ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 11 (486)

УДК 517.518

В.С. КЛИМОВ

СИММЕТРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА

Устанавливаются обобщающие принцип симметризации Полиа–Сегё ([1], с. 203) оценки нормы финитной функции в анизотропном пространстве Соболева.

1. Ниже $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел, pq и $|p|$ — скалярное произведение векторов p, q и евклидова норма вектора p соответственно, $\mathfrak{B}_n$ — совокупность борелевских подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $X = [0, a]$, $0 < a < \infty$, — отрезок на действительной оси с обычной нормой Лебега mes_1, $S(X, \mathbb{R}^n)$ — линейное метрическое пространство измеримых отображений из X в $\mathbb{R}^n$. Отображения y, z, принадлежащие $S(X, \mathbb{R}^n)$, называются равноизмеримыми, если для любого $\mathbb{B}$ из $\mathfrak{B}_n$ множества $y^{-1}(\mathbb{B}) = \{x \in X, y(x) \in \mathbb{B}\}$, $z^{-1}(\mathbb{B}) = \{x \in X,\ z(x) \in \mathbb{B}\}$ имеют одинаковую меру. Через $L_1 = L_1(X, \mathbb{R}^n)$, $L_\infty = L_\infty(X, \mathbb{R}^n)$ обозначаются банаховы пространства измеримых отображений с обычными нормами.

Банахово пространство $E = E(X, \mathbb{R}^n)$ отображений класса $S(X, \mathbb{R}^n)$ называется симметричным, если 1) из $y \in E$, $z(x) = \alpha(x)y(x)$, α — скалярная измеримая функция, $|\alpha(x)| \le 1$ почти всюду (п. в.) в X вытекает, что $z \in E$ и $\|z; E\| \le \|y; E\|$; 2) из $y \in E$ и равноизмеримости y с z следует включение $z \in E$ и равенство $\|z; E\| = \|y; E\|$; 3) справедливы непрерывные вложения $L_\infty \subset E \subset L_1$. Если $n = 1$, E — нетривиальное симметричное пространство (СП), то условие 3) является следствием условий 1), 2) ([2], с. 124). При $n > 1$ это уже не так [3].

Отображение X в X называют автоморфизмом, если оно взаимно однозначно, и как оно, так и обратное ему отображение переводят всякое измеримое множество в измеримое множество той же меры. Группа автоморфизмов X обозначается символом $\mathfrak{A}(X)$. Совпадающие п. в. объекты на X считаются одинаковыми. Условие 2) из определения СП можно заменить эквивалентным свойством 2а) из $y \in E$, $T \in \mathfrak{A}(X)$, следует, что $y \circ T \in E$ и $\|y \circ T; E\| = \|y; E\|$ [3].

Двойственным к СП E называется пространство принадлежащих $S(X, \mathbb{R}^n)$ отображений y, для которых имеет смысл и конечна норма $\|y; E'\| = \sup\{\langle y, z\rangle,\ \|z; E\| \le 1\}$, где

$$\langle y, z\rangle = \int_X y(x)z(x)dx.$$

Пространство E' также симметрично. Через E'' обозначается двойственное к E' пространство. Если E'' совпадает с E по составу элементов и по норме, то будем называть E максимальным пространством. Пространства Орлича L_f, Лоренца Λ_ψ, Марцинкевича M_ψ максимальны [2], [3].

Пусть $H = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n),\ x_n = 0\}$ — координатная гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$ $(n \ge 2)$, $H^\perp$ — ортогональное дополнение к H, P_H и P^H — операторы ортогонального проектирования пространства $\mathbb{R}^n$ на H и $H^\perp$ соответственно. В дальнейшем точку $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ из $\mathbb{R}^n$ будем записывать в виде $x = (x', x_n)$, где $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, так, что $P_H x = (x', 0)$, $P^H x = (\mathbb{O}, x_n)$, пространства H и $H^\perp$ можно идентифицировать с $\mathbb{R}^{n-1}$ и $\mathbb{R}$ соответственно.

Норму в СП $E = E(X, \mathbb{R}^n)$ будем называть H-монотонной, если из соотношений $y \in E$, $\alpha \in S(X, \mathbb{R})$, $\beta \in S(X, \mathbb{R})$, $|\alpha(x)| \le 1$, $|\beta(x)| \le 1$ п. в. следует, что $z = \alpha P_H y + \beta P^H y \in E$ и $\|z; E\| \le \|y; E\|$. Пространство E с H-монотонной нормой назовем H-симметричным. Класс H-симметричных пространств обозначим H-СП. Принадлежность пространства E классу H-СП будем обозначать $E \in H$-СП. H-монотонная норма может быть определена, например, равенством $\|y;E\| = \max\{\|P_H y;E_1\|,\ \|P^H y;E_2\|\}$, где $E_1 = E_1(X,\mathbb{R}^{n-1})$, $E_2 = E_2(X,\mathbb{R})$ — СП отображений на X со значениями в $\mathbb{R}^{n-1}$ и $\mathbb{R}$ соответственно.

СП E назовем изотропным, если $\|y;E\| = \|\,|y|;E_0\|$, где $E_0 = E_0(X,\mathbb{R})$ — СП скалярных на X функций. Очевидно, что изотропное СП входит в класс H-СП.

Далее используется переход от СП E к пространству E^S класса H-СП. Существенную роль здесь играет симметризация Штейнера. Пусть $l(x)$ — прямая, проходящая через точку x и ортогональная H, $\mathbb{A}$ — такое множество в $\mathbb{R}^n$, что для любого x из $P_H(\mathbb{A})$ пересечение $\mathbb{A}\cap l(x)$ ограничено. Симметризацией Штейнера множества $\mathbb{A}$ относительно гиперплоскости H называется ([4], с. 232) множество

$$S_H(\mathbb{A}) = \bigcup_{x\in P_H(\mathbb{A})} (\mathbb{A}\cap l(x))^S,$$

где $(\mathbb{A}\cap l(x))^S$ — принадлежащий $l(x)$ отрезок с центром в точке x, длина которого равна внешней одномерной лебеговой мере множества $\mathbb{A}\cap l(x)$. Операция S_H сохраняет n-мерную лебегову меру: $\mathrm{mes}_n(S_H(\mathbb{A})) = \mathrm{mes}_n\,\mathbb{A}$.

Ниже $\mathfrak{K}^n$ — совокупность непустых выпуклых и компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{R}^n$ — часть $\mathfrak{K}^n$, состоящая из симметричных относительно $\mathbb{O}\in\mathbb{R}^n$ множеств. Опорная функция множества $\mathbb{A}$ из $\mathfrak{K}^n$ обозначается символом A; напомним, что $A(p) = \max\{pq,\ q\in\mathbb{A}\}$ $(p\in\mathbb{R}^n)$. Расстояние по Хаусдорфу между элементами $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ из $\mathfrak{R}^n$ определяется равенством $d(\mathbb{A},\mathbb{B}) = \max\{|A(p) - B(p)|,\ |p| = 1\}$. Полагаем $\mathbb{A}+\mathbb{B} = \{z\in\mathbb{R}^n,\ z = x+y,\ x\in\mathbb{A},\ y\in\mathbb{B}\}$ — сумма в смысле Минковского множеств $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$; $\lambda\mathbb{A} = \{z\in\mathbb{R}^n,\ z = \lambda x,\ x\in\mathbb{A}\}$ — произведение $\mathbb{A}$ на число $\lambda\geq 0$. Класс $\mathfrak{K}^n$ с определенными выше метрикой d и операциями сложения и умножения на числа $\lambda\geq 0$ образует полулинейное метрическое сепарабельное пространство, $\mathfrak{R}^n$ — его замкнутое полулинейное подпространство. Это позволяет рассматривать последовательность и ряды с элементами из $\mathfrak{K}^n$, измеримые и суммируемые функции со значениями в $\mathfrak{K}^n$ и т. д.

Штейнеровская симметризация оставляет инвариантным каждый из классов $\mathfrak{K}^n$, $\mathfrak{R}^n$. Справедливы соотношения ([4], с. 233)

$$S_H(\mathbb{A}) + S_H(\mathbb{B}) \subset S_H(\mathbb{A}+\mathbb{B}),\quad S_H(\lambda\mathbb{A}) = \lambda S_H(\mathbb{A}). \tag{1}$$

Операция S_H полунепрерывна: если $\mathbb{A}_i\to\mathbb{A}$, $S_H(\mathbb{A}_i)\to\widetilde{\mathbb{A}}$ в метрике d $(i\to\infty)$, то $\widetilde{\mathbb{A}}\subset S_H(\mathbb{A})$ ([4], с. 234).

Отображение Γ множества X в $\mathfrak{K}^n$ можно интерпретировать как многозначное отображение, сопоставляющее $x\in X$ множество $\Gamma(x)$ из $\mathfrak{K}^n$. Многозначное отображение Γ называют [5] измеримым (борелевским), если для любого $\mathbb{B}$ из $\mathfrak{B}_n$ множество $\Gamma^{-1}(\mathbb{B}) = \{x\in X,\ \Gamma(x)\cap\mathbb{B}\neq\emptyset\}$ измеримое (борелевское). Ниже используется терминология работ [5], [6].

Предложение 1 ([5], [6]). *Пусть Γ — отображение из X в $\mathfrak{K}^n$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) Γ — *измеримое (борелевское) многозначное отображение*;
2) *существует счетное семейство измеримых (борелевских) сечений отображения Γ, аппроксимирующих это отображение*;
3) *функция $\Gamma(\cdot,p) : X\to\mathbb{R}$ измерима (борелевская) при любом $p\in\mathbb{R}^n$.*

Пусть $S(X,\mathfrak{K}^n)$ — совокупность измеримых отображений из X в $\mathfrak{K}^n$. Для элементов $S(X,\mathfrak{K}^n)$ введем операции сложения и умножения на число $\lambda\geq 0$, полагая $(Y+Z)(x) = Y(x)+Z(x)$, $(\lambda Y)(x) = \lambda Y(x)$. Введенные операции не выводят из класса $S(X,\mathfrak{K}^n)$, так что $S(X,\mathfrak{K}^n)$ образует полулинейное пространство. Через $S(X,\mathfrak{R}^n)$ обозначается часть $S(X,\mathfrak{K}^n)$, состоящая из отображений X в $\mathfrak{R}^n$. Если $\Gamma\in S(X,\mathfrak{R}^n)$ и $\Gamma^S(x) = S_H\Gamma(x)$ $(x\in X)$, то отображение Γ^S, называемое симметризацией Штейнера отображения Γ, также принадлежит $S(X,\mathfrak{K}^n)$ — это вытекает из отмечавшейся полунепрерывности операции S_H.

Каждому СП $E = E(X,\mathbb{R}^n)$ поставим в соответствие полулинейное пространство $E(X,\mathfrak{R}^n)$. Будем говорить, что Y из $S(X,\mathfrak{R}^n)$ принадлежит $E(X,\mathfrak{R}^n)$, если любое измеримое сечение $y(x)$

отображения $Y(x)$ принадлежит $E(X,\mathbb{R}^n)$ и $\|Y;E\| = \sup\{\|y;E\|,\ y(x) \in Y(x)\} < \infty$. Число $\|Y;E\|$ будем называть нормой многозначного отображения Y в $E(X,\mathfrak{R}^n)$. Свойства этой нормы изучены в [3], [7].

Отметим вытекающее из (1) включение

$$\int_X S_H(\Gamma(x))dx \subset S_H\left(\int_X \Gamma(x)dx\right). \tag{2}$$

Здесь $\Gamma \in L_1(X,\mathfrak{R}^n)$, интегралы от многозначных отображений Γ, $S_H \circ \Gamma$ определяются стандартным образом ([6], с. 349).

Пусть $E = E(X,\mathbb{R}^n)$ — СП, $E(X,\mathfrak{R}^n)$ — соответствующее ему пространство отображений из X в $\mathfrak{R}^n$. Обозначим через $E^S = E^S(X,\mathbb{R}^n)$ пространство, называемое H-симметризацией E и состоящее из отображений y класса $S(X,\mathbb{R}^n)$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|y;E^S\| = \inf\{\|\Gamma;E\|,\ y(x) \in \Gamma^S(x) \text{ п. в.}\}. \tag{3}$$

Из общей теории Ф-преобразований идеальных пространств вектор-функций, развитой в ([7], гл. 2), вытекает

Предложение 2. *Равенство* (3) *определяет в $E^S = E^S(X,\mathbb{R}^n)$ норму, относительно которой E^S есть СП.*

Более специальный характер носит

Лемма 1. *Для произвольного СП E его H-симметризация E^S принадлежит классу H-СП; если же $E \in H$-СП, то $E^S = E$ как по составу элементов, так и по норме.*

Доказательство. Симметрия множества $\Gamma^S(x)$ относительно $\mathbb{O}$ и H влечет H-монотонность нормы $\|\cdot;E^S\|$. Если же $E \in H$-СП, то в равенстве (3) inf можно вычислять по тем многозначным отображениям Γ, для которых $\Gamma^S(x) = \Gamma(x)$ п. в. Отсюда легко выводится совпадение E^S и E. $\square$

Укажем способ построения E^S в некоторых случаях. Пусть $L_f = L_f(X,\mathbb{R}^n)$ — пространство Орлича (с нормой Люксембурга), порожденное функцией Юнга $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ [3]. Тогда $(L_f)^S = L_{f^S}$ и $\|\cdot;(L_f)^S\| = \|\cdot;L_{f^S}\|$, где $f^S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — симметризация функции f относительно H в возрастающем порядке [8]. Для шаровой симметризации аналогичный факт установлен в [3]; в случае симметризации Штейнера доказательство проводится по той же схеме.

Изотропное СП E принадлежит классу H-СП, поэтому $E^S = E$. Это замечание применимо, в частности, к пространствам Лоренца и Марцинкевича со стандартными нормами. Отметим, что если $E \in H$-СП, то и $E' \in H$-СП.

Предшествующие результаты допускают обобщение на случай, когда X — пространство Лебега. Пространство (X,Σ,μ) с конечной положительной непрерывной мерой μ называется ([2], с. 66) пространством Лебега, если существует сохраняющая меру биекция X на $[0,a]$. Пусть X_1, X_2 — два пространства Лебега. Биекция $X_1 \to X_2$ называется изоморфизмом, если она и обратная ей биекция переводят всякое измеримое множество в измеримое множество той же меры. Так же, как и выше, можно определить пространства $S(X,\mathbb{R}^n)$, $S(X,\mathfrak{R}^n)$, борелевские отображения, СП отображений из X в $\mathbb{R}^n$ и порождаемые ими пространства отображений X в $\mathfrak{R}^n$. Каждое СП $E(X,\mathbb{R}^n)$ изоморфно СП $E([0,a],\mathbb{R}^n)$. Это позволяет перенести полученные выше результаты на СП $E(X,\mathbb{R}^n)$, где X — пространство Лебега.

2. Пусть $X = \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x| < r\}$ — открытый шар в $\mathbb{R}^n$, рассматриваемый как пространство Лебега с мерой mes_n $(0 < a = \mathrm{mes}_n X < \infty)$, u — неотрицательная функция из $L_1(\mathbb{R}^n)$, обращающаяся в нуль вне некоторого принадлежащего X компакта. Подграфик u (ординатное множество): $\mathrm{ord}\,u = \{(x,t),\ x \in \mathbb{R}^n,\ 0 \le t \le u(x)\}$ есть подмножество $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, пересечение которого с каждой прямой, проходящей через точку (x',t), $x' \in H$, $t > 0$ и перпендикулярной $H \times \mathbb{R}$, есть ограниченное множество. Поэтому определена симметризация $\mathrm{ord}\,u \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ относительно гиперплоскости $H \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Результат этой симметризации совпадает с подграфиком некоторой неотрицательной финитной суммируемой на $\mathbb{R}^n$ функции u^c, называемой симметризацией функции u относительно H в убывающем порядке. При почти всех $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ функция $u^c(x', \cdot)$ совпадает с перестановкой функции $u(x', \cdot)$ в симметрично убывающем порядке ([9], с. 309).

Обозначим через $W_+(X)$ совокупность неотрицательных функций класса $W_1^1(\mathbb{R}^n)$ ([9], гл. 4), равных нулю вне принадлежащего X компакта. Считаем, что норма в $W_1^1(\mathbb{R}^n)$ определена равенством $\|u\| = \|u; L_1\| + \|\nabla u; L_1\|$. Здесь и далее ∇u — градиент функции u.

Непрерывную неотрицательную функцию $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ назовем полиэдральной, если найдется такой конечный набор n-мерных симплексов Δ_j, $j \in J$, что $\cup \Delta_j \subset X$ и 1) $v(x) = 0$ $\forall x \notin \cup \Delta_j$; 2) сужение v на Δ_j есть аффинная функция, т. е. $v(x) = c_1^j x_1 + \dots + c_n^j x_n + d_j$, $x \in \Delta_j$, $j \in J$. Если в условии 2) $c_n^j \neq 0$ для всех $j \in J$, то функцию v назовем простой. Совокупность простых функций обозначим символом $\Pi_n(X)$.

Симметризация u^c функции u из $\Pi_n(X)$ $(W_+(X))$ есть функция того же класса [8]. Более узкий класс $\Pi_n(X)$ в определенном смысле плотен в более широком классе $W_+(X)$. Именно, справедлива

Лемма 2. *Пусть $F = F(X, \mathbb{R}^n)$ — максимальное СП, $u \in W_+(X)$, $\nabla u \in F$. Тогда существует такая последовательность v_i, $i = 1, 2, \dots$, из $\Pi_n(X)$, что $v_i \to u$ в $W_1^1(\mathbb{R}^n)$, $\|\nabla v_i; F\| \to \|\nabla u; F\|$, $\nabla v_i^c \to \nabla u^c$ в $\sigma(L_1, L_\infty)$ при $i \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1(x) \geq 0$ и $\|\varphi_1; L_1(\mathbb{R}^n)\| = 1$, $\varphi_\delta(x) = \delta^{-n} \varphi_1(\frac{x}{\delta})$, $\delta > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Функция $u_\delta = u * \varphi_\delta$, определенная равенством

$$u_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y) \varphi_\delta(y) dy,$$

принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, неотрицательна и $\nabla u_\delta = \nabla u * \varphi_\delta$. Как известно, $u_\delta \to u$ в $W_1^1(\mathbb{R}^n)$ при $\delta \to 0$, $\|\nabla u_\delta; F\| \leq \|\nabla u; F\|$ и $\operatorname{supp} u_\delta \subset X$ при малых $\delta > 0$. Фиксируем последовательность $\delta_i > 0$ такую, что $\delta_i \to 0$ и $\|u_{\delta_i} - u; W_1^1(\mathbb{R}^n)\| < \frac{1}{i}$; $\operatorname{supp} u_{\delta_i} \subset X$, $i = 1, 2, \dots$ Для каждого $\varepsilon > 0$ можно подобрать такую простую функцию v, что $\|\nabla u_{\delta_i} - \nabla v; L_\infty\| < \varepsilon$. В частности, найдется такая функция v_i из $\Pi_n(X)$, что $\frac{1}{i} \geq \|\nabla u_{\delta_i} - \nabla v_i; F\|$. Следовательно, $\varlimsup\limits_{i\to\infty} \|\nabla v_i; F\| \leq \|\nabla u; F\|$. С другой стороны, $v_i \to u$ в $W_1^1(\mathbb{R}^n)$, в частности, $\nabla v_i \to \nabla u$ по мере. Поскольку F — максимальное СП, то [7], [10] $\varliminf\limits_{i\to\infty} \|\nabla v_i; F\| \geq \|\nabla u; F\|$ при $i \to \infty$. Сходимость $\nabla v_i^c \to \nabla u^c$ в $\sigma(L_1, L_\infty)$ вытекает из результатов [8]. $\square$

Наряду с леммой 2 в следующем пункте будет использоваться некоторое интегральное неравенство. Рассмотрим функцию $k(x', t, p)$, $x' \in X' = P_H X$, $t \in \mathbb{R}_+$, $p \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую следующим условиям: k_1) при любых (x', t) из $X' \times \mathbb{R}_+$ функция $k(x', t, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ есть опорная функция множества $K(x', t)$ класса $\mathfrak{R}^n$; k_2) определяемое таким образом многозначное отображение $\mathbb{K} : X' \times \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{R}^n$ борелевское; k_3) $k(x', t, p,) \leq L|p|$, постоянная $L > 0$ не зависит от (x', t, p). Опорную функцию множества $S_H \mathbb{K}(x', t)$ обозначим символом $k^S(x', t, \cdot)$; она также удовлетворяет условиям k_1)–k_3) (с заменой $\mathbb{K}(x', t)$ на $S_H \mathbb{K}(x', t)$).

Лемма 3. *Пусть функция $k : X' \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям k_1)–k_3). Пусть v^c — симметризация функции v из $\Pi_n(X)$. Тогда*

$$\int_X k[x', v(x), \nabla v(x)] dx \geq \int_X k^S[x', v^c(x), \nabla v^c(x)] dx. \tag{4}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 из [8], поэтому ограничимся указанием его схемы. Пусть $v \in \Pi_n(X)$, $M_v = \max\{v(x),\, x \in \mathbb{R}^n\}$, а Δ_j, $j \in J$, — симплексы, фигурирующие в определении простой функции v. Множество точек недифференцируемости функции v составляет часть множества $D_v = \cup \partial \Delta_j$, $j \in J$, градиент ∇v постоянен на внутренности симплекса Δ_j. Верхнее лебегово множество $\lambda^t(v) = \{x \in \mathbb{R}^n,\, v(x) > t\}$, $0 < t < M_v$, функции v есть внутренность некоторого полиэдра, его граница $\gamma^t(v) = \{x \in \mathbb{R}^n,\, v(x) = t\}$ представима в виде объединения многогранников $\{x \in \Delta_j,\ v(x) = t\}$ размерности $\leq n-1$. Обозначим через T_v совокупность тех t из $(0, M_v)$, для которых множество $\gamma^t(v) \cap D_v$ содержится в объединении конечного числа многогранников размерности $\leq n-2$. Множество T_v получается из отрезка $[0, M_v]$ удалением конечного числа элементов [8]. Если $\lambda^t(v^c)$, $\gamma^t(v^c)$ — верхние лебеговы множества и поверхности уровня функции v^c соответственно, то $\lambda^t(v^c) = S_H\lambda^t(v)$, $\gamma^t(v^c) = \partial\lambda^t(v^c)$.

Обозначим через I_1, I_2 интегралы в левой и правой частях неравенства (4). Из формулы Кронрода–Федерера ([11], с. 269) следуют равенства

$$I_1 = \int_{T_v} J_1(t)dt, \quad I_2 = \int_{T_v} J_2(t)dt,$$

где

$$J_1(t) = \int_{\gamma^t(v)} k\Big(x', t, \frac{\nabla v(x)}{|\nabla v(x)|}\Big) d\sigma, \quad J_2(t) = \int_{\gamma^t(v^c)} k^S\Big(x', t, \frac{\nabla v^c(x)}{|\nabla v^c(x)|}\Big) d\sigma. \tag{5}$$

Фигурирующие в (5) поверхностные интегралы первого рода стандартным образом преобразуются в интегралы по множеству $P_H\gamma^t(v) = P_H\gamma^t(v^c)$. В итоге приходим к равенствам

$$J_1(t) = \int_{P_H\gamma^t(v)} \Psi_1(x', t)dx', \quad J_2(t) = \int_{P_H\gamma^t(v)} \Psi_2(x', t)dx'.$$

Подсчеты, основанные на выведенных в [8] формулах для $\nabla v(x)$, $\nabla v^c(x)$, влекут неравенство $\Psi_1(x', t) \geq \Psi_2(x', t)$ п. в. в $P_H\gamma^t(v)$ (аналогичные оценки устанавливались в [8] для функции k, не зависящей от x', t; данное предположение, как видно из доказательства, несущественно). Последовательно получаем $J_1(t) \geq J_2(t)$, $t \in T_v$, $I_1 \geq I_2$. $\square$

3. Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть $F'(X, \mathbb{R}^n)$ — двойственное к симметрическому пространству $F(X, \mathbb{R}^n)$-пространство, $F'^s(X, \mathbb{R}^n)$ — его H-симметризация, $F'^{s\prime}(X < \mathbb{R}^n)$ — двойственное к $F'^s(X, \mathbb{R}^n)$ симметрическое пространство. Пусть $u \in W_+(X)$, $\nabla u \in F(X, \mathbb{R}^n)$, u^c — симметризация u относительно H. Тогда*

$$\|\nabla u; F\| \geq \|\nabla u^c; F'^{s\prime}\|. \tag{6}$$

Доказательство разобьем на три этапа. Вначале сведем (6) к более простому варианту. Пусть ρ_H — отражение $\mathbb{R}^n$ относительно H. Из определения u^c вытекает равенство $(\nabla u^c) \circ \rho_H = \rho_H \circ \nabla u^c$. Если $g \in F'^s$, то отображение $\overline{g}(x) = \frac{1}{2}(g(x) + \rho_H g(\rho_H x))$ также принадлежит F'^s; при этом $\|\overline{g}; F'^s\| \leq \|g; F'^s\|$, $\langle \overline{g}, \nabla u^c\rangle = \langle g, u^c\rangle$, $\overline{g} \circ \rho_H = \rho_H \circ \overline{g}$.

Используем это замечание для специального представления правой части (6). Обозначим через G семейство конечнозначных борелевских отображений $g : X \to \mathbb{R}^n$, обладающих свойствами 1) $g \circ \rho_H = \rho_H \circ g$; 2) $\|g; F'^s\| < 1$; 3) $g(x) = \mathbb{O}$, если $\nabla u^c(x) = \mathbb{O}$. Следствием приведенного выше замечания является равенство

$$\|\nabla u^c; F'^{s\prime}\| = \sup\{\langle g, \nabla u^c\rangle,\ g \in G\}. \tag{7}$$

В силу (7) для доказательства (6) достаточно установить неравенство

$$\|\nabla u; F\| \geq \langle g, \nabla u^c\rangle \quad (g \in G). \tag{8}$$

На втором этапе докажем (8) для ненулевой функции u из $\Pi_n(X)$. Так как $g \in G$, то g принимает постоянные значения на борелевских множествах $X_1, \ldots, X_{l-1}, X_l$, образующих разбиение X, т. е. $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $\cup X_i = X$ и $\mathrm{mes}_n X_i > 0$. Считаем, что $X_l = \{x \in X,\ u(x) = 0\}$ и $g(x) = \mathbb{O}$, $x \in X_l$. Поскольку $\|g; F'^s\| < 1$, то найдется отображение Γ класса $F'(X, \mathfrak{R}^n)$ такое, что $\|\Gamma; F'\| \le 1$, $g(x) \in \Gamma^s(x)$ п. в. в X, $\Gamma(x) = \mathbb{O}$, $x \in X_l$. Пусть $\mathbb{Z}$ — усреднение по Хаару отображения Γ, соответствующее разбиению $X_1, \dots, X_l$ пространства X. Таким образом,

$$\mathbb{Z}(x) = \frac{1}{\operatorname{mes}_n X_i} \int_{X_i} \Gamma(x) dx, \quad x \in X_i, \quad i = 1, \dots, l, \tag{9}$$

в частности, $\mathbb{Z}(x) = \mathbb{O}$, $x \in X_l$. Как показано в [3], $\mathbb{Z} \in F'(X, \mathfrak{R}^n)$ и $\|\mathbb{Z}; F'\| \le \|\Gamma; F'\|$. Из соотношений (2), (9) следует, что g есть сечение многозначного отображения $\mathbb{Z}^s$. Так как $g \circ \rho_H = \rho_H \circ g$, то можно считать, что $\mathbb{Z}(\rho_H x) = \mathbb{Z}(x)$. Суммируя, приходим к следующему: $\mathbb{Z}$ — конечнозначное борелевское многозначное отображение, $\|\mathbb{Z}; F'\| \le 1$, $\mathbb{Z}(\rho_H x) = \mathbb{Z}(x)$, $\mathbb{Z}(x) = \mathbb{O}(x \in X_l)$, $g(x) \in \mathbb{Z}^s(x)$ п. в.

Определим на $X' \times \mathbb{R}_+$ функцию φ и отображение $\mathbb{K}$ равенствами

$$\varphi(x', t) = \frac{1}{2} \operatorname{mes}_1 \{x_n : (x', x_n) > t\}, \quad \mathbb{K}(x', t) = \mathbb{Z}(x', \varphi(x', t)).$$

Из определения функции u^c следует, что $\varphi(x', t) = \frac{1}{2} \operatorname{mes}_1 \{x_n : u^c(x', x_n) > t\}$; $\varphi(x', u^c(x', x_n)) = |x_n|$, если $u^c(x', x_n) > 0$. Функция $\varphi(x', t)$ борелевская, поэтому $\mathbb{K} : X' \times \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{R}^n$ — борелевское отображение. Равноизмеримость функций $u(x', \cdot)$, $u^c(x', \cdot)$ влечет равноизмеримость отображений $w(x) = (x', \varphi(x', u(x))$, $w_0(x) = (x', \varphi(x', u^c(x)))$, $x \in X$, а также их сужений на множество $X_+ = \{x : u(x) > 0\}$ и $X_+^c = \{x \in X,\ u^c(x) > 0\}$ соответственно. Положим $Y(x) = \mathbb{K}(x', u(x)) = \mathbb{Z}(w(x))$. Так как $\mathbb{Z}(\rho_H x) = \mathbb{Z}(x)$, то $\mathbb{Z}(x) = \mathbb{Z}(w_0(x))$, $x \in X_+^c$. Докажем равенство $\|Y; F'(X_+, \mathfrak{R}^n)\| = \|\mathbb{Z}; F'(X_+^c; \mathfrak{R}^n)\|$. Действительно, пусть $\mathbb{B}_i = \mathbb{Z}(x)$, $x \in X_i$, $i = 1, \dots, l-1$, $y(x)$ — измеримое сечение отображения $Y(x)$, $x \in X_+$. В силу равноизмеримости отображений w, w_0 множества $w^{-1}(\mathbb{B}_i) = \{x \in X_+,\ w(x) \in \mathbb{B}_i\}$, $w_0^{-1}(\mathbb{B}_i) = \{x \in X_+,\ w_0(x) \in \mathbb{B}_i\}$ имеют одинаковую меру. Поэтому существует изоморфизм $T : X_+^c \to X_+$ такой, что $T(w_0^{-1}(\mathbb{B}_i)) = w^{-1}(\mathbb{B}_i)$, $i = 1, \dots, l-1$. Отображение $y(Tx)$, $x \in X_+^c$, есть измеримое сечение $\mathbb{Z}(x)$, и $\|y; F'(X_+, \mathbb{R}^n)\| = \|y \circ T; F'(X_+^c, \mathbb{R}^n)\|$. Из проведенных рассуждений вытекает равенство $\|Y; F'(X_+, \mathfrak{R}^n)\| = \|\mathbb{Z}; F'(X_+^c, \mathfrak{R}^n)\|$, в частности, $\|Y; F'(X_+, \mathfrak{R}^n)\| \le 1$. Эта оценка в свою очередь влечет [3] соотношения

$$\|\nabla u; F\| \ge \int_{X_+} Y(x, \nabla u(x)) dx = \int_X Y(x, \nabla u(x)) dx; \tag{10}$$

здесь используется равенство $\nabla u(x) = 0$ п. в. на X_l.

Пусть $k(x', t, \cdot)$, $Y(x, \cdot)$, $Z^s(x, \cdot)$ — опорные функции множеств $\mathbb{K}(x', t)$, $x' \in X'$, $t \in \mathbb{R}_+$, $Y(x)$, $\mathbb{Z}^s(x)$ соответственно. Функция $k : X' \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям k_1)–k_3). Справедливы равенства $k(x', u(x), \nabla u(x)) = Y(x, \nabla u(x))$, $k^s(x', u^c(x), \nabla u^c(x)) = Z^s(x, \nabla u^c(x))$. Используя неравенство (10), лемму 3 и включение $g(x) \in \mathbb{Z}^s(x)$, получаем последовательно

$$\|\nabla u; F\| \ge \int_X Y(x, \nabla u(x)) dx = \int_X k(x', u(x), \nabla u(x)) dx \ge$$
$$\ge \int_X k^s(x', u^c(x), \nabla u^c(x)) dx = \int_X Z^s(x, \nabla u^c(x)) dx \ge \langle g, \nabla u^c \rangle.$$

Тем самым, оценка (8) для простой функции u установлена.

Третий этап доказательства: u — произвольная функция из $W_+(X)$, $\nabla u \in F(X, \mathbb{R}^n)$, F — максимальное СП. Согласно лемме 2 найдется последовательность v_i, $i = 1, 2, \dots$, из $\Pi_n(X)$, для которой $\|\nabla v_i; F\| \to \|\nabla u; F\|$, $\nabla v_i^c \to \nabla u^c$ в $\sigma(L_1, L_\infty)$ при $i \to \infty$. В силу уже доказанного верно неравенство $\|\nabla v_i; F\| \ge \langle g, \nabla v_i^c \rangle$. Переходя к пределу при $i \to \infty$, получаем неравенство (8), а вместе с ним и неравенство (6).

Избавимся, наконец, от предположения максимальности СП F. Всегда $F \subset F''$ и $\|\cdot; F\| \ge \|\cdot; F''\|$, F'' — максимальное СП и $F''' = (F'')' = F'$ по составу элементов и по норме [7], [10]. Следовательно, $\|\nabla u; F\| \ge \|\nabla u; F''\| \ge \|\nabla u^c; F'''^{s\prime}\| = \|\nabla u^c; F'^{s\prime}\|$. $\square$

В случае $F \in H$-СП переход от СП F к H-СП $F'^{s'}$ достаточно прост. В этой ситуации $F' \in H$-СП, $F'^{s} = F'$, $F'^{s'} = F''$. В частности, справедлива

Теорема 2. *Пусть F — максимальное H-симметричное пространство, функция u удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда*

$$\|\nabla u; F\| \geq \|\nabla u^c; F\|,$$

иначе говоря, симметризация функции u не увеличивает нормы $\|\nabla u; F\|$.

Доказательство очевидно, поскольку в рассматриваемом случае пространства F и $F'^{s'}$ совпадают как по составу элементов, так и по норме.

Теорема 2 нова и для изотропного СП F; в качестве F можно взять, например, пространства Лоренца и Марцинкевича со стандартными нормами ([2], с. 145–169; [3], [10]). Пространство Орлича $L_f(X, \mathbb{R}^n)$, порождаемое функцией Юнга $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ [3], входит в класс H-СП, если $f(\rho_H p) = f(p)\ \forall p \in \mathbb{R}^n$. Для пространства Орлича аналоги теорем 1, 2 имеются в [8].

По известным схемам (см., напр., [1], [8], [12]) результаты статьи могут быть применены к оценкам норм операторов вложения, емкостных и других характеристик компактов. Теоремы 1, 2 очевидным образом переносятся на симметризации относительно произвольной однородной гиперплоскости $H \subset \mathbb{R}^n$. Аналоги этих теорем могут быть получены для k-мерной симметризации по Штейнеру [12] и шаровой симметризации [1], [3].

Литература

1. Полиа Г., Сегё Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике.* – М.: Физматгиз, 1962. – 336 с.
2. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.
3. Климов В.С. *Теоремы вложения и геометрические неравенства* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1976. – Т. 40. – № 3. – С. 645–671.
4. Хадвигер Г. *Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии.* – М.: Ин. лит., 1966. – 416 с.
5. Аркин В.И., Левин В.Л. *Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи* // УМН. – 1972. – Т. 27. – № 3. – С. 21–77.
6. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. *Теория экстремальных задач.* – М.: Наука, 1974. – 479 с.
7. Нгуен Хонг Тхай. *Идеальные пространства вектор-функций: геометрия, интерполяция и применения к нелинейным операторам и уравнениям*: Дис. … докт. физ.-матем. наук. – Минск, 1992. – 341 с.
8. Климов В.С. *О симметризации анизотропных интегральных функционалов* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 8. – С. 26–32.
9. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул.* – М.: Наука, 1974. – 808 с.
10. Забрейко П.П., Нгуен Хонг Тхай. *Теория двойственности идеальных пространств вектор-функций* // ДАН СССР. – 1990. – Т. 311. – № 6. – С. 1296–1299.
11. Федерер Г. *Геометрическая теория меры.* – М.: Наука, 1987. – 760 с.
12. Dubinin V.N. *Capacities and geometric transformations of subsets in n-space* // Geom. and Func. Anal. – 1993. – V. 3. – № 4. – P. 342–369.

Ярославский государственный университет

Поступила 13.12.2001