ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 1 (476)

УДК 513.82

М.Б. БАНАРУ

ДВЕ ТЕОРЕМЫ О КОСИМПЛЕКТИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ 6-МЕРНЫХ ЭРМИТОВЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБРЫ КЭЛИ

Одной из важнейших особенностей геометрии гиперповерхностей почти эрмитова многообразия является наличие на таких гиперповерхностях внутренним образом определенной почти контактной метрической структуры. Эта структура изучалась главным образом для поверхностей келеровых [1], [2] и квазикелеровых [3] многообразий. В случае, когда объемлющее многообразие эрмитово, о геометрии его гиперповерхности известно сравнительно мало.

В данной работе приводятся два результата в этом направлении, полученных с использованием структурных уравнений гиперповерхности.

1. Пусть $\mathbf{O} \equiv \mathbf{R}^8$ — алгебра Кэли. Как известно [4], в ней определены два неизоморфных 3-векторных произведения:

$$P_1(X,Y,Z) = -X(\overline{Y}Z) + \langle X,Y\rangle Z + \langle Y,Z\rangle X - \langle Z,X\rangle Y;$$
$$P_2(X,Y,Z) = -(X\overline{Y})Z + \langle X,Y\rangle Z + \langle Y,Z\rangle X - \langle Z,X\rangle Y.$$

Здесь $X,Y,Z \in \mathbf{O}$; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{O}$, $\mathbf{X} \to \overline{\mathbf{X}}$ — оператор сопряжения в $\mathbf{O}$. При этом любое другое 3-векторное произведение в алгебре октав изоморфно одному из вышеуказанных.

Если $M^6 \subset \mathbf{O}$ — 6-мерное ориентируемое подмногообразие, то на нем индуцируется почти эрмитова структура $\{I_\alpha, \langle\cdot,\cdot\rangle \mid M^6\}$, определяемая в каждой точке $p \in M^6$ соотношением

$$I_\alpha(X) = P_\alpha(X, e_1, e_2), \quad \alpha = 1,2,$$

где $\{e_1, e_2\}$ — произвольный ортонормированный базис нормального к M^6 подпространства в точке p, $X \in T_p(M^6)$ [4]. Подмногообразие $M^6 \subset \mathbf{O}$ называется эрмитовым, если индуцированная на нем почти эрмитова структура интегрируема.

Напомним [5], что точка $p \in M^6$ называется общей, если $e_0 \notin T_p(M^6)\overline{\subset}L(e_0)^\perp$, где $e_0 \in \mathbf{O}$ — единица алгебры Кэли, $L(e_0)^\perp$ — ее ортогональное дополнение. Подмногообразие, состоящее только из общих точек, называется подмногообразием общего типа. Далее рассматриваем только подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$ общего типа.

2. Пусть N — ориентируемая гиперповерхность эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$, σ — вторая квадратичная форма ее погружения в M^6. Как хорошо известно [1], [2], на N внутренним образом индуцируется почти контактная метрическая структура. Напомним [6], что почти контактной метрической структурой на многообразии N называется система $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ тензорных полей на этом многообразии, где ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, Φ — поле тензора типа $(1,1)$, g — риманова метрика на N. При этом

$$\eta(\xi) = 1, \quad \Phi(\xi) = 0, \quad \eta\circ\Phi = 0, \quad \Phi^2 = -id + \xi\otimes\eta,$$
$$\langle\Phi X, \Phi Y\rangle = \langle X,Y\rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X,Y \in \aleph(N).$$

Почти контактная метрическая структура называется косимплектической, если

$$\nabla\eta = \nabla\Phi = 0.$$

Здесь ∇ — риманова связность метрики g. Первая группа структурных уравнений гиперповерхности N эрмитова многообразия M^6 имеет вид [7]

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b + (\sqrt{2}B^{a3}{}_b + i\sigma^a_b)\omega^b \wedge \omega + (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}B^{ab}{}_3 + i\sigma^{ab})\omega_b \wedge \omega,$$
$$d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b + (\sqrt{2}B_{a3}{}^b - i\sigma^b_a)\omega_b \wedge \omega + (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}B_{ab}{}^3 - i\sigma_{ab})\omega^b \wedge \omega,$$
$$d\omega = (\sqrt{2}B^{3a}{}_b - \sqrt{2}B_{3b}{}^a - 2i\sigma^a_b)\omega^b \wedge \omega_a + (B_{3b}{}^3 + i\sigma_{3b})\omega \wedge \omega^b + (B^{3b}{}_3 - i\sigma^b_3)\omega \wedge \omega_b.$$

Здесь B — структурные тензоры Кириченко эрмитова многообразия [8], $a, b, c = 1, 2$, $\widehat{a} = a + 3$. Принимая во внимание, что первая группа структурных уравнений косимплектической структуры должна иметь вид [9]

$$d\omega^a = \omega^a_b \wedge \omega^b, \quad d\omega_a = -\omega^b_a \wedge \omega_b, \quad d\omega = 0,$$

получаем условия, которые являются критерием косимплектичности гиперповерхности N:

$$\begin{gathered} 1)\ B^{ab}{}_c = 0, \quad 2)\ \sqrt{2}B^{a3}{}_b + i\sigma^a_b = 0, \quad 3)\ -\tfrac{1}{\sqrt{2}}B^{ab}{}_3 + i\sigma^{ab} = 0, \\ 4)\ B^{3a}{}_b - \sqrt{2}B_{3b}{}^a - 2i\sigma^a_b = 0, \quad 5)\ B^{3b}{}_3 - i\sigma^b_3 = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

и формулы комплексного сопряжения (ф. к. с.), запись которых опустим.

3. Проанализируем полученные условия. Из $(1)_3$ следует $\sigma^{ab} = -\frac{i}{\sqrt{2}}B^{ab}{}_3$. Проальтернируем это соотношение

$$0 = \sigma^{[ab]} = -\frac{i}{\sqrt{2}}B^{[ab]}{}_3 = -\frac{i}{2\sqrt{2}}(B^{ab}{}_3 - B^{ba}{}_3) = -\frac{i}{\sqrt{2}}B^{ab}{}_3.$$

Следовательно, $B^{ab}{}_3 = 0$, а значит, и $\sigma^{ab} = 0$. Из $(1)_2$ получаем, что $B^{3a}{}_b = \frac{i}{\sqrt{2}}\sigma^a_b$. Подставляя в $(1)_4$, имеем $\sigma^a_b = i\sqrt{2}B^a_{3b}$.

Теперь воспользуемся выражением для структурных тензоров Кириченко 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли [8]

$$B^{\alpha\beta}{}_\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{\alpha\beta\mu}D_{\mu\gamma}, \quad B^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{\alpha\beta\mu}D^{\mu\gamma},$$

где $D_{\mu\gamma} = \pm T^8_{\mu\gamma} + iT^7_{\mu\gamma}$, $D^{\mu\gamma} = D_{\hat\mu\hat\gamma} = \pm T^8_{\hat\mu\hat\gamma} - iT^7_{\hat\mu\hat\gamma}$. Здесь T^φ_{kj} — компоненты конфигурационного тензора [8] (или тензора эйлеровой кривизны [10]) эрмитова подмногообразия $M^6 \subset \mathbf{O}$. При этом $\alpha, \beta, \gamma, \mu = 1, 2, 3$; $k, j = 1, \ldots, 6$; $\varphi = 7, 8$; $\varepsilon^{\alpha\beta\mu} = \varepsilon^{\alpha\beta\mu}_{123}$, $\varepsilon_{\alpha\beta\mu} = \varepsilon^{123}_{\alpha\beta\mu}$ — компоненты тензора Кронекера порядка три [11]. Из $(1)_1$ следует

$$B^{ab}{}_c = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ab\gamma}D_{\gamma c} = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ab3}D_{3c} = 0 \ \Leftrightarrow\ D_{3c} = 0.$$

Рассуждая аналогично, получаем

$$B^{ab}{}_3 = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ab\gamma}D_{\gamma 3} = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ab3}D_{33} = 0 \ \Leftrightarrow\ D_{33} = 0.$$

Итак, $D_{3c} = D_{33} = 0$, т. е. $D_{3\alpha} = 0$. Из $(1)_5$ получаем $\sigma^b_3 = \sigma_{3\hat b} = -iB^{3b}{}_3 = -i\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{3b\gamma}D_{\gamma 3} = 0$.

Имеем $\sigma_{ab} = \sigma_{\hat a\hat b} = \sigma_{3b} = \sigma_{3\hat b} = 0$. Вычислим остальные компоненты σ, используя $(1)_2$:

$$\sigma_{\hat a b} = \sigma^a_b = i\sqrt{2}B^{a3}_b = i\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{a3\gamma}D_{\gamma b} = i\varepsilon^{a3c}D_{cb}.$$

Тогда

$$
\begin{gathered}
\sigma_{\hat{1}1} = i\varepsilon^{13c} D_{c1} = i\varepsilon^{132} D_{21} = -iD_{21}, \\
\sigma_{\hat{1}2} = i\varepsilon^{13c} D_{c2} = i\varepsilon^{132} D_{22} = -iD_{22}, \\
\sigma_{\hat{2}1} = i\varepsilon^{23c} D_{c1} = i\varepsilon^{231} D_{11} = iD_{11}, \\
\sigma_{\hat{2}2} = i\varepsilon^{23c} D_{c2} = i\varepsilon^{231} D_{12} = iD_{12}, \\
\sigma_{1\hat{1}} = \overline{\sigma_{\hat{1}1}} = iD^{12}, \\
\sigma_{1\hat{2}} = \overline{\sigma_{\hat{2}1}} = iD^{11}, \\
\sigma_{2\hat{1}} = \overline{\sigma_{\hat{1}2}} = -iD^{22}, \\
\sigma_{2\hat{2}} = \overline{\sigma_{\hat{2}2}} = -iD^{12}.
\end{gathered}
$$

Получаем, что матрица второй квадратичной формы погружения косимплектической гиперповерхности N в эрмитово $M^6 \subset \mathbf{O}$ имеет следующий вид:

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & iD^{12} & -iD^{11} \\
0 & 0 & 0 & iD^{22} & -iD^{12} \\
0 & 0 & \sigma_{33} & 0 & 0 \\
-iD_{12} & -iD_{22} & 0 & 0 & 0 \\
iD_{11} & iD_{12} & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Воспользовавшись тождествами $D^{11}D^{22} = (D^{12})^2$ и $D_{11}D_{22} = (D_{12})^2$, установленными в [12], убеждаемся, что каждая из матриц

$$
\begin{pmatrix}
-iD_{12} & -iD_{22} \\
iD_{11} & iD_{12}
\end{pmatrix}
\quad \text{и} \quad
\begin{pmatrix}
-iD^{12} & -iD^{11} \\
-iD^{22} & iD^{12}
\end{pmatrix}
$$

является вырожденной. Следовательно, вырождена и матрица второй квадратичной формы σ. Поэтому справедлива

Теорема 1. *Косимплектическая гиперповерхность 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли линейчата.*

Исследуя матрицу σ, приходим еще к одному результату. В самом деле, критерием минимальности гиперповерхности является тождество ([13], с. 40) $g^{kl}\sigma_{kl} = 0$. Зная, как выглядит матрица метрического тензора [7]

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix},
$$

проделаем такие выкладки:

$$
g^{kl}\sigma_{kl} = g^{ab}\sigma_{ab} + g^{\hat{a}\hat{b}}\sigma_{\hat{a}\hat{b}} + g^{\hat{a}b}\sigma_{\hat{a}b} + g^{a\hat{b}}\sigma_{a\hat{b}} + g^{33}\sigma_{33} = iD_{12} - iD_{12} + iD^{12} - iD^{12} + \sigma_{33} = \sigma_{33}.
$$

Поэтому $g^{kl}\sigma_{kl} = 0 \Leftrightarrow \sigma_{33} = 0$. Последнее равенство означает, что $\sigma(\xi, \xi) = 0$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Косимплектическая гиперповерхность 6-мерного эрмитова подмногообразия алгебры Кэли минимальна тогда и только тогда, когда $\sigma(\xi, \xi) = 0$.*

Литература

1. Goldberg S. *Totally geodesic hypersurfaces of Kaehler manifolds* // Pacif. J. Math. – 1968. – V. 27. – № 2. – P. 275–281.
2. Tashiro Y. *On contact structure on hypersurfaces in complex manifolds.* I // Tôhoku. Math. J. – 1963. – V. 15. – № 1. – P. 62–78.
3. Кириченко В.Ф., Степанова Л.В. *О геометрии гиперповерхностей квазикелеровых многообразий* // УМН. – 1995. – № 2. – С. 213–214.
4. Gray A. *Vector cross products on manifolds* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – V. 141. – P. 465–504.
5. Кириченко В.Ф. *Почти келеровы структуры, индуцированные 3-векторными произведениями на шестимерных подмногообразиях алгебры Кэли* // Вестн. Моск. ун-та. – 1973. – № 3. – С. 70–75.
6. Blair D.E. *The theory of quasi-Sasakian structures* // J. Diff. Geom. – 1967. – V. 1. – P. 331–345.
7. Степанова Л.В. *Квазисасакиева структура на гиперповерхностях эрмитовых многообразий* // Научн. тр. Моск. пед. гос. ун-та. – 1995. – С. 187–191.
8. Банару М.Б. *Классы Грея–Херверллы почти эрмитовых структур на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли* // Научн. тр. Моск. пед. гос. ун-та. – 1994. – С. 36–38.
9. Кириченко В.Ф. *Методы обобщенной почти эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий* // Итоги науки и техн. Пробл. геом. – М.: ВИНИТИ, 1986. – Т. 18. – С. 25–71.
10. Фрейденталь Г. *Октавы, особые группы и октавная геометрия* // Сб. переводов. Матем. – 1957. – Т. 1. – С. 117–153.
11. Лихнерович А. *Теория связностей в целом и группы голономий.* – М.: Ин. лит., 1960. – 216 с.
12. Банару М.Б. *О почти эрмитовых структурах, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных ориентируемых подмногообразиях алгебры октав* // Полианалитические функции. – Смоленск, 1997. – С. 113–117.
13. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. II. – М.: Наука, 1981. – 414 с.

Смоленский гуманитарный университет

Поступила
17.05.2000