ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 1 (476)

УДК 517.9

С.М. ВОРОНИН, Ю.И. МЕЩЕРЯКОВА

АНАЛИТИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ТИПИЧНЫХ ВЫРОЖДЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК РОСТКОВ ГОЛОМОРФНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Введение

Пусть $\mathcal{V}$ — класс ростков голоморфных векторных полей в $(\mathbb{C}^2, 0)$ с вырожденной элементарной особой точкой 0 (т. е. таких, что линейная часть ростка в нуле вырождена, но не все ее собственные значения равны нулю).

Ростки v и $\widetilde{v}$ из $\mathcal{V}$ называют *аналитически* (*формально*) *эквивалентными*, если существует локальная голоморфная (формальная) замена координат H в $(\mathbb{C}^2, 0)$, переводящая один росток в другой, $H' \cdot v = \widetilde{v} \circ H$.

Ростки v и $\widetilde{v}$ из $\mathcal{V}$ называются *орбитально аналитически* (*формально*) *эквивалентными*, если существует локальная голоморфная замена координат, переводящая фазовый портрет одного ростка в фазовый портрет другого (если существует формальная замена координат H и формальный степенной ряд k с ненулевым свободным членом такие, что $H' \cdot v = k \cdot \widetilde{v} \circ H$).

Орбитальные аналитическая и формальная классификации ростков из $\mathcal{V}$ хорошо известны ([1]; [2], § 3, сс. 29, 33). В данной работе будет получена аналитическая классификация типичных ростков из $\mathcal{V}$. Показано, что эта классификация имеет два функциональных модуля и четыре числовых, что в два раза превышает количество модулей орбитальной аналитической классификации. Доказана также теорема о секториальной нормализации.

1. Формальная классификация

Известно ([1]; [2], § 3, с. 29; [4]), что типичный росток из $\mathcal{V}$ формально орбитально эквивалентен одному из ростков

$$v_\lambda = x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2}{1+\lambda y}\frac{\partial}{\partial y}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Пусть $\mathcal{V}_\lambda$ — класс ростков, формально орбитально эквивалентных v_λ.

Теорема 1 (о формальной классификации [6]). *Каждый росток из $\mathcal{V}_\lambda$ формально эквивалентен одному из ростков*

$$v_{\lambda,a,b} = v_\lambda(a + by), \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq 0;$$

ростки $v_{\lambda,a,b}$ с различными индексами попарно формально не эквивалентны.

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 98-01-00821) и Министерством образования (грант № 97-0-1.8-57).

Таким образом, формальная классификация типичных ростков из $\mathcal{V}$ имеет три числовых модуля, в то время как орбитальная формальная — один.

Пусть $\mathcal{V}_{\lambda,a,b}$ — класс ростков из $\mathcal{V}_\lambda$, формально эквивалентных ростку $v_{\lambda,a,b}$. Формальную замену координат $\widehat{H}$, сопрягающую росток $v \in \mathcal{V}_{\lambda,a,b}$ с его формальной нормальной формой $v_{\lambda,a,b}$ (т. е. такую, что $\widehat{H}' \cdot v = v_{\lambda,a,b} \circ \widehat{H}$), будем называть *формальной нормализующей заменой координат* для v.

Из теоремы 1 следует, что каждый росток из $\mathcal{V}_{\lambda,a,b}$ аналитически эквивалентен некоторому ростку вида $v = v_{\lambda,a,b} + o(|x|^3 + |y|^3)$. Обозначим через $\mathcal{V}'_{\lambda,a,b}$ класс ростков из $\mathcal{V}_{\lambda,a,b}$ такого вида.

Определение 1. Формальный степенной ряд $\widehat{H} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x)y^k$ с коэффициентами $c_k : U \to \mathbb{C}^2$, голоморфными в некоторой окрестности нуля $U \subset \mathbb{C}$ (одной и той же для всех k), будем называть *полуформальным* отображением.

Теорему 1 можно существенно усилить.

Теорема 2. *Формальная нормализующая замена любого ростка $v \in \mathcal{V}'_{\lambda,a,b}$ является полуформальным отображением.*

2. Секториальная нормализация

Пусть $\beta \in (\pi/2, \pi)$, $a \in \mathbb{C}_*$, $\alpha = \arg a$.
$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : |x| < \varepsilon,\ |y| < \varepsilon,\ |\arg y - \alpha - \frac{\pi}{2}| < \beta\}$;
$\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : |x| < \varepsilon,\ |y| < \varepsilon,\ |\arg y - \alpha - \frac{3\pi}{2}| < \beta\}$.
Пару областей (Ω_1, Ω_2) будем называть *хорошим покрытием* области $\{|x| < \varepsilon,\ 0 < |y| < \varepsilon\}$; параметры α, β и ε будем называть соответственно *направлением, раствором* и *радиусом* хорошего покрытия.

Определение 2. Пусть $\Omega = U \times S$ — секториальная область, причем U — окрестность нуля в $\mathbb{C}$, $S \subset \mathbb{C}$ — сектор с вершиной в нуле. Полуформальное отображение $\widehat{H} = \sum h_k(x)y^k$ с голоморфными в U коэффициентами будем называть *асимптотическим* для голоморфного отображения $H : \Omega \to \mathbb{C}^2$ на Ω, если для любой частной суммы $H_n = \sum\limits_{k=0}^{n} h_k(x)y^k$

$$|H(x,y) - H_n(x,y)| = o(y^n) \quad \text{при} \quad (x,y) \in \Omega, \quad y \to 0.$$

Теорема 3 (о секториальной нормализации). *Для любого ростка $v \in \mathcal{V}_{\lambda,a,b}$ и любого хорошего покрытия (Ω_1, Ω_2) с направлением a с заданным раствором и достаточно малым радиусом существует пара биголоморфных отображений $H_j : \Omega_j \to \mathbb{C}^2$, $j = 1, 2$, таких, что*:

— *H_j сопрягает на Ω_j росток v с его формальной нормальной формой $v_{\lambda,a,b}$*;
— *некоторая формальная нормализующая замена $\widehat{H}$ ростка v является асимптотической для H_j на Ω_j, $j = 1, 2$.*

3. Аналитическая классификация ростков класса $\mathcal{V}_{\lambda,a,b}$

Пусть $\mathcal{M}_\lambda$ — пространство всех троек (c, ϕ, ψ) таких, что $c \in \mathbb{C}$; ϕ и ψ голоморфны в $(\mathbb{C}, 0)$; $\phi(0) = \psi(0) = 0$, $\phi'(0) = \exp(2\pi i\lambda)$. Две тройки (c, ϕ, ψ) и $(\widetilde{c}, \widetilde{\phi}, \widetilde{\psi})$ из $\mathcal{M}_\lambda$ будем называть *эквивалентными*, если для некоторого $C \in \mathbb{C}_*$

$$\widetilde{c} = C \cdot c, \quad \widetilde{\phi}(z) \equiv C\phi(C^{-1}z), \quad \widetilde{\psi}(z) = \psi(C^{-1}z).$$

Пусть M_λ — пространство классов эквивалентности из $\mathcal{M}_\lambda$.

Теорема 4 (об аналитической классификации ростков из $\mathcal{V}'_{\lambda,a,b}$). *Существует такое отображение*

$$m : \mathcal{V}'_{\lambda,a,b} \to M_\lambda, \quad m : v \mapsto m_v,$$

что справедливы следующие утверждения:

1°. *эквивалентность и эквимодальность*: $v \sim \widetilde{v} \Leftrightarrow m_v = m_{\widetilde{v}}$;
2°. *реализация*: *для любого* $m \in M_\lambda$ *существует такое* $v \in \mathcal{V}'_{\lambda,a,b}$, *что* $m = m_v$;
3°. *аналитическая зависимость*: *для любого аналитического семейства* v_ε *ростков из* $\mathcal{V}'_{\lambda,a,b}$ *некоторые представители* μ_ε *модулей* m_{v_ε} *также образуют аналитическое семейство.*

Эта теорема является точным аналогом известной теоремы об орбитальной аналитической классификации ростков из $\mathcal{V}_\lambda$ ([1]; [2], § 3, с. 33). Отметим, что количество модулей в задаче об аналитической классификации увеличилось вдвое по сравнению с задачей об орбитальной аналитической классификации, что находится в хорошем соответствии с результатами работы [3]: орбитальная аналитическая классификация имеет два числовых и один функциональный; аналитическая классификация — четыре числовых и два функциональных модуля.

4. Преобразование монодромии и t-монодромия

Пусть $v \in \mathcal{V}'_{\lambda,a,b}$; тогда вектор $\vec{e} = (1, 0)$ является собственным вектором линейной части ростка v в нуле с собственным значением $a \neq 0$. Пусть S_v — сепаратриса ростка v, соответствующая собственному вектору e, Γ_v — трансверсаль к S_v в точке $P_0 = S_v \bigcap \Gamma_v$. Пусть z — локальный параметр на Γ_v, $z(P_0) = 0$, тогда можно отождествить (Γ_v, P_0) с $(\mathbb{C}, 0)$.

Заметим, что интегральные кривые ограничения $v|_{S_v}$ ростка v на сепаратрису S_v имеют один и тот же период $T = 2\pi i/a$. Значит, любая интегральная кривая $f(t)$ поля v с начальными условиями $f(t_0) = P \in \Gamma_v$, достаточно близкими к P_0, также пересекает трансверсаль Γ_v в некоторый момент времени t_1, близкий к

$$t_0 + T : f(t_1) = P_1, \quad |t_1 - t_0 - T| < 0,1|T|.$$

Отображение $\delta_v : (\mathbb{C}, 0) \times \mathbb{C} \to (\mathbb{C}, 0) \times \mathbb{C}$, определенное равенством $\delta_v(z(P), t_0) = (z(P_1), t_1)$, будем называть *отображением t-монодромии* ростка v, соответствующим трансверсали Γ_v и имеющим специальный вид

$$\delta_v : (z, t) \mapsto (\Delta_v(z), t + A_v(z)),$$

где Δ_v и A_v голоморфны в $(\mathbb{C}, 0)$ (отображения такого вида, в соответствии с [3], [5], являются *t-сдвигами*). Отметим, что первая компонента Δ_v преобразования t-монодромии является обычным преобразованием монодромии трансверсали Γ_v, соответствующим однократному обходу в положительном направлении выколотой точки 0 на сепаратрисе.

Пример. Обозначим через $\delta_{\lambda,a,b}$ отображение t-монодромии нормальной формы $v_{\lambda,a,b}$. Прямые выкладки показывают, что

$$\delta_{\lambda,a,b} : (z, t) \mapsto (\Delta_{\lambda,a,b}(z), t + A_{\lambda,a,b}(z)),$$

где $\Delta_{\lambda,a,b}(z) = g^{2\pi i}_{w(z)}$ — сдвиг за время $2\pi i$ вдоль фазовых кривых поля $w(z) = \frac{z^2}{1+\lambda z}\frac{\partial}{\partial z}$, а $A_{\lambda,a,b}(z) = \frac{2\pi i}{a} - 2\pi i \frac{b}{a^z} z + \mathcal{O}(z^2)$.

В соответствии с [3], [5] два t-сдвига δ и $\widetilde{\delta}$ назовем аналитически (формально) эквивалентными, если существует сопрягающий их обратимый голоморфный (формальный) t–сдвиг $h : h \circ \delta = \widetilde{\delta} \circ h$.

Теорема 5. *Ростки из $\mathcal{V}_\lambda$ аналитически эквивалентны тогда и только тогда, когда аналитически эквивалентны их отображения t-монодромии.*

Пусть $D_{\lambda,a,b}$ — класс t-сдвигов, формально эквивалентных t-сдвигу $\delta_{\lambda,a,b}$ из примера. Аналитическая классификация t-сдвигов из $D_{\lambda,a,b}$ получена в [3], [5]. В частности, там показано, что аналитическая классификация t-сдвигов из $D_{\lambda,a,b}$ имеет четыре функциональных модуля. Но как это следует из теорем 3 и 4, аналитическая классификация преобразований t-монодромии ростков из $\mathcal{V}_{\lambda,a,b}$ имеет один числовой и два функциональных модуля. Разница в количестве модулей объясняется тем, что модули в этих двух классификационных задачах строятся разными способами, хотя эти два типа модулей тесно связаны.

Теорема 6. *Пусть m_v — модуль ростка $v \in \mathcal{V}_{\lambda,a,b}$, δ_v — отображение t-монодромии ростка v и $\widetilde{m}_v$ — модуль ростка δ_v, построенный в соответствии с* [5]*. Тогда для некоторых представителей (c, ϕ, ψ) и $(\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2)$ модулей m_v и $\widetilde{m}_v$ справедливы представления*

$$\phi_1(z) \equiv \phi(z) - e^{2\pi i\lambda}z, \quad \psi_1(z) \equiv \psi(z), \quad \phi_2(z) = z + c, \quad \psi_2(z) \equiv 0.$$

Следствие. t-сдвиг $\delta \in D_{\lambda,a,b}$ является преобразованием t-монодромии некоторого ростка $v \in \mathcal{V}_{\lambda,a,b}$, если и только если для любого представителя $(\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2)$ его модуля m_δ выполняются условия $\psi_2 \equiv 0$, $\phi_2'(z) \equiv 1$.

5. Доказательства

Теоремы 1 и 2 доказываются стандартными рассуждениями методом последовательных приближений; утверждение единственности (теорема 1) проверяется прямыми выкладками.

Теорема 3 для векторных полей v с невязкой $v - v_{\lambda,a,b}$ вида $f \cdot \frac{\partial}{\partial x}$ доказана в [1] (см. также [2], § 3, с. 30). Доказательство в общем случае аналогично. Другое доказательство теоремы 3 можно получить с помощью операторов конечного порядка.

Модули аналитической классификации строятся по суперпозиции секториальных нормализующих отображений так же, как в ([2], § 3, с. 30–37). Доказательство теоремы 4 получается из доказательства аналогичной теоремы о классификации седловых резонансных ростков незначительными изменениями.

Так как модули отображения t-монодромии легко выражаются через секториальные нормализующие отображения, то утверждение теоремы 6 доказывается прямыми выкладками.

Утверждение теоремы 5 доказывается так же, как соответствующее утверждение работы [3], с использованием результатов из теоремы 6.

Литература

1. Martinet J., Ramis J.P. *Probléme de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre* // Pabl. Math. Inst. Hautes Études Sci. – 1982. – V. 55. – P. 63–164.
2. Il'yashenko Yu. *Nonlinear Stokes Phenomena* // Nonlinear Stokes Phenomena. – Adv. in Sov. Math. – V. 14. – Amer. Math. Soc., Providence, 1993. – 287 p.
3. Voronin S.M., Grinchii A.A. *Analytic classification of saddle resonant singular points of holomorfic vector fields on the complex plane* // J. of Dynamical and Control Systems. – 1996. – V. 2. – № 1. – P. 1–15.
4. Арнольд В.И., Ильяшенко Ю.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. – М.: ВИНИТИ, 1985. – Т. 1. – С. 7–149.
5. Воронин С.М., Гринчий А.А. *Аналитическая классификация t-сдвигов* // Челябинск. гос. ун-т. – Челябинск, 1996. – 33 с. – Деп. в ВИНИТИ 24.05.96, № 1689-В96.
6. Мещерякова Ю.И. *Формальные нормальные формы изолированных вырожденных элементарных особых точек* // Челябинск. гос. ун-т. – Челябинск, 1998. – 12 с. – Деп. в ВИНИТИ 24.09.98, № 2848-В98.

Челябинский государственный университет

Поступила
06.12.1999