ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 4 (467)

УДК 517.518

А.А. НАЗИПОВ

О МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МНОГОЧЛЕНАХ

В работе [1] предложен матричный метод интерполирования функций многих переменных. Дальнейшее развитие этого метода излагалось, например, в [2]. В качестве области интерполирования использовался прямоугольный параллелепипед. В данной работе строятся интерполяционные многочлены как в прямолинейных, так и в криволинейных областях.

Постановка задачи. Введем систему узлов

$$\{x_\alpha\}_{\alpha=0}^{n}, \quad \{y_\beta\}_{\beta=0}^{m}, \quad \{z_\delta\}_{\delta=0}^{r}, \tag{1}$$

где $a_1 \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b_1$, $a_2 \le y_0 < y_1 < \dots < y_m \le b_2$, $a_3 \le z_0 < z_1 < \dots < z_r \le b_3$, и зададим системы функций

$$\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}, \quad \{\psi_j(y)\}_{y=0}^{m}, \quad \{\nu_q(z)\}_{q=0}^{r}, \tag{2}$$

определенных в (1).

Возьмем многочлен

$$P(x,y,z) = \sum_{i,j,q=0}^{n,m,r} c_{i,j,q}\varphi_i(x)\psi_j(y)\nu_q(z)$$

с числовыми коэффициентами

$$c_{i,j,q}, \quad i=\overline{0,n}, \quad j=\overline{0,m}, \quad q=\overline{0,r}. \tag{3}$$

Задача интерполирования функции $f(x,y,z)$, в $\prod\limits_{i=1}^{3}[a_i,b_i]$ системами (2) на (1) состоит в определении коэффициентов (3), для которых должны выполняться условия

$$P(x_i,y_j,z_q) = f_{ijq} = f(x_i,y_j,z_q) \tag{4}$$

для $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, $q=\overline{0,r}$.

Теорема. *Если системы функций* (2) *являются чебышевскими, то система уравнений* (4) *разрешима.*

Функцию $f(x,y,z)$ приближаем многочленом

$$f(x,y,z) \approx P(x,y,z).$$

Это приближение можно представить в матричной форме

$$P(x,y,z) = \xi c, \tag{5}$$

где $\xi = \nu\otimes\psi\otimes\varphi$, $\varphi = (\varphi_i)_{i=\overline{0,n}}$, $\psi = (\psi_j)_{j=\overline{0,m}}$, $\nu = (\nu_q)_{q=\overline{0,r}}$ — матрицы-строки, $c = (c_{000}, c_{100}, \dots, c_{nmr})^T$ — искомая матрица-столбец. Здесь $\otimes$ означает кронекерово произведение матриц. Условия (4) в матричной форме примут вид $\Xi c = f$, где $\Xi = N\otimes\Psi\otimes\Phi$, $f = (f_{000}, f_{100}, \dots f_{nmr})^T$. Здесь

$$\Phi = (\varphi_i(x_k))_{i,k=\overline{0,n}}, \quad \Psi = (\psi_j(y_k))_{j,k=\overline{0,m}}, \quad N = (\nu_q(w_k))_{q,k=\overline{0,r}} \tag{6}$$

— квадратные матрицы.

Если системы функций (2) являются чебышевскими, то матрицы (6) имеют обратные матрицы и, следовательно, существует матрица, обратная матрице Ξ, которую можно записать в виде $\Xi^{-1} = N^{-1} \otimes \Psi^{-1} \otimes \Phi^{-1}$, и, следовательно, имеем $c = \Xi^{-1} f$.

Подставляя последнее выражение в равенство (5), интерполяционный многочлен $P(x, y, z)$ запишем в виде $P(x, y, z) = \xi \Xi^{-1} f$, т. е. $f(x, y, z) \approx \xi \Xi^{-1} f$.

Таким же образом решается задача интерполирования функций многих переменных обобщенными многочленами (полиномами) в криволинейных областях.

Обратим внимание на форму записи интерполяционного многочлена. Интерполяционный многочлен (скалярная величина) представлен как произведение трех матриц:

— матрицы-строки ξ, элементы которой являются функциями x, y, z;

— квадратной матрицы Ξ^{-1}, элементы которой зависят от значений функций φ_i, ψ_j, ν_r, вычисленных в узлах x_i, y_j, z_q соответственно;

— матрицы-столбца f, элементами которой являются значения функций $f(x, y, z)$, вычисленных в узлах x_i, y_j, z_q.

Замечание. Если произведение $\xi \Xi^{-1}$ записать в виде

$$\xi \Xi^{-1} = [\nu N^{-1}] \otimes [\psi \Psi^{-1}] \otimes [\varphi \Phi^{-1}],$$

то вычисление функции $f(x, y, z)$ по всем переменным можно производить параллельно по каждой переменной в отдельности. Такое параллельное вычисление удобно при реализации в системах реального времени.

В данной работе в качестве систем Чебышева взяты алгебраические системы, т. е. $\varphi_i(x) = x^i$, $i = \overline{0, n}$. В этом случае $\Phi = (x_k^i)_{i,k=\overline{0,n}}$ является матрицей Вандермонда, которая имеет обратную матрицу

$$\Phi^{-1} = \left(\frac{q^{(0)}}{q_0}, \frac{q^{(1)}}{q_1}, \ldots, \frac{q^{(n)}}{q_n} \right),$$

где $q^{(0)} = ((-1)^n S_n, \ldots, S_2, -S_1, 1)^T$, $q_0 = (x_1 - x_0) \ldots (x_n - x_0)$. Здесь $S_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, $S_2 = x_i x_2 + x_i x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n, \ldots$, $S_n = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ — симметрические формы. Остальные $q^{(i)}$ и q_i имеют ту же структуру. В них отсутствует элемент x_i.

Рассмотрим два случая.

1) Область интерполирования — прямоугольник. Пусть на плоскости введена декартова система координат, и в заданных узлах известны значения функции $f(x, y)$. Интерполяционный многочлен записываем в виде

$$P(x, y) = (\psi Y^{-1} \otimes \varphi X^{-1}) f,$$

где $\psi(y) = (y^j)_{j=\overline{0,m}}$, $\varphi(x) = (x^i)_{i=\overline{0,n}}$ — матрицы-строки, $Y = (y_j^\beta)_{j,\beta=\overline{0,m}}$, $X = (x_i^\alpha)_{i,\alpha=\overline{0,n}}$ — матрицы Вандермонда, $f = (f_{00}, f_{10}, \ldots, f_{n0}, f_{01}, f_{11}, \ldots, f_{n1}, \ldots, f_{0m}, f_{1m}, \ldots, f_{nm})^T$ — матрица-столбец.

Пусть функция $f(x, y)$ имеет необходимые производные. В ([3], с. 194) показано, что остаточный член в этом случае может быть записан в виде

$$R = \frac{\omega_n(x)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}} f(\xi, y) + \frac{\omega_m(y)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1}}{\partial y^{m+1}} f(x, \eta) - \frac{\omega_n(x)}{(n+1)!} \frac{\omega_m(y)}{(m+1)!} \frac{\partial^{n+m+2}}{\partial x^{n+1} \partial y^{m+1}} f(\xi_1, \eta_1),$$

где $\omega_n(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n)$, $\omega_m(y) = (y - y_0) \ldots (y - y_m)$,

$$\min[x, x_i] < \xi < \max[x, x_i], \quad \min[y, y_j] < \eta < \max[y, y_j], \quad \xi_1 \in [x_0, x_n], \quad \eta_1 \in [y_0, y_m].$$

Пример 1. Пусть $n = m = 1$, в этом случае

$$\psi(y) = (1, y), \quad \varphi(x) = (1, x),$$

$$Y^{-1} = \frac{1}{y_1 - y_0} \begin{pmatrix} y_1 & -y_0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X^{-1} = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{pmatrix} x_1 & -x_0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f = (f_{00}, f_{10}, f_{01}, f_{11})^T.$$

Погрешность интерполяции для $f(x,y) \in C$ оценивается неравенством $|P(x,y) - f(x,y)| \leq 2\omega(f)$, где $\omega(f) = \max\limits_{(\overline{x},\overline{y}),(\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}})\in\Omega} |f(\overline{x},\overline{y}) - f(\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}})|$.

2) Область интерполирования — круг. Введем полярную систему координат (ρ,φ), где ρ — радиус-вектор, φ — полярный угол. Пусть функция $f(\rho,\varphi)$ определена в заданных узлах.

Интерполяционный многочлен записываем в виде

$$P(\rho,\varphi) = (\xi\Phi^{-1} \otimes \eta R^{-1})f,$$

где $\xi(\varphi) = (\varphi^j)_{j=\overline{0,m}}$, $\eta(\rho) = (\rho^i)_{i=\overline{0,n}}$ — матрицы-строки, $\Phi = (\varphi_j^\beta)_{j,\beta=\overline{0,m}}$, $R = (\rho_i^\alpha)_{i,\alpha=\overline{0,n}}$ — матрицы Вандермонда.

Матрица-столбец f имеет тот же вид, что и выше.

Пример 2. При $n = m = 1$ будем иметь

$$\xi(\varphi) = (1,\varphi), \quad \eta(\rho) = (1,\rho),$$
$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\varphi_1 - \varphi_0}\begin{pmatrix}\varphi_1 & -\varphi_0\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{\rho_1 - \rho_0}\begin{pmatrix}\rho_1 & -\rho_0\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$
$$f = (f_{00}, f_{10}, f_{01}, f_{11})^T.$$

Оценку остаточного члена можно провести, как в примере 1. Если областью интерполирования является прямоугольный параллелепипед, и в заданных узлах известны значения функции $f(x,y,z)$, то, вводя декартову систему координат, будем иметь

$$P(x,y,z) = (\gamma Z^{-1} \otimes \xi Y^{-1} \otimes \eta X^{-1})f.$$

Если областью интерполирования является шар, то, вводя сферическую систему координат (ρ,φ,θ), где ρ — радиус-вектор, φ — долгота, θ — широта, будем иметь

$$P(\rho,\varphi,\theta) = (\gamma\Theta^{-1} \otimes \eta\Phi^{-1} \otimes \xi R^{-1})f.$$

Наконец, если областью интерполирования является цилиндр, то, вводя цилиндрическую систему координат (ρ,φ,z), получаем

$$P(\rho,\varphi,z) = (\gamma Z^{-1} \otimes \eta\Phi^{-1} \otimes \xi R^{-1})f.$$

В заключение отметим следующее: если интерполируемая функция будет периодической функцией по какой-нибудь переменной, то можно применять тригонометрическое интерполирование по этой переменной (см., напр., [2]).

Литература

1. Назипов А.А. *Матричное представление интерполяционного многочлена.* – Казанск. ун-т. – Казань, 1990. – 7 с. – Деп. в ВИНИТИ 12.10.90, № 5361-В90.
2. Назипов А.А. *Матричный метод приближения функций обобщенными многочленами* // Препринт № 96-1. – Изд-во Казанск. фонд “Математика”, 1996. – 65 с.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений.* Т. 1. – М.: Физматгиз, 1959. – 464 с.

Казанский государственный университет

Поступили
первый вариант 21.09.1998
окончательный вариант 13.12.2000