т. 28. – № 3. – С. 211–212.

Новосибирский государственный технический университет

Поступила 25.08.2000