ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 7 (482)

УДК 517.925

Ю.В. УСАЧЁВ

БИФУРКАЦИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим в $\mathbf{R}^n$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = A(\varepsilon)x + F(x,\varepsilon), \tag{1}$$

где ε — параметр, $A(\varepsilon) \in C^{m+2}$, $F(x,\varepsilon) \in C^{m+2}$, $\|x\| \le \mu_0$, $|\varepsilon| \le \mu_0$. Здесь и ниже $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbf{R}^n$, $m \ge 1$, $F(0,\varepsilon) = 0$, $F'_x(0,\varepsilon) = 0$. Пусть матрица $A(\varepsilon)$ имеет собственные числа

$$\lambda_k(\varepsilon) = \alpha_k(\varepsilon) + i\beta_k(\varepsilon), \quad \overline{\lambda}_k(\varepsilon) = \alpha_k(\varepsilon) - i\beta_k(\varepsilon), \quad \lambda_r(\varepsilon) = \alpha_r(\varepsilon), \quad k = \overline{1,l}; \quad r = \overline{l+1, n-l}; \quad l \ge 1,$$

такие, что

$$\alpha_s(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\rho_s}) \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0, \quad \rho_s > 0, \quad s = \overline{1, n-l}, \quad \beta_k(0) \ne 0, \quad \operatorname{rang} A(0) = 2l.$$

Предположим также, что выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{l} q_j \beta_j(0) \ne 0, \quad \text{где целые числа } q_j \text{ такие, что } \ 0 < \sum_{j=1}^{l} |q_j| \le m+2.$$

Определение. Значение ε_0 параметра ε называется точкой бифуркации ограниченных решений уравнения (1), если для любого $\mu > 0$ существует такое ε^*, что $0 < |\varepsilon^* - \varepsilon_0| \le \mu$ и уравнение (1) имеет ненулевое ограниченное решение $x(t,\varepsilon^*)$, удовлетворяющее неравенству $\|x(t,\varepsilon^*)\| \le \mu$ для любых $t \in \mathbf{R}$.

Исследуется проблема бифуркации ограниченных решений дифференциального уравнения (1) из положения равновесия $x = 0$ при $\varepsilon = 0$. Задача бифуркации (рождения) периодических решений для случая $n = 2l$ рассматривалась в [1], [2]. Бифуркация квазипериодических решений для того же случая изучена в ([3], с. 62). В данной статье исследуется ситуация, когда $n \ge 2l$.

Выполним нормализацию уравнения (1) до членов порядка $m+1$ включительно ([4], с. 150). Тогда, предполагая, что первые отличные от нуля члены нормализованной системы имеют порядок $m_0 + 1$, $1 \le m_0 \le m$, можем записать

$$\dot{z}_k = \lambda_k(\varepsilon) z_k + z_k \sum_q A_q^k(\varepsilon) |z_1|^{2q_1} \dots |z_l|^{2q_l} z_{l+1}^{q_{l+1}} \dots z_{n-l}^{q_{n-l}} + Z_k(z^*,\varepsilon), \tag{2}$$

$$\dot{z}_r = \lambda_r(\varepsilon) + z_r \sum_q a_q^r(\varepsilon) |z_1|^{2q_1} \dots |z_l|^{2q_l} z_{l+1}^{q_{l+1}} \dots z_{n-l}^{q_{n-l}} + Z_r(z^*,\varepsilon), \tag{3}$$

где $k = \overline{1,l}$, $r = \overline{l+1, n-l}$, $q = (q_1, \dots, q_{n-l})$, $z^* = (z_1, \overline{z}_1, \dots, z_l, \overline{z}_l, z_{l+1}, \dots, z_{n-l})$, $A_q^k(\varepsilon) = a_q^k(\varepsilon) + ib_q^k(\varepsilon)$; символ $\sum\limits_q$ означает, что суммирование ведется по индексам q, удовлетворяющим условию

$$2\sum_{j=1}^{l} q_j + \sum_{j=l+1}^{n-l} q_j = m_0;$$

функции $Z_k(z^*,\varepsilon)$, $Z_r(z^*,\varepsilon)$ имеют в нуле по z^* порядок малости $m_0 + 2$. Отметим, что уравнения для $\overline{z}_k$, $k = \overline{1,l}$, являются комплексно-сопряженными к (2).

Положим $z_k = \xi_k \exp i\tau_k$, $k = \overline{1,l}$, и перепишем систему (2), (3) в координатах ξ_k, τ_k, z_r, $r = \overline{l+1, n-l}$. В результате получим

$$\dot{\xi}_k = \alpha_k(\varepsilon)\xi_k + \xi_k \sum_q a_q^k(\varepsilon)\xi_1^{2q_1} \dots \xi_l^{2q_l} z_{l+1}^{q_{l+1}} \dots z_{n-l}^{q_{n-l}} + \Xi_k(\tau, \widetilde{z}, \varepsilon), \tag{4}$$

$$\dot{\tau}_k = \beta_k(\varepsilon) + \sum_q b_q^k(\varepsilon)\xi_1^{2q_1} \dots \xi_l^{2q_l} z_{l+1}^{q_{l+1}} \dots z_{n-l}^{q_{n-l}} + \frac{1}{\xi_k} T_k(\tau, \widetilde{z}, \varepsilon), \tag{5}$$

$$\dot{z}_r = \alpha_r(\varepsilon) z_r + z_r \sum_q a_q^r(\varepsilon)\xi_1^{2q_1} \dots \xi_l^{2q_l} z_{l+1}^{q_{l+1}} \dots z_{n-l}^{q_{n-l}} + \widetilde{Z}_r(\tau, \widetilde{z}, \varepsilon); \tag{6}$$

здесь $k = \overline{1,l}$, $r = \overline{l+1, n-l}$, $\widetilde{z} = (\xi_1, \dots, \xi_l, z_{l+1}, \dots, z_{n-l})$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_l)$; $\Xi_k(\tau, \widetilde{z}, \varepsilon)$, $T_k(\tau, \widetilde{z}, \varepsilon)$, $\widetilde{Z}_r(\tau, \widetilde{z}, \varepsilon)$ — 2π-периодические по τ функции, имеющие порядок малости по $\widetilde{z}$ в нуле, равный $m_0 + 2$.

Пусть m_0 нечетно, и предположим, что существует число p, $1 \le p \le n-l$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\alpha_p(\varepsilon)}{\alpha_s(\varepsilon)} = 0, \quad s = \overline{1, n-l}, \quad p \ne s, \quad a^p_{(q_1, \dots, q_{p-1}, m_0, q_{p+1}, \dots, q_{n-l})}(0) \ne 0.$$

Тогда, как показано в [5], система уравнений

$$\dot{\xi}_k = \alpha_k(\varepsilon)\xi_k + \xi_k \sum_q a_q^k(\varepsilon)\xi_1^{2q_1} \dots \xi_l^{2q_l} z_{l+1}^{q_{l+1}} \dots z_{n-l}^{q_{n-l}},$$

$$\dot{z}_r = \alpha_r(\varepsilon) z_r + z_r \sum_q a_q^r(\varepsilon)\xi_1^{2q_1} \dots \xi_l^{2q_l} z_{l+1}^{q_{l+1}} \dots z_{n-l}^{q_{n-l}}, \quad k = \overline{1,l}, \quad r = \overline{l+1, n-l},$$

имеет ненулевое состояние равновесия вида

$$\widetilde{z}_0(\varepsilon) = O(\varepsilon^\nu) \ \text{ при } \ \varepsilon \to 0, \ \text{ где } \ \nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n-l}), \quad \min_{j = \overline{1, n-l}} \{\nu_j\} = \nu_0 > 0.$$

Выполним в (4), (5), (6) замену

$$\widetilde{z} = \widetilde{z}_0(\varepsilon) + \varepsilon^{3\nu_0/2} y, \quad y = (y_1, \dots, y_{n-l}). \tag{7}$$

В результате в координатах y, τ получим систему

$$\dot{y} = C(\varepsilon) y + \varepsilon^{m_0 \nu_0} H(\tau, y, \varepsilon), \tag{8}$$

$$\dot{\tau} = B(\varepsilon) + \varepsilon^{m_0 \nu_0} R(\tau, y, \varepsilon), \tag{9}$$

в которой $C(\varepsilon) = \operatorname{diag}(\alpha_1(\varepsilon), \dots, \alpha_l(\varepsilon), \alpha_{l+1}(\varepsilon), \dots, \alpha_{n-l}(\varepsilon))$, $B(\varepsilon) = \operatorname{diag}(\beta_1(\varepsilon), \dots, \beta_l(\varepsilon))$; $H(\tau, y, \varepsilon)$, $R(\tau, y, \varepsilon)$ — 2π-периодические по τ функции.

Обозначим $\max\limits_{j = \overline{1, n-l}} \{\nu_j\} = \nu_*$.

Теорема. *Если $m_0 \nu_0 > \rho_p$ и $\nu_* < 3\nu_0/2$, то $\varepsilon = 0$ — точка бифуркации ограниченных решений дифференциального уравнения* (1).

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{T}_n$ непрерывных n-периодических функций $f_n(t)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\|f_n(t)\| \le M, \quad \|f_n(t_1) - f_n(t_2)\| \le K|t_1 - t_2|$$

для любых $t, t_1, t_2 \in \mathbf{R}$; $M, K \in \mathbf{R}_+$, $n \in \mathbf{N}$. Покажем, что в $\mathcal{T}_n$ существует функция $f_n(t)$ такая, что на множестве $\mathbf{R} \setminus \mathbf{R}_n$, $\mathbf{R}_n = \{t : t = n/2 + kn, \ k \in \mathbf{Z}\}$, при малых ε выполнено тождество

$$\dot{f}_n(t) \equiv C(\varepsilon) f_n(t) + \varepsilon^{m_0 \nu_0} H_n(\tau_n(t), f_n(t), \varepsilon), \tag{10}$$

где $\tau = \tau_n(t)$ — решение уравнения (9) при подстановке в правую часть вместо y функции $f_n(t)$, продолжимое на $\mathbf{R}$ (указанное решение существует в силу условия $\nu_* < 3\nu_0/2$); $H_n(\tau_n(t), f_n(t), \varepsilon)$ — функция на промежутке $]-n/2; n/2]$, совпадающая с $H(\tau_n(t), f_n(t), \varepsilon)$, а вне этого промежутка определена по периодическому закону. Зависимость функций $f_n(t)$ и $\tau_n(t)$ от ε не отмечается, т. к. ε считается фиксированным в промежутке $|\varepsilon| \le \mu_0$. Нахождение функции $f_n(t)$, удовлетворяющей при $t \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{R}_n$ и малых ε тождеству (10), сведем к нахождению на множестве $\mathcal{T}_n$ неподвижной точки оператора L_n, определенного равенством

$$(L_n f_n)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t - t_1, \varepsilon)\varepsilon^{m_0\nu_0} H_n(\tau_n(t_1), f_n(t_1), \varepsilon) dt_1,$$

где $G(t, \varepsilon)$ — квадратная матрица порядка $n - l$, обладающая свойствами ([3], с. 358)

1) $G(t, \varepsilon) \in C^\infty(\mathbf{R}_0)$, $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,
2) $G(+0, \varepsilon) - G(-0, \varepsilon) = E$,
3) $\|G(t, \varepsilon)\| \le \exp(-|\alpha_p(\varepsilon)|\,|t|)$ при $t \in \mathbf{R}_0$,
4) $\dot{G}(t, \varepsilon) = C(\varepsilon)G(t, \varepsilon)$ при $t \in \mathbf{R}_0$.

Докажем непрерывность оператора L_n. Пусть $f_n^1(t), f_n^2(t) \in \mathcal{T}_n$, $\tau = \tau_n^1(t)$, $\tau = \tau_n^2(t)$ — решения уравнения (9) при подстановке в правую часть вместо y соответственно функций $f_n^1(t)$, $f_n^2(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} &\|(L_n f_n^2)(t) - (L_n f_n^1)(t)\| = \\ &= \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} G(t - t_1, \varepsilon)\varepsilon^{m_0\nu_0}(H_n(\tau_n^2(t_1), f_n^2(t_1), \varepsilon) - H_n(\tau_n^1(t_1), f_n^1(t_1), \varepsilon))dt_1 \right\| \le \\ &\le \frac{2|\varepsilon|^{m_0\nu_0}}{|\alpha_p(\varepsilon)|} \sup_{t \in\,]-n/2; n/2]} \|H_n(\tau_n^2(t_1), f_n^2(t_1), \varepsilon) - H_n(\tau_n^1(t_1), f_n^1(t_1), \varepsilon)\|. \end{aligned} \quad (11)$$

В силу определения функция $H_n(\tau_n(t), f_n(t), \varepsilon)$ совпадает на промежутке $]-n/2; n/2]$ с функцией $H(\tau_n(t), f_n(t), \varepsilon)$. Но $H(\tau_n(t), f_n(t), \varepsilon)$ непрерывно зависит от $\tau_n(t)$ и $f_n(t)$, функция $\tau_n(t)$ в свою очередь непрерывно зависит от $f_n(t)$ при любом $t \in]-n/2; n/2]$. Тогда, учитывая неравенство (11), можем заключить, что оператор L_n непрерывен на множестве $\mathcal{T}_n$, а

$$\|(L_n f_n)(t)\| \le \frac{2|\varepsilon|^{m_0\nu_0}}{|\alpha_p(\varepsilon)|} \sup_{t_1 \in \mathbf{R}} \|H(\tau_n(t_1), f_n(t_1), \varepsilon)\|.$$

По условию $m_0\nu_0 > \rho_p$, поэтому оператор L_n отображает множество $\mathcal{T}_n$ в себя при малых ε.

Множество функций $\mathcal{T}_n$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, следовательно, оно компактно в силу теоремы Арцела ([6], с. 324). Таким образом, существует μ^*, $0 < \mu^* \le \mu_0$, такое, что при любом ε, $0 < |\varepsilon| \le \mu^*$, для оператора L_n на множестве $\mathcal{T}_n$ выполнены все условия теоремы Шаудера ([7], с. 623). Следовательно, в $\mathcal{T}_n$ существует неподвижная точка $f_n(t)$ оператора L_n.

Получили некоторую последовательность функций $f_n(t)$, равномерно ограниченную и равностепенно непрерывную при $t \in \mathbf{R}$. Рассмотрим последовательность $f_n(t)$ на $[-1, 1]$. По теореме Арцела существует подпоследовательность $f_{n_k}^1(t)$ последовательности $f_n(t)$, равномерно сходящаяся на $[-1, 1]$. Аналогично в силу компактности $f_{n_k}^1(t)$ на $[-2, 2]$ существует подпоследовательность $f_{n_k}^2(t)$ последовательности $f_{n_k}^1(t)$, равномерно сходящаяся на $[-2, 2]$. Продолжая рассуждать аналогичным образом, получим счетное множество последовательностей

$$\begin{array}{l} f_{n_1}^1(t), f_{n_2}^1(t), f_{n_3}^1(t), \dots, \\ f_{n_1}^2(t), f_{n_2}^2(t), f_{n_3}^2(t), \dots, \\ f_{n_1}^3(t), f_{n_2}^3(t), f_{n_3}^3(t), \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Рассмотрим диагональную последовательность $f_{n_k}^k(t)$. В силу построения она сходится при любом $t \in \mathbf{R}$, причем равномерно на любом конечном промежутке. Определим функцию $f^*(t)$

для любого $t \in \mathbf{R}$ равенством

$$f^*(t) = \lim_{k\to+\infty} f^k_{n_k}(t).$$

Пусть $\tau = \tau^*(t)$ — решение уравнения (9) при подстановке в правую часть вместо y функции $f^*(t)$. Покажем теперь, что функции $f^*(t)$, $\tau^*(t)$ удовлетворяют системе (8), (9) при всех $t \in \mathbf{R}$. Как следует из построения последовательности $f^k_{n_k}(t)$ при любом ε, $0 < |\varepsilon| \le \mu^*$, на множестве $\mathbf{R} \setminus \mathbf{R}_{n_k}$ справедливо тождество

$$f^k_{n_k}(t) \equiv f^k_{n_k}(t_0) + \int_{t_0}^{t} (C(\varepsilon) f^k_{n_k}(\theta) + \varepsilon^{m_0\nu_0} H_{n_k}(\tau^k_{n_k}(\theta), f^k_{n_k}(\theta), \varepsilon)) d\theta. \tag{12}$$

Зафиксируем произвольно t, выберем k так, чтобы $t \in]-n_k/2, n_k/2[$ и перейдем в тождестве (12) к пределу при $k \to +\infty$. Поскольку на промежутке $[t_0, t]$ последовательность $f^k_{n_k}(\theta)$ равномерно сходится к $f^*(\theta)$, то в результате предельного перехода получим

$$f^*(t) \equiv f(t_0) + \int_{t_0}^{t} (C(\varepsilon) f^*(\theta) + H(\tau^*(\theta), f^*(\theta), \varepsilon)) d\theta$$

или, выполняя дифференцирование,

$$\dot{f}^*(t) \equiv C(\varepsilon) f^*(t) + H(\tau^*(t), f^*(t), \varepsilon).$$

Учитывая замену (7), можем заключить, что для любого числа μ, $0 < \mu \le \mu^*$, существует ε^* такое, что $0 < |\varepsilon^*| \le \mu$ и дифференциальное уравнение (1) имеет ненулевое ограниченное решение $x(t, \varepsilon^*)$, удовлетворяющее условию $\|x(t, \varepsilon^*)\| \le \mu$ при любых $t \in \mathbf{R}$, т. е. $\varepsilon = 0$ — точка бифуркации ограниченных решений уравнения (1). $\square$

Литература

1. Кубышкин Е.П. *Бифуркация периодических решений в критическом случае двух пар чисто мнимых корней при наличии старших резонансов* // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22. – № 10. – С. 1693–1697.
2. Самойленко А.М., Полеся И.В. *Рождение инвариантных множеств в окрестности положения равновесия* // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11. – № 8. – С. 1409–1415.
3. Бибиков Ю.Н. *Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации.* – Л.: Изд-во Ленинградск. ун-та, 1991. – 143 с.
4. Брюно А.Д. *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1979. – 255 с.
5. Усачёв Ю.В. *О наличии ненулевого состояния равновесия системы дифференциальных уравнений.* – Рязанск. гос. пед. ин-т. – Рязань, 1990. – 10 с. – Деп. в ВИНИТИ 02.04.90, № 1740-В90.
6. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Наука, 1967. – 472 с.
7. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1984. – 752 с.

Рязанский государственный
педагогический университет

Поступили
первый вариант 02.07.1997
окончательный вариант 31.05.2001