И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2003 МАТЕМАТИКА № 1 (488)

УДК 517.956

М.Р. ТИМЕРБАЕВ

ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С АНИЗОТРОПНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ НА ЧАСТИ ГРАНИЦЫ

1. Введение

В статье исследуется разрешимость в различных весовых классах функций модельной задачи

$$- D_m(x_m^\alpha a_{mm}(x)D_m u(x)) - x_m^\beta \sum_{i,j<m} D_i(a_{ij}(x)D_j u(x)) = f(x) \quad \text{при} \quad x \in Q, \tag{1}$$

$$u|_{\partial Q} = 0. \tag{2}$$

Здесь $Q = \Omega \times (0,1)$ — цилиндрическая область в R^m, Ω — регулярная область в R^{m-1}, $(a_{ij}(x))$ — симметричная положительно-определенная матрица при $x \in \overline{Q}$ с достаточно гладкими коэффициентами (условия на коэффициенты см. в §§ 3, 4), α, β — вещественные числа, удовлетворяющие условию $\alpha < \min(1, \beta+2)$. Такая задача возникает, например, при описании стационарного распределения температуры в теплопроводящей среде с существенно различными (при $\alpha \neq \beta$) проводящими свойствами в окрестности части границы $\Gamma = \partial Q \bigcap \{x_m = 0\}$ в направлении нормали к Γ и по касательным направлениям. При положительных значениях α или β происходит запирание проводимости на Γ, что приводит к возникновению погранслоя в окрестности вырождения коэффициентов; отрицательные значения моделируют сверхпроводимость среды. Таким образом, при $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ решение имеет особенность при $x_m \to 0$, которую необходимо учитывать при численном решении.

Для оценок решений задач с вырождением коэффициентов применяют обычно весовые нормы пространств Соболева для самого решения (см., напр., [1]–[3]). В этом случае получение двусторонних априорных оценок на классе регулярных правых частей невозможно, поскольку специфика задачи такова, что даже при гладких правых частях решение имеет погранслой. Наш подход заключается в использовании норм весовых пространств Соболева для решения, поделенного на вес $x_m^{1-\alpha}$, который определяет этот погранслой в окрестности вырождения коэффициентов. Не очевидно, что результатом такого деления нерегулярного решения на нерегулярный вес будет гладкая функция, адекватная гладкости правой части. Априорные оценки, полученные в работе, показывают, что решение (1), (2) в окрестности Γ действительно можно представить в виде $u(x) = x_m^{1-\alpha}\varphi(x)$ (или в виде $u(x) = x_m^{-\alpha}\varphi(x)$), где $\varphi(x)$ является достаточно гладкой (в зависимости от $f(x)$). Основываясь на этом представлении, в [4] для задачи (1), (2) с изотропным вырождением ($\alpha = \beta$) была предложена схема аппроксимации, совпадающая по эффективности с обычной схемой метода конечных элементов для регулярных задач; там же был анонсирован основной результат данной работы. Отметим также, что полученные в работе оценки являются новыми и для регулярного случая $\alpha = \beta = 0$.

Задача (1), (2) рассматривается в статье как частный случай абстрактной граничной задачи в гильбертовом пространстве на интервале $T = (0,1)$ (§§ 3, 4)

$$-D_t(t^\alpha a(t)D_t u(t)) + t^\beta b(t)u(t) = f(t) \quad \text{при} \quad t \in T, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01-01-00616).

с операторными коэффициентами $a(t), b(t)$. В § 4 получены априорные оценки решения этой задачи; свойства решения (1), (2) выводятся из них как непосредственные следствия. Техника, используемая нами для исследования абстрактной задачи, существенно использует некоторые свойства так называемых интегральных операторов Харди в пространствах вектор-функций; эти вспомогательные для наших целей результаты устанавливаются в следующем параграфе.

2. Интегральный оператор Харди

1. *Обобщенное неравенство Харди.* Пусть $\tau \in (0, +\infty]$ и $T = (0, \tau)$. Для комплексного банахова пространства X с нормой $|\cdot|_X$, $p \in [1, \infty]$ и вещественного γ через $L_{p,\gamma}(T; X)$ обозначается пространство измеримых функций $f : T \to X$ таких, что функция $t \in T \to t^{-\gamma}|f(t)|_X$ является элементом пространства Лебега $L_p(T)$; при этом полагаем

$$\|f\|_{L_{p,\gamma}(T;X)} = \|t^{-\gamma} f\|_p = \left(\int_T |t^{-\gamma} f(t)|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

(Здесь и далее t^γ будет обозначать в зависимости от контекста не только степень γ конкретного числа t, но и символ степенной функции $t \to t^\gamma$.)

Для положительных на T измеримых функций $a(s), b(s)$ определим формальный интегральный оператор K вида

$$Ku(s) = a(s) \int_0^s b(t) u(t) dt, \tag{3}$$

интеграл в котором понимается в смысле Бохнера в случае B-значной функции u. Таким образом, измеримая функция $u : T \to X$ принадлежит области определения $D(K)$ оператора K, если $bu \in L_1((0, s); X)$ для любого $s \in T$. Формально сопряженный к нему оператор K^* определяется формулой

$$K^* v(t) = b(t) \int_t^\tau a(s) v(s) ds. \tag{4}$$

Выясним, при каких a, b операторы (4) действуют в весовых классах L_p. Заметим, во-первых, что пространство $L_{p,\gamma}(T; X)$ содержится в $D(K)$ тогда и только тогда, когда $t^\gamma b \in L_q(0, s)$ для любого $s \in T$ (здесь и далее в этом параграфе $q = p/(p-1)$), т. е. $b \in L_{q,-\gamma}(0, s)$. Это следует из того, что при всех $u \in L_{p,\gamma}(T; X)$ должна быть интегрируема на $(0, s)$ по Бохнеру функция $b(t)u(t) = t^\gamma b(t) t^{-\gamma} u(t)$, что равносильно интегрируемости на $(0, s)$ скалярной функции $t^\gamma b(t)\varphi(t)$ при любой $\varphi \in L_p(T)$. Отсюда следует необходимость включения $b \in L_{q,-\gamma}(0, s)$.

Теорема 2.1. *Пусть $1 < p < \infty$, $b \in L_{q,-\gamma}(0, s)$ для любого $s \in T$. Положим $\theta(s) = s^{\gamma q} b(s)^{q-1}$. Тогда $\left\|\frac{\theta}{K\theta} t^{-\gamma} K u\right\|_p \le q \|t^{-\gamma} u\|_p$ $\forall u \in L_{p,\gamma}(T; X)$. Константа q в этом неравенстве неулучшаема.*

Для доказательства понадобится

Лемма 2.1 ([5], с. 120). *Пусть $\sigma(t)$, $\sigma'(t) > 0$ на T, причем $\sigma(0) = 0$ и*

$$F(s) = \int_0^s f(t) dt, \quad \|\sigma'^{-1/q} f\|_p < +\infty.$$

Тогда $\left\|\frac{\sigma'^{1/p}}{\sigma} F\right\|_p \le q \|\sigma'^{-1/q} f\|_p$. Константа q в этом неравенстве неулучшаема.

В случае $\sigma(t) = t$ последнее соотношение известно как неравенство Харди [6]. Заметим, что в указанных монографиях это неравенство доказано для скалярных функций, однако в силу неравенства

$$\left| \int_0^s f(t) dt \right|_X \le \int_0^s |f(t)|_X dt$$

оно непосредственно переносится на случай функций со значениями в произвольном B-пространстве X.

Доказательство теоремы 2.1. Для $u \in L_{p,\gamma}(T;X)$ положим

$$f(t) = b(t)u(t), \quad F(s) = \int_0^s f(t)dt, \quad \sigma(s) = \int_0^s (t^\gamma b(t))^q dt.$$

По определению $\sigma(0) = 0$ и $\sigma' \in L_1(T)$. Тогда $\sigma'^{-1/q} f = t^{-\gamma} u \in L_p(T;X)$ и

$$\frac{\sigma'(s)^{1/p}}{\sigma(s)} F(s) = \frac{\theta(s)}{K\theta(s)} s^{-\gamma} K u(s).$$

Далее, применяя лемму 2.1, получим требуемую оценку. $\square$

Следствие 2.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Если $K\theta(s) \le c\theta(s)$ почти всюду (п. в.) на T для некоторой постоянной $c > 0$, то интегральный оператор K ограничен в $L_{p,\gamma}(T;X)$ и для его нормы справедлива оценка $\|K\|_{L_{p,\gamma}\to L_{p,\gamma}} \le cq$. Следовательно, интегральный оператор K^*, определяемый (4), является сопряженным к K ограниченным оператором в $L_{q,-\gamma}(T;X^*)$ и $\|K^*\|_{L_{q,-\gamma}\to L_{q,-\gamma}} \le cq$.

Доказательство. Для всех $u \in L_{p,\gamma}(T;X)$ по теореме имеем

$$\frac{1}{c}\|t^{-\gamma} K u\|_p \le \left\| \frac{\theta}{K\theta} t^{-\gamma} K u \right\|_p \le q \|t^{-\gamma} u\|_p,$$

откуда следует утверждение. $\square$

Замечание. Из того, что оператор K ограничен в $L_{p,\gamma}(T;X)$, следует ограниченность K^* в сопряженном пространстве $(L_{p,\gamma}(T;X))^*$, которое, вообще говоря, для бесконечномерного X шире, чем $L_{q,-\gamma}(T;X^*)$ при соответствующем отождествлении линейных непрерывных функционалов на $L_{p,\gamma}(T;X)$ с X^*-значными скалярно измеримыми функциями из класса типа L_q [7]; однако пространство $L_{q,-\gamma}(T;X^*)$ является замкнутым подпространством $(L_{p,\gamma}(T;X))^*$ и сужение K^* на $L_{q,-\gamma}(T;X^*)$ является ограниченным оператором в этом пространстве.

Для произвольного комплексного числа μ положим

$$h_\mu(s,t) = \begin{cases} s^{\mu-1} t^{-\mu}, & \text{если} \quad t \le s; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Интегральный оператор H_μ с ядром h_μ, действующий по формуле

$$H_\mu u(s) = \int_T h_\mu(s,t) u(t) dt = s^{\mu-1} \int_0^s t^{-\mu} u(t) dt,$$

называется интегральным оператором Харди.

Теорема 2.2. *Оператор H_μ ограничен в $L_{p,\gamma}(T;X)$ при $1 < p < \infty$ тогда и только тогда, когда $\delta = 1/q + \gamma - \operatorname{Re}\mu > 0$. При этом $\|H_\mu\|_{L_{p,\gamma}\to L_{p,\gamma}} = 1/\delta$.*

Доказательство. Положим $a = \operatorname{Re}\mu$. Так как $|h_\mu| = h_a$, то $D(H_\mu) = D(H_a)$ и $\|H_\mu\|_{L_{p,\gamma}\to L_{p,\gamma}} = \|H_a\|_{L_{p,\gamma}\to L_{p,\gamma}}$, так что достаточно доказать утверждение для H_a.

Необходимость. Если H_a определен на $L_{p,\gamma}(T;X)$, то $t^{\gamma-a} \in L_q(0,s)$ при $s > 0$, что равносильно неравенству $1/q + \gamma - a > 0$.

Достаточность. Пусть $\delta = 1/q + \gamma - a > 0$. Положим $\theta(s) = s^{\gamma q - a(q-1)}$. Тогда

$$H_a\theta(s) = s^{a-1} \int_0^s t^{(\gamma-a)q} dt = \frac{\theta(s)}{(\gamma-a)q+1}.$$

По теореме 2.1 для произвольной функции $u \in L_{p,\gamma}(T;X)$ имеет место неравенство

$$\|t^{-\gamma} H_a u\|_p \le \frac{q}{(\gamma-a)q+1} \|t^{-\gamma} u\|_p = \frac{1}{\delta}\|t^{-\gamma} u\|_p,$$

причем константа $1/\delta$ здесь неулучшаема. $\square$

2. *Дифференцирование оператора Харди.* Для локально интегрируемой скалярной или B-значной функции u на T через Du будет обозначаться обобщенная производная на T [8].

Лемма 2.2. *Пусть $u, Du \in L_{1,loc}(T)$, $v, Dv \in L_{1,\mathrm{loc}}(T; X)$, причем $uDv, Duv \in L_1(T; X)$. Тогда*

1) *функция uv (после возможного изменения на множестве меры нуль) абсолютно непрерывна на T;*
2) *если для некоторого $a \in [0, \tau]$ существует предел $\lim\limits_{t\to a} u(t)$, равный нулю или бесконечности, то $\lim\limits_{t\to a} u(t)v(t) = 0$.*

Доказательство. Утверждение 1) следует из того, что $D(uv) = uDv + Duv$. Утверждение 2) докажем сначала для скалярной функции v. Пусть, например, $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = L$, где $L = 0$ или $L = \infty$. Предположим противное, т. е. что $b = \lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t) \neq 0$ (в силу первой части утверждения этот предел конечен). Обозначим $\varphi(t) = u(t)v(t)$. Найдется такое $c \in T$, что $|\varphi(t)| \geq |b|/2 > 0$ для всех $t \in [0, c]$. Так как $vDu \in L_1(T)$, то и $vDu/\varphi \in L_1(0, c)$. С другой стороны,

$$\int_s^c \frac{v(t)Du(t)}{\varphi(t)}dt = \int_s^c \frac{Du(t)}{u(t)}dt = (\ln|u(t)| + i\arg(u(t)))|_s^c \to \infty \quad \text{при} \quad s \to 0,$$

т. к. $u(s) \to L$ при $s \to 0$. Из полученного противоречия следует $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t) = 0$.

Пусть теперь $v : T \to X$ и $b = \lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t) \in X$. Фиксируем произвольный линейный непрерывный функционал $x^* \in X^*$. Тогда скалярная функция $w(t) = \langle x^*, v(t)\rangle$ и ее производная $Dw(t) = \langle x^*, Dv(t)\rangle$ локально интегрируемы (скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначают отношение двойственности между X^* и X), причем $uDw, Duw \in L_1(T)$. По доказанному $\langle x^*, b\rangle = \lim\limits_{t\to 0} u(t)w(t) = 0$, откуда в силу произвольности $x^* \in X^*$ следует $b = 0$. $\square$

Теорема 2.3. *Пусть $t^{-\mu}u \in L_1((0, s); X)$ для любого $s \in T$. Тогда*

$$sDH_\mu u(s) = u(s) + (\mu - 1)H_\mu u(s). \tag{5}$$

Если к тому же $t^{1-\mu}Du \in L_1((0, s); X)$, то

$$DH_\mu u = H_{\mu-1}Du. \tag{6}$$

Доказательство. Формула (5) получается непосредственным дифференцированием интеграла по переменному верхнему пределу. Докажем формулу (6). Рассмотрим два случая.

1) $\mu \neq 1$. По формуле интегрирования по частям для произвольных $s, t \in T$, $t < s$

$$s^{\mu-1}\int_t^s \xi^{-\mu}u(\xi)d\xi = \frac{1}{1-\mu}\left(u(s) - s^{\mu-1}t^{1-\mu}u(t) - s^{\mu-1}\int_t^s \xi^{1-\mu}Du(\xi)d\xi\right). \tag{7}$$

Если $\operatorname{Re}\mu \neq 1$, то $\lim\limits_{t\to 0} t^{1-\mu} = L$, где $L = 0$ или $L = \infty$. Так как по лемме 2.2 $\lim\limits_{t\to 0} t^{1-\mu}u(t) = 0$, то, устремляя в (7) t к нулю, получим

$$H_\mu u(s) = \frac{1}{1-\mu}\left(u(s) - s^{\mu-1}\int_0^s \xi^{1-\mu}Du(\xi)d\xi\right). \tag{8}$$

Если же $\mu = 1 + ai$, где $a \neq 0$ — вещественное число, то из условия теоремы $t^{1-\mu}Du \in L_1((0, s); X)$ следует, что $Du \in L_1((0, s); X)$, поэтому существует $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = b$. Условие $t^{-\mu}u \in L_1((0, s); X)$ влечет $b = 0$. Так что $\lim\limits_{t\to 0} t^{1-\mu}u(t) = 0$ и (8) имеет место. Итак, при всех $\mu \neq 1$ (8) справедливо. Дифференцируя это равенство, получим (6).

2) $\mu = 1$. Тогда $Du \in L_1((0, s); X)$ и существует $\lim\limits_{t\to 0} u(t) = b$. Так как $t^{-1}u \in L_1((0, s); X)$, то с необходимостью $b = 0$. Поэтому $DH_1 u(s) = \frac{u(s)}{s} = H_0 Du(s)$. $\square$

Далее предполагается, что интервал $T=(0,\tau)$ конечен. Введем весовое пространство Соболева вектор-функций $W^1_{p,\gamma}(T;X)$ как множество всех локально интегрируемых на T функций со значениями в X таких, что $Du\in L_{p,\gamma}(T;X)$. Пространство $W^1_{p,\gamma}(T;X)$ банахово относительно нормы

$$\|u\|_{W_{p,\gamma}(T;X)}=\left(\int_T|t^{-\gamma}Du(t)|^p_X\,dt+\int_S|u(t)|^p_X\,dt\right)^{1/p},$$

где S — фиксированный компакт в T ненулевой меры (различный выбор S приводит лишь к эквивалентным нормировкам). Если $1/q+\gamma>0$, то для $s\in T$

$$\int_0^s|Du(t)|_X\,dt\le\left(\int_0^s t^{\gamma q}dt\right)^{1/q}\left(\int_T|t^{-\gamma}Du|^p_X\,dt\right)^{1/p},$$

так что имеет место непрерывное вложение $W^1_{p,\gamma}(T;X)\subset W^1_1((0,s);X)$, следовательно, любая функция u из $W^1_{p,\gamma}(T;X)$ имеет "след" $u(0)$. Можно показать, что при $1/q+\gamma\le 0$ в пространстве $W^1_{p,\gamma}(T;X)$ имеются бесконечно дифференцируемые на T функции, неограниченные в окрестности нуля. До конца этого параграфа через W обозначается пространство $W^1_{p,\gamma}(T;X)$ при $1/q+\gamma\le 0$ и $W=\{u\in W^1_{p,\gamma}(T;X):u(0)=0\}$ при $1/q+\gamma>0$.

Лемма 2.3. *При $1/q+\gamma\ne 0$ имеет место непрерывное вложение $W\subset L_{p,\gamma+1}(T;X)$.*

Доказательство. Пусть сначала $1/q+\gamma>0$. Тогда для $\mu=0$ выполнены условия теоремы 2.2, в силу которой $t^{-1}u=H_0Du\in L_{p,\gamma}(T;X)$, если $Du\in L_{p,\gamma}(T;X)$, т.е. $u\in L_{p,\gamma+1}(T;X)$. Пусть теперь $1/q+\gamma<0$ или $1/p+(-\gamma)>1$. По теореме 2.2 H_1 ограничен в $L_{q,-\gamma}(T;X^*)$, а потому его сопряженный H_1^* ограничен в $L_{p,\gamma}(T;X)$ (это пространство можно отождествить с замкнутым подпространством сопряженного к пространству $L_{q,-\gamma}(T;X^*)$). Осталось заметить, что для $u\in W$

$$u(\tau)-u(t)=\int_t^\tau Du(s)ds=t(H_1^*Du)(t),$$

откуда следует включение $u\in L_{p,\gamma+1}(T;X)$, т.к. вектор $u(\tau)\in X$ может рассматриваться при $1/q+\gamma<0$ как элемент пространства $L_{p,\gamma+1}(T;X)$. □

Замечание. Вложение $W\subset L_{p,\gamma+1}(T;X)$ точно в том смысле, что вложение W в более узкое пространство $L_{p,\gamma+1+\varepsilon}(T;X)$ при $\varepsilon>0$ неверно. Кроме того, в формулировке леммы исключен случай $\gamma=-1/q$, поскольку в этом случае вложение $W\subset L_{p,\gamma+1}(T;X)$ не выполнено, а справедливо лишь более слабое включение $W\subset L_{p,\gamma+1-\varepsilon}(T;X)$ для любого $\varepsilon>0$; точное вложение имеет место в класс L_p с весом, не являющимся степенным. Этот случай мы опускаем.

Следствие 2.2. Если $Du\in L_{p,\gamma}(T;X)$, то существует $x\in X$, что $u(t)=x+U(t)$, где $U\in L_{p,\gamma+1}(T;X)$ при $1/q+\gamma\ne 0$ и $U\in L_{p,1/p-\varepsilon}(T;X)$ при $\gamma=-1/q$ для произвольного $\varepsilon>0$.

Из доказательства леммы 2.3 видно, что в качестве элемента $x\in X$ нужно взять $u(0)$ при $1/q+\gamma>0$ либо $u(\tau)$ при $1/q+\gamma\le 0$.

Теорема 2.4. *Пусть* $\mathrm{Re}\ \mu<1/q+\gamma+1$. *Тогда*

1) *$H_\mu\in B(W)$ и для всех $u\in W$ справедливо равенство* (6);
2) *если $1/q+\gamma>0$ и $\mathrm{Re}\,\mu<1$, то $H_\mu\in B(W^1_{p,\gamma}(T;X))$ и для всех $u\in W^1_{p,\gamma}(T;X)$ справедливо равенство* (6).

Доказательство. 1) Из условия теоремы следует, что $t^{1-\mu}Du\in L_1(T;X)$ для любой функции $u\in W$. Покажем, что $t^{-\mu}u\in L_1(T;X)$. Действительно, выберем $\varepsilon\in(0,\ 1/q+\gamma+1-\mathrm{Re}\,\mu)$. По лемме 2.3 $W\subset L_{p,\gamma+1-\varepsilon}(T;X)$, поэтому функция

$$|t^{-\mu}u(t)|_X=t^{1+\gamma-\varepsilon-\mathrm{Re}\,\mu}|t^{\varepsilon-\gamma-1}u(t)|_X$$

интегрируема, т.к. первый сомножитель есть элемент пространства $L_q(T)$ в силу неравенства $\varepsilon<1/q+\gamma+1-\mathrm{Re}\,\mu$ (напомним, что интервал T конечен по предположению), а второй — элемент пространства $L_p(T)$ в силу указанного выше вложения. Следовательно, для всех $u \in W$ по теореме 2.3 имеет место равенство (6). Из этого равенства следует теперь, что $H_\mu u \in W^1_{p,\gamma}(T;X)$, поскольку $Du \in L_{p,\gamma}(T;X)$ и $H_{\mu-1}Du \in L_{p,\gamma}(T;X)$ (теорема 2.2). Далее, если $1/q+\gamma>0$, то для $u \in W$ по лемме 2.3 имеем включение $u \in L_{p,\gamma+1}(T;X)$ и, применяя неравенство Гёльдера, получаем оценку

$$|H_\mu u(s)|_X \le cs^{1/q+\gamma+1-\operatorname{Re}\mu}\|t^{-\gamma-1}u\|_p \;\to\; 0 \;\text{ при }\; s \to 0.$$

То есть $(H_\mu u)|_{s=0}=0$ и $H_\mu u \in W$. Ограниченность оператора H_μ в W следует из ограниченности оператора $DH_\mu = H_{\mu-1}D$ в $L_{p,\gamma}(T;X)$ и из вложения $W \subset L_{p,\gamma+1-\varepsilon}(T;X)$.

2) Для произвольной функции $u \in W^1_{p,\gamma}(T;X)$ имеем включение $u-u(0)\in W$. По доказанному выше $H_\mu(u-u(0)) \in W$. Осталось заметить, что $H_\mu(u(0)) = (1-\mu)^{-1}u(0) \in X$ является элементом $W^1_{p,\gamma}(T;X)$ как постоянная функция. $\square$

3. Граничная задача в гильбертовом пространстве

1. *Постановка задачи, существование и единственность решения.* Пусть X_0, X_1 — вещественные сепарабельные гильбертовы пространства, причем X_1 непрерывно и плотно вложено в X_0. Пусть также при $\theta \in [0,1]$ $X_\theta = [X_0,X_1]_\theta$ обозначает промежуточное в смысле теории интерполяции [9] гильбертово пространство. Нормы этих пространств обозначаются через $|\cdot|_\theta$. Для элементов $u,v \in X_0$ через $u\cdot v$ обозначается скалярное произведение этих векторов в X_0. На интервале $T=(0,1)$ рассмотрим следующую задачу с вырождением при $t=0$:

$$-D(t^\alpha a(t)Du(t)) + t^\beta b(t)u(t) = f(t) \;\text{ при }\; t \in T, \quad u|_{\partial T}=0. \tag{9}$$

Относительно входных данных в этом параграфе предполагается

$$1)\ \alpha < \min(1,\beta+2); \quad 2)\ f \in L_{2,\gamma}(T;X_0), \;\text{ где }\; \gamma \ge \alpha/2-1; \tag{10}$$

3) коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ — непрерывные в соответствующих операторных нормах функции $a:[0,1]\to B(X_0)$, $b:[0,1]\to B(X_1,X_0)$, причем при каждом $t\in[0,1]$ операторы $a(t)$, $b(t)$ являются самосопряженными положительно определенными операторами в пространстве X_0 (таким образом, при $X_1 \ne X_0$ оператор $b(t)$ неограничен в X_0 при каждом t).

Задача (1), (2) далее рассматривается как частная реализация (9). Это можно сделать следующим образом. Для $x=(x_1,\dots,x_m)\in Q$ положим $t=x_m \in T$, $x'=(x_1,\dots,x_{m-1})\in\Omega$. Введем пространства

$$X_0 = L_2(\Omega), \quad X_{1/2} = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) = \{u \in W^1_2(\Omega) : u|_{\partial\Omega}=0\}, \quad X_1 = W^2_2(\Omega)\bigcap X_{1/2}, \tag{11}$$

при этом $X_{1/2} = [X_0,X_1]_{1/2}$ [9]. Для каждого $t\in[0,1]$ определим операторы $a(t)\in B(X_0)$, $b(t)\in B(X_1,X_0)$ формулами

$$(a(t)u)(x') = a_{m,m}(x',t)u(x'), \quad (b(t)u)(x') = -\sum_{i,j<m} D_i(a_{ij}(x',t)D_ju(x')). \tag{12}$$

Условия $a_{mm}\in C(\overline{Q})$, $a_{ij}\in C^1(\overline{Q})$ при $i,j<m$ обеспечивают непрерывность в операторных нормах введенных функций $a:[0,1]\to B(X_0)$, $b:[0,1]\to B(X_1,X_0)$. Предполагается также, что $a_{mm}(x)>0$ для всех $x\in\overline{Q}$ и матрица $(a_{ij}(x))_{i,j<m}$ симметрична и положительно определена в R^{m-1}, откуда следует самосопряженность и положительная определенность операторов $a(t)$, $b(t)$ в X_0.

Определим пространство функций, в котором будем искать решение (9). Поскольку $1/2-\alpha/2>0$, то, как было показано в предыдущем параграфе, у функций класса $W^1_{2,-\alpha/2}(T;X_0)$

корректно определены значения в граничных точках интервала T. Положим

$$V = \{u \in W^1_{2,-\alpha/2}(T; X_0) : u|_{\partial T} = 0\} \cap L_{2,-\beta/2}(T; X_{1/2}),$$
$$\|u\|_V = \left(\|t^{\alpha/2} Du\|^2_{2,0} + \|t^{\beta/2} u\|^2_{2,1/2}\right)^{1/2}, \quad \text{где} \quad \|u\|^2_{2,\theta} = \int_T |u(t)|^2_\theta dt.$$

В частности, для пространств (11) V состоит из функций на Q с конечной нормой пространства Соболева с анизотропно вырождающимся весом и удовлетворяющих граничному условию (2)

$$u \in V : \|u\|_V = \left(\int_Q x_m^\alpha |D_m u(x)|^2 + x_m^\beta \sum_{i<m} |D_i u(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty \quad \text{и} \quad u|_{\partial Q} = 0. \tag{13}$$

На пространстве V рассмотрим интегральные формы

$$l(u, v) = \int_T t^\alpha a(t) Du(t) \cdot Dv(t) + t^\beta b(t) u(t) \cdot v(t) dt, \quad \langle f, v \rangle = \int_T f(t) \cdot v(t) dt.$$

Вариационная формулировка (9) заключается в отыскании функции $u \in V$ такой, что

$$l(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V. \tag{14}$$

Из условий на коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ легко получаем

$$|l(u, v)| \le c_1 \|u\|_V \|v\|_V, \quad |l(u, u)| \ge c_0 \|u\|^2_V \quad \forall u, v \in V, \tag{15}$$

т. е. форма l ограничена и эллиптична на V. Далее, по лемме 2.3 имеем вложение $V \subset L_{2,1-\alpha/2}(T; X_0)$. Поэтому

$$|\langle f, v \rangle| \le \|t^{1-\alpha/2} f\|_{2,0} \|t^{\alpha/2-1} v\|_{2,0} \le c \|t^{-\gamma} f\|_{2,0} \|v\|_V, \tag{16}$$

откуда $f \in V^*$. Из (15), (16) и теоремы Ф. Рисса о представлении линейного непрерывного функционала следует существование и единственность решения (14). Установлена

Теорема 3.1. *Для любой правой части $f \in L_{2,\gamma}(T; X_0)$, где $\gamma \ge \alpha/2 - 1$, решение $u(t)$ задачи (9) или эквивалентной ей задачи (14) существует и единственно в пространстве V, и для некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от f, $\|u\|_V \le c \|t^{-\gamma} f\|_{2,0}$.*

Следствие 3.1. Для любой правой части $f \in L_{2,\gamma}(Q)$ ($\Leftrightarrow x_m^{-\gamma} f \in L_2(Q)$), где $\gamma \ge \alpha/2 - 1$, решение $u(x)$ задачи (1), (2) существует и единственно в пространстве (13), и для некоторой постоянной $c > 0$, не зависящей от f, $\|u\|_V \le c \|x_m^{-\gamma} f\|_{L_2(Q)}$.

2. *Инвариантность задачи относительно группы степенных преобразований.* В уравнении (9) сделаем замену переменной $t \to s = t^{1/r}$, где $r > 0$ фиксировано. Тогда (9) запишется в виде

$$- D_s(s^{\hat\alpha} \hat a(s) D_s \hat u(s)) + s^{\hat\beta} \hat b(s) \hat u(s) = \hat f(s) \quad \text{при} \quad s \in T, \quad \hat u(0) = \hat u(1) = 0, \tag{17}$$

где обозначено $\widehat{u}(s) = u(s^r)$, $\widehat{a}(s) = a(s^r)$, $\widehat{b}(s) = r^2 b(s^r)$, $\widehat{f}(s) = r^2 s^{r-1} f(s^r)$, $\widehat{\alpha} = r(\alpha - 1) + 1$, $\widehat{\beta} = r(\beta + 1) - 1$. Кроме того, включение $f \in L_{2,\gamma}(T; X_0)$ равносильно включению $\widehat{f} \in L_{2,\hat\gamma}(T; X_0)$, где $\widehat{\gamma} = r(\gamma + 1/2) - 1/2$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что условия (10) для уравнения (9) переходят в аналогичные для уравнения (17)

$$1)\ \widehat{\alpha} < \min(1, \widehat{\beta} + 2); \quad 2)\ \widehat{f} \in L_{2,\widehat{\gamma}}(T; X_0), \quad \text{где} \quad \widehat{\gamma} \ge \widehat{\alpha}/2 - 1.$$

Таким образом, рассматриваемая задача (9) инвариантна относительно подгруппы преобразований интервала T в себя вида $t \to s = t^{1/r}$ $(r > 0)$. В частности, (9) можно привести к изотропному виду, выбирая r из условия $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$, откуда находим

$$r = \frac{2}{2 + \beta - \alpha}. \tag{18}$$

Что касается непосредственно самих условий (10), то можно сказать, что нарушение одного из них кардинально меняет свойства задачи. Например, при $\gamma < \alpha/2 - 1$ некорректна вариационная задача (14), поскольку интеграл в правой части может быть расходящимся. Тем не менее, как будет показано далее, и в этом случае при необходимом дополнительном ограничении $\gamma > \alpha - 3/2$ решение (9) существует и единственно в определенном классе функций. При $\alpha \geq 1$ функции пространства V не имеют следа при $t = 0$, поэтому граничное условие первого рода на этом конце становится некорректным и следует ставить другие условия. При $\alpha \geq 2 + \beta$ существенно меняются свойства дифференциального оператора в левой части уравнения. Последние два случая требуют отдельного рассмотрения, выходящего за рамки данной статьи.

4. Априорные оценки

На протяжении этого параграфа будет рассматриваться граничная задача

$$Au = f \quad \text{на} \quad T = (0, \tau), \quad u|_{\partial T} = 0 \tag{19}$$

с различными дифференциальными операторами A на T.

1. *Вспомогательная задача.* Начнем с оценок решения (19) для оператора $A = -D(t^\alpha D)$. Введем гильбертово пространство решений $U_{\alpha,\gamma} = U_{\alpha,\gamma}(T)$ как множество функций u с конечной нормой

$$\|u\|_{U_{\alpha,\gamma}} = \left(\|t^{1-\gamma} D^2(t^{\alpha-1}u)\|_{2,0}^2 + \|t^{-\gamma} D(t^{\alpha-1}u)\|_{2,0}^2\right)^{1/2}$$

и удовлетворяющих условию $u(\tau) = 0$.

Лемма 4.1. *Для любой функции $u \in U_{\alpha,\gamma}$ справедлива оценка $|u(t)|_0 \leq ct^{1-\alpha+\min(0,\gamma+1/2)}$ при $\gamma + 1/2 \neq 0$ и $|u(t)|_0 \leq ct^{1-\alpha}\sqrt{|\ln t|}$, если $\gamma = -1/2$. Следовательно, при $\gamma > \alpha - 3/2$ имеет место непрерывное вложение $U_{\alpha,\gamma} \subset C_0([0,\tau]; X_0) = \{u \in C([0,\tau]; X_0) : u|_{\partial T} = 0\}$.*

Доказательство. Пусть $u \in U_{\alpha,\gamma}$. Обозначим $\varphi(t) = t^{\alpha-1}u(t)$. Тогда $D\varphi \in L_{2,\gamma}(T; X_0)$. Разберем два возможных случая.

1) $\gamma > -1/2$. Здесь $L_{2,\gamma}(T; X_0) \subset L_1(T; X_0)$ и $\varphi(s) = \varphi(0) + \int\limits_0^s D\varphi(t)dt$, откуда, оценивая интеграл, получим

$$|u(s)|_0 = |s^{1-\alpha}\varphi(s)|_0 \leq c_0 s^{1-\alpha} + \frac{s^{1-\alpha+\gamma+1/2}}{\sqrt{\gamma+1/2}}\|t^{-\gamma}D\varphi\|_{2,0} \leq cs^{1-\alpha}.$$

2) $\gamma \leq -1/2$. Здесь $\varphi(s) = \varphi(\tau) - \int\limits_s^\tau D\varphi(t)dt$ и $|u(s)|_0 = |s^{1-\alpha}\varphi(s)|_0 \leq c_0 s^{1-\alpha} + s^{1-\alpha}\rho(s)\|t^{-\gamma}D\varphi\|_{2,0}$, где

$$\rho(s) = \frac{s^{\gamma+1/2}}{\sqrt{|\gamma+1/2|}}, \quad \text{если} \quad \gamma < -1/2, \quad \rho(s) = \sqrt{|\ln s|} \quad \text{при} \quad \gamma = -1/2. \quad \square$$

Теорема 4.1. *При $\gamma > \alpha - 3/2$ оператор $A = -D(t^\alpha D)$ осуществляет топологический изоморфизм пространства $U_{\alpha,\gamma}$ на пространство $L_{2,\gamma}(T; X_0)$. Следовательно, для любой функции $f \in L_{2,\gamma}(T; X_0)$ для решения (19) с оператором $A = -D(t^\alpha D)$ справедлива оценка $\|u\|_{U_{\alpha,\gamma}} \leq c\|t^{-\gamma}f\|_{2,0}$.*

Доказательство. Пусть $u \in U_{\alpha,\gamma}$, $\varphi = t^{\alpha-1}u$. Тогда $t^\alpha Du = (1-\alpha)\varphi + tD\varphi$ и $Au = (\alpha-2)D\varphi - tD^2\varphi$, отсюда следует непрерывность оператора A из $U_{\alpha,\gamma}$ в $L_{2,\gamma}(T; X_0)$.

Докажем непрерывность обратного оператора к A. Интегрируя уравнение (19) с $f \in L_{2,\gamma}(T; X_0)$, получим $t^\alpha Du(t) = x_0 + F(t)$, где $x_0 \in X_0$, $DF = -f$ и согласно следствию 2.2 $F \in L_{2,\gamma+1-\varepsilon}(T; X_0)$, причем в этом включении можно положить $\varepsilon = 0$, если $\gamma + 1/2 \neq 0$, в противном случае $\varepsilon > 0$ любое. Отсюда следует включение $t^{-\alpha}F \in L_1(T; X_0)$. Далее, интегрируя равенство $Du(t) = t^{-\alpha}(x_0 + F(t))$ с учетом граничных условий, будем иметь

$$u(s) = \int_0^s t^{-\alpha}F(t)dt - s^{1-\alpha}\int_0^\tau t^{-\alpha}F(t)dt$$

или, вводя функцию $\varphi(s) = s^{\alpha-1}u(s) = H_\alpha F(s) - H_\alpha F(\tau)$ и используя формулы дифференцирования, по теореме 2.4 получим

$$D\varphi(s) = H_{\alpha-1}DF(s) = -H_{\alpha-1}f, \quad sD^2\varphi(s) = (1-\alpha)H_{\alpha-1}f(s) - f(s).$$

Отсюда для решения u получим включение $u \in U_{\alpha,\gamma}$ и его оценку, т. к. $H_{\alpha-1} \in B(L_{2,\gamma}(T; X_0))$ при $\gamma > \alpha - 3/2$ (теорема 2.2). $\square$

Замечание. При $\gamma \le \alpha - 3/2$ теорема не верна.

2. *Задача с постоянными операторными коэффициентами.* Обозначим через $\varphi_j(t)$, $j = 0, 1$, числовые функции, являющиеся линейно независимыми решениями однородной задачи

$$D(t^\alpha Du(t)) + t^\alpha u(t) = 0 \ \text{ на } \ T,$$

которые однозначно определяются из условий $\varphi_0(0) = 1$, $\varphi_0(\tau) = 0$, $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1(\tau) = 1$. Тогда решение задачи (19) с оператором $A = D(t^\alpha D) + t^\alpha I$ представимо интегралом

$$u(s) = \int_T G(s,t)f(t)dt, \tag{20}$$

где функция Грина $G(s,t) = G(t,s) = c_0\varphi_0(s)\varphi_1(t)$ при $t \le s$, $1/c_0 = t^\alpha D\varphi_1(t)|_{t=0}$. Для оценки (20) воспользуемся теоремой 2.1, но прежде установим некоторые свойства функции $\varphi_1(t)$, представив ее в виде $\varphi_1(t) = k_1 t^{1-\alpha}z(t)$, где $k_1 \ne 0$ — некоторая постоянная. Подставляя это выражение в однородное уравнение, получим уравнение для определения $z(t)$:

$$tD^2z(t) + (2-\alpha)Dz(t) - tz(t) = 0, \quad z(0) = 1.$$

Полагая $z(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j t^j$, из последнего уравнения получим (выкладки опускаем, поскольку они стандартны в такого рода рассуждениях) $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $(j+1)(j+2-\alpha)c_{j+1} - c_{j-1} = 0$ для $j \ge 1$, отсюда

$$z(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{2j}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{a_j} = 4^j j! \prod_{k=1}^{j}\left(k + \frac{1-\alpha}{2}\right). \tag{21}$$

Видно, что степенной ряд (21) сходится всюду в комплексной плоскости. С помощью преобразования Лапласа можно представить $z(t)$ в интегральном виде ([10], с. 395)

$$z(s) = \rho\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-\alpha/2}e^{st}dt = 2\rho\int_0^1(1-t^2)^{-\alpha/2}\operatorname{ch} st\, dt, \quad \text{где} \quad \frac{1}{\rho} = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-\alpha/2}dt. \tag{22}$$

Лемма 4.2. *Пусть $\nu > -1$, $1 \le p < \infty$. Тогда*

$$\int_0^s t^\nu z^p(t)dt \le \frac{2^{\frac{|\alpha|}{2}}(8-2\alpha)}{\min(1, 1+\nu)} s^\nu z^p(s) \quad \forall s \in (0,\infty).$$

Доказательство. Докажем утверждение сначала для $\nu = 0$, $p = 1$. Обозначим для краткости $k_0 = \min(1, 2^{-\alpha/2})$, $k_1 = \max(1, 2^{-\alpha/2})$. Тогда для всех $t \in [0,1]$ $k_0 \le (1+t)^{-\alpha/2} \le k_1$ и $k_1/k_0 = 2^{|\alpha|/2}$. Интегрируя (22) по интервалу $(0, s)$ и используя свойства бета-функции $B(p,q)$, получим следующую цепочку неравенств:

$$\int_0^s z(t)dt = 2\rho\int_0^1 (1-t^2)^{-\alpha/2}\frac{\operatorname{sh} st}{t}dt \le 4k_1\rho\int\limits_0^1 (1-t)^{-\alpha/2}\frac{e^{st}-1}{t}dt =$$

$$= 4k_1\rho\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}\int_0^1 (1-t)^{-\alpha/2}t^{n-1}dt = 4k_1\rho\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}B(n,1-\alpha/2) =$$

$$= 4k_1\rho\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{n!}B(n+1,\,1-\alpha/2)\frac{n+1-\alpha/2}{n} \le (8-2\alpha)k_1\rho\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (1-t)^{-\alpha/2}\frac{(st)^n}{n!}dt \le$$

$$\le (8-2\alpha)2^{|\alpha|/2}\rho\int_0^1 (1-t^2)^{-\alpha/2}e^{st}dt \le (8-2\alpha)2^{|\alpha|/2}z(s).$$

Таким образом, лемма справедлива для случая $\nu=0$, $p=1$. Рассмотрим случай $\nu>-1$, $p=1$. Используя разложение (21), получим

$$\int_0^s t^{\nu}z(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_0^s t^{\nu+2n}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{\nu+2n+1}s^{\nu+2n+1} =$$

$$= s^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)a_n}{(\nu+2n+1)(2n+1)}s^{2n+1} \le c_{\nu}s^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2n+1}s^{2n+1} =$$

$$= c_{\nu}s^{\nu}\int_0^s z(t)dt \le c_{\nu}(8-2\alpha)2^{|\alpha|/2}s^{\nu}z(s),$$

где $c_{\nu}=\max(1,\,1/(\nu+1))$. Пусть, наконец, $p>1$. В силу (21) функция $z(t)$ строго возрастающая на положительной полуоси. Тогда

$$\int_0^s t^{\nu}z^p(t)dt = \int_0^s t^{\nu}z(t)z^{p-1}(t)dt \le \int_0^s t^{\nu}z(t)dt\,z^{p-1}(s) \le c_{\nu}(8-2\alpha)2^{|\alpha|/2}s^{\nu}z^p(s). \quad \square$$

Теорема 4.2. *Пусть $\alpha<\beta+2$ и $\alpha-3/2<\gamma<3/2+\beta-\alpha$. При всех $\lambda>0$ оператор $A=-D(t^{\alpha}D)+\lambda t^{\beta}I$ осуществляет изоморфизм пространства $U_{\alpha,\gamma}$ на $L_{2,\gamma}(T;X_0)$. При этом решение задачи* (19) *с указанным оператором A удовлетворяет следующей оценке с постоянной $c=c(\alpha,\beta,\gamma)>0$, не зависящей от $\tau,\lambda>0$,*

$$\|u\|_{U_{\alpha,\gamma}}+\lambda\|t^{\beta-\gamma}u\|_{2,0}\le c\|t^{-\gamma}f\|_{2,0}. \tag{23}$$

Доказательство. Из леммы 4.1 и теоремы 4.1 следует непрерывность оператора A из $U_{\alpha,\gamma}$ в $L_{2,\gamma}(T;X_0)$. Необходимо показать, что задача разрешима в $U_{\alpha,\gamma}$ для всех $f\in L_{2,\gamma}(T;X_0)$ и выполнена оценка (23) с постоянной c, которая не зависит от τ и λ.

Рассмотрим сначала изотропный случай $\alpha=\beta$. Пусть $\lambda=1$. Тогда решение задачи представимо интегралом (20) с функцией Грина $G(s,t)=c_0\varphi_0(s)\varphi_1(t)$ при $t\le s$, где $\varphi_1(t)=k_1t^{1-\alpha}z(t)$, $1/k_1=\tau^{1-\alpha}z(\tau)$. Рассмотрим интегральный оператор

$$Kf(s)=c_0\varphi_0(s)\int_0^s\varphi_1(t)f(t)dt.$$

Обозначим для краткости через $c_{\alpha,\nu}$ постоянную в неравенстве леммы 4.2 для $\nu=2\gamma+2-2\alpha>-1$. Полагая $\theta(t)=t^{2\gamma}\varphi_1(t)$ и используя лемму 4.2 при $p=2$, оценим

$$\frac{K\theta(s)}{\theta(s)}=\frac{c_0k_1^2\varphi_0(s)}{s^{2\gamma}\varphi_1(s)}\int_0^s t^{\nu}z^2(t)dt\le\frac{c_0k_1^2\varphi_0(s)c_{\alpha,\nu}s^{\nu}z^2(s)}{s^{2\gamma}\varphi_1(s)}=c_{\alpha,\nu}c_0\varphi_0(s)\varphi_1(s)=c_{\alpha,\nu}s^{-\alpha}$$

в силу свойства функции Грина $G(s,s)=s^{-\alpha}$. Отсюда по теореме 2.1 получаем оценку

$$\|t^{\alpha-\gamma}Kf\|_{2,0}\le c_{\alpha,\nu}\left\|t^{-\gamma}\frac{\theta}{K\theta}Kf\right\|_{2,0}\le 2c_{\alpha,\nu}\|t^{-\gamma}f\|_{2,0}.$$

Положим теперь $\mu = 2 - 2\gamma > -1$ и $\theta(t) = t^{2\alpha-2\gamma}\varphi_1(t)$. Точно так же, как и выше,

$$\frac{K\theta(s)}{\theta(s)} = \frac{c_0 k_1^2 \varphi_0(s)}{s^{2\alpha-2\gamma}\varphi_1(s)} \int_0^s t^\mu z^2(t)dt \le \frac{c_0 k_1^2 \varphi_0(s) c_{\alpha,\mu} s^\mu z^2(s)}{s^{2\alpha-2\gamma}\varphi_1(s)} = c_{\alpha,\mu} c_0 \varphi_0(s)\varphi_1(s) = c_{\alpha,\mu} s^{-\alpha},$$

отсюда $\|t^\gamma Kg\|_{2,0} \le c_{\alpha,\mu} \left\|t^{\gamma-\alpha}\frac{\theta}{K\theta}Kg\right\|_{2,0} \le 2c_{\alpha,\mu}\|t^{\gamma-\alpha}g\|_{2,0}$, т.е. для сопряженного к K оператора K^* имеем $\|K^*\|_{L_{2,\gamma}\to L_{2,\gamma-\alpha}} = \|K\|_{L_{2,\alpha-\gamma}\to L_{2,-\gamma}} \le 2c_{\alpha,\mu}$. Поскольку $u = Kf + K^*f$, то из полученных оценок следует $\|t^{\alpha-\gamma}u\|_{2,0} \le 2(c_{\alpha,\nu} + c_{\alpha,\mu})\|t^{-\gamma}f\|_{2,0}$. Отсюда и из теоремы 4.1 следует доказательство для случая $\lambda = 1$, т.к. $-D(t^\alpha Du) = f - t^\alpha u$. Случай произвольного $\lambda > 0$ сводится к рассмотренному переходом к новой переменной $t \to s = \sqrt{\lambda}t$, относительно которой уравнение примет вид

$$-D_s(s^\alpha D_s\widehat{u}) + s^\alpha\widehat{u} = \lambda^{\alpha/2-1}\widehat{f} \ \text{ на } \ \widehat{T} = (0, \sqrt{\lambda}\tau),$$

где $\widehat{u}(s) = \widehat{u}(\sqrt{\lambda}t) = u(t)$. По доказанному $\|\widehat{u}\|_{\widehat{U}_{\alpha,\gamma}} + \|s^{\alpha-\gamma}\widehat{u}\|_{2,0} \le c\lambda^{\alpha/2-1}\|s^{-\gamma}\widehat{f}\|_{2,0}$, причем $c = c(\alpha,\gamma)$ не зависит от длины $\widehat{T}$. Переходя в последнем неравенстве к старой переменной $t = s/\sqrt{\lambda}$, получим неравенство (23) при $\alpha = \beta$ с той же самой постоянной c.

В случае $\alpha \ne \beta$ сделаем замену $t \to s = t^{1/r}$, где r определяется из (18), в результате чего уравнение примет вид

$$-D_s(s^{\hat{\alpha}}D_s\widehat{u}) + r^2\lambda s^{\hat{\alpha}}\widehat{u}(s) = \widehat{f}(s) \ \text{ при } \ s \in \widehat{T} = (0, \tau^{1/r}), \quad \widehat{u}|_{\partial\widehat{T}} = 0,$$

где $\widehat{u}(s) = u(s^r)$, $\widehat{f}(s) = r^2 s^{r-1} f(s^r)$, $\widehat{\alpha} = r(\alpha-1)+1$. Как было отмечено в предыдущем параграфе, включение $f \in L_{2,\gamma}(T; X_0)$ равносильно включению $\widehat{f} \in L_{2,\hat{\gamma}}(\widehat{T}; X_0)$, где $\widehat{\gamma} = r(\gamma + 1/2) - 1/2$, причем $\gamma \in (\alpha - 3/2,\ 3/2 + \beta - \alpha)$ тогда и только тогда, когда $\widehat{\gamma} \in (\widehat{\alpha} - 3/2,\ 3/2)$. По доказанному

$$\|\widehat{u}\|_{U_{\hat{\alpha},\hat{\gamma}}} + r^2\lambda\|s^{\hat{\alpha}-\hat{\gamma}}\widehat{u}\|_{2,0} \le c(\widehat{\alpha}, \widehat{\gamma})\|s^{-\hat{\gamma}}\widehat{f}\|_{2,0}.$$

Отсюда, сделав обратную замену $s \to t = s^r$, убеждаемся в справедливости оценки (23). □

Замечание. Интервал $\alpha - 3/2 < \gamma < 3/2 + \beta - \alpha$, указываемый в теореме, не пуст и максимален в том смысле, что при $\gamma \le \alpha - 3/2$ невозможна оценка $\|u\|_{U_{\alpha,\gamma}} \le c\|t^{-\gamma}f\|_{2,0}$, а при $\gamma \ge 3/2 + \beta - \alpha$, вообще говоря, $\|t^{\beta-\gamma}u\|_{2,0} = \infty$ для $u \in U_{\alpha,\gamma}$.

Далее рассматриваются дифференциальные операторы с постоянными операторными коэффициентами $a \in B(X_0)$, $b \in B(X_1, X_0)$, которые считаются самосопряженными и положительно определенными операторами в X_0.

Теорема 4.3. *Пусть $\alpha < \beta + 2$. При $\alpha - 3/2 < \gamma < 3/2 + \beta - \alpha$ оператор $A = -D(t^\alpha aD) + t^\beta b$ осуществляет изоморфизм $U_{\alpha,\gamma} \cap L_{2,\gamma-\beta}(T; X_1)$ на $L_{2,\gamma}(T; X_0)$. При этом имеет место оценка решения задачи*

$$\|u\|_{U_{\alpha,\gamma}} + \|t^{\beta-\gamma}bu\|_{2,0} \le c\|t^{-\gamma}f\|_{2,0}, \tag{24}$$

с постоянной $c = c(\alpha, \beta, \gamma, a)$, не зависящей от τ и b.

Доказательство. Пусть сначала $a = I$ — тождественный оператор. Тогда доказательство сводится к получению оценки $\|t^{\beta-\gamma}bu\|_{2,0} \le c(\alpha,\beta,\gamma)\|t^{-\gamma}f\|_{2,0}$. Используем спектральное представление ([11], с. 375) X_0 на гильбертову прямую сумму $\sum\limits_{i\in J} L_2(\mu_i)$ относительно оператора b, где J — некоторое множество, $\{\mu_i : i \in J\}$ — семейство конечных положительных мер, определенных на борелевских множествах спектра $\sigma(b) \subset (0, +\infty)$. Пусть $\mathcal{U}$ — изоморфизм X_0 на $\sum\limits_{i\in J} L_2(\mu_i)$, осуществляющий спектральное представление относительно b. Тогда по определению $(\mathcal{U}bx)_i(\lambda) = \lambda(\mathcal{U}x)_i(\lambda)$ μ_i–п. в. $\forall i \in J$. Для $f \in L_{2,\gamma}(T; X_0)$ положим $f_i(t,\lambda) = (\mathcal{U}f(t))_i(\lambda)$. Тогда задача $-D(t^\alpha Du) + t^\beta bu = f$, $u|_{\partial T} = 0$ эквивалентна задаче

$$-D_t(t^\alpha D_t\xi_i(t,\lambda)) + t^\beta\lambda\xi_i(t,\lambda) = f_i(t,\lambda) \ \text{ при } \ t \in T, \quad \xi_i(0,\lambda) = \xi_i(\tau,\lambda) = 0$$

для $\lambda \in \sigma(b)$, $i \in J$, где u и ξ связаны соотношением $\xi_i(t,\lambda) = (\mathcal{U}u(t))_i(\lambda)$. По теореме 4.2 имеем

$$\lambda^2 \int_T \left|t^{\beta-\gamma}\xi_i(t,\lambda)\right|^2 dt \le c \int_T \left|t^{-\gamma} f_i(t,\lambda)\right|^2 dt,$$

где $c = c(\alpha,\beta,\gamma)$ не зависит от λ и i. Интегрируя это неравенство по мере μ_i на спектре $\sigma(b)$ и суммируя затем по $i \in J$, получим неравенство, эквивалентное неравенству $\|t^{\beta-\gamma}bu\|_{2,0} \le c\|t^{-\gamma}f\|_{2,0}$ в силу определения спектрального представления $\mathcal{U}$.

Случай произвольного a сводится к $a = I$ умножением уравнения на $a^{-1/2}$. Тогда уравнение примет вид $-D(t^\alpha D\widehat{u}) + t^\beta \widehat{b}\widehat{u} = \widehat{f}$, где $\widehat{u}(t) = a^{1/2}u(t)$, $\widehat{f}(t) = a^{-1/2}f(t)$ и $\widehat{b} = a^{-1/2}ba^{-1/2} \in B(a^{1/2}(X_1), X_0)$. Понятно, что ограниченные операторные множители $a^{1/2}$, $a^{-1/2}$ не влияют на принадлежность функции соответствующему классу. По доказанному

$$\|a^{1/2}t^{1-\gamma}D^2(t^{\alpha-1}u)\|_{2,0} + \|a^{1/2}t^{-\gamma}D(t^{\alpha-1}u)\|_{2,0} + \|a^{-1/2}t^{\beta-\gamma}bu\|_{2,0} \le c\|a^{-1/2}t^{-\gamma}f\|_{2,0},$$

где c зависит только от α, β, γ. Отсюда вытекает (24). $\square$

Следствие 4.1. В условиях теоремы для решения справедлива оценка

$$\|u\|_{U_{\alpha,\gamma}} + \|t^{\beta-\gamma}u\|_{2,1} \le c\|t^{-\gamma}f\|_{2,0},$$

где $c = c(\alpha,\beta,\gamma,a,b)$ не зависит от T.

Доказательство непосредственно следует из (24), т. к. $|x|_1 \le \|b^{-1}\|_{X_0\to X_1}|bx|_0$.

3. *Переменные операторные коэффициенты.* Пусть $a : [0,\tau] \to B(X_0)$, $b : [0,\tau] \to B(X_1, X_0)$ — непрерывные функции в операторных нормах и при каждом $t \in [0,\tau]$ операторы $a(t)$, $b(t)$ являются самосопряженными положительно определенными операторами в пространстве X_0 (для оператор-функций (12) задачи (1), (2) условия, обеспечивающие их непрерывность, были оговорены в § 3). Для функции $a : T \to B(X_0)$ дополнительно предполагается существование производной $a'(t)$, удовлетворяющей условиям

$$1)\ \lim_{t\to 0} t|a'(t)|_{X_0\to X_0} = 0; \quad 2)\ \rho|a'|_{X_0\to X_0} \in L_{2,\gamma}(T), \tag{25}$$

где

$$\rho(t) = \begin{cases} t^{\min(0,\,\gamma+1/2)}, & \text{если } \ \gamma + 1/2 \ne 0; \\ \sqrt{|\ln t|}, & \text{если } \ \gamma = -1/2. \end{cases}$$

Для функции (12) условия (25) примут вид

$$1)\ \lim_{x_m\to 0} x_m \left(\int_\Omega |D_m a(x', x_m)|^2 dx'\right)^{1/2} = 0; \quad 2)\ \int_Q |x_m^{-\gamma}\rho(x_m)D_m a(x)|^2 dx < +\infty.$$

Лемма 4.3. *Пусть $\alpha - 3/2 < \gamma < 3/2 + \beta - \alpha$. Если выполнены условия* (25), *то при достаточно малом $\tau > 0$ дифференциальный оператор $A = -D(t^\alpha a(t)D) + t^\beta b(t)$ осуществляет изоморфизм $U_{\alpha,\gamma} \cap L_{2,\gamma-\beta}(T; X_1)$ на $L_{2,\gamma}(T; X_0)$. Таким образом, для решения задачи* (19) *справедливы двусторонние оценки*

$$\|u\|_{U_{\alpha,\gamma}} + \|t^{\beta-\gamma}u\|_{2,1} \sim \|t^{-\gamma}f\|_{2,0}.$$

Доказательство. Наряду с оператором A рассмотрим дифференциальный оператор $A_0 = -D(t^\alpha a(0)D) + t^\beta b(0)$, который по теореме 4.3 является топологическим изоморфизмом пространства $W = W(T) = U_{\alpha,\gamma}(T) \cap L_{2,\gamma-\beta}(T; X_1)$ на $L_{2,\gamma}(T; X_0)$. Для доказательства достаточно показать, что при достаточно малом $\tau > 0$ разность $A - A_0$ можно сделать сколь угодно малой в норме пространства $B(W(T), L_{2,\gamma}(T; X_0))$. Так как $Au(t) - A_0u(t) = (a(0) - a(t))D(t^\alpha Du) + t^\beta(b(t) -$

$b(0))u - t^\alpha a'(t)Du(t)$, то в силу непрерывности функций a, b и условий (25) при достаточно малом $\tau > 0$ будем иметь

$$\|t^{-\gamma}(Au - A_0 u)\|_{2,0} \le \max_{t\in[0,\tau]} \|a(t) - a(0)\|_{X_0\to X_0}\|u\|_{U_{\alpha,\gamma}} +$$
$$+ \max_{t\in[0,\tau]} \|b(t) - b(0)\|_{X_1\to X_0}\|t^{\beta-\gamma}u\|_{2,1} + \|t^{\alpha-\gamma}a'Du\|_{2,0} \le$$
$$\le \varepsilon\|u\|_W + \sup_{t\in[0,\tau]} \|ta'\|_{X_0\to X_0}\|t^{-\gamma}D(t^{\alpha-1}u)\|_{2,0} + (1-\alpha)\|t^{-\gamma}a't^{\alpha-1}u\|_{2,0} \le$$
$$\le 2\varepsilon\|u\|_W + c\|t^{-\gamma}\rho|a'|_{X_0\to X_0}\|_2\|u\|_{U_{\alpha,\gamma}} \le (2+c)\varepsilon\|u\|_W,$$

где для оценки $|t^{\alpha-1}u(t)|_0$ использована лемма 4.1. □

Теорема 4.4. *Пусть $\alpha - 3/2 < \gamma < 3/2 + \beta - \alpha$ и выполнены условия* (25). *Тогда для дифференциального оператора $A = -D(t^\alpha a(t)D) + t^\beta b(t)$ на $W = U_{\alpha,\gamma} \cap L_{2,\gamma-\beta}(T; X_1)$ имеет место оценка*

$$\|u\|_{U_{\alpha,\gamma}} + \|t^{\beta-\gamma}u\|_{2,1} \le c(\|t^{-\gamma}Au\|_{2,0} + \|\chi_{(\delta,\tau)}Du\|_{2,0})$$

для некоторого $\delta \in (0,\tau)$, где постоянная c не зависит от u.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_j \in C_0^\infty(R) : j = \overline{0,N}\}$ — разбиение единицы интервала $T = (0,\tau)$, подчиненное покрытию $\{T_j : j = \overline{0,N}\}$, где интервалы $T_j = (a_j, b_j)$ достаточно малы и $a_0 < 0 < a_1 < b_0 < a_2 < b_1 < \dots < a_N < b_{N-1} < \tau < b_N$. Обозначим $f = Au$, $u_j = \varphi_j u$, $f_j = \varphi_j f$. Тогда

$$Au_j = f_j - D\varphi_j(D(t^\alpha au) + t^\alpha aDu) - D^2\varphi_j t^\alpha au = g_j.$$

Используя локальные оценки леммы 4.3 для u_j на каждом T_j и затем суммируя их по всем j, получим

$$\|u\|_W = \Big\|\sum_{j=0}^N u_j\Big\|_W \le \sum_{j=0}^N \|u_j\|_W \le c\sum_{j=0}^N \|t^{-\gamma}g_j\|_{2,0} \le \tilde{c}(\|t^{-\gamma}f\|_{2,0} + \|\chi_{(\delta,\tau)}Du\|_{2,0}),$$

т. к. производные $D\varphi_j$, $D^2\varphi_j$ равны нулю в некоторой окрестности $t = 0$, поскольку в этой окрестности $\varphi_0(t) \equiv 1$ и $\varphi_j \equiv 0$ при $j \ge 1$. □

Следствие 4.2. Если $\alpha/2 - 1 \le \gamma < 3/2 + \beta - \alpha$, то дифференциальный оператор $A = -D(t^\alpha a(t)D) + t^\beta b(t)$ осуществляет изоморфизм $U_{\alpha,\gamma} \cap L_{2,\gamma-\beta}(T; X_1)$ на $L_{2,\gamma}(T; X_0)$ и, следовательно, для решения задачи (19) справедливы двусторонние оценки

$$\|u\|_{U_{\alpha,\gamma}} + \|t^{\beta-\gamma}u\|_{2,1} \sim \|t^{-\gamma}f\|_{2,0}.$$

Доказательство сразу следует из теоремы 3.1, т. к. $\|\chi_{(\delta,\tau)}Du\|_{2,0} \le c\|t^{\alpha/2}Du\|_{2,0}$.

Следствие 4.3. Пусть $\alpha - 3/2 < \gamma < 3/2 + \beta - \alpha$ и пространство X_1 компактно вложено в X_0. Тогда дифференциальный оператор $A = -D(t^\alpha a(t)D) + t^\beta b(t)$ является изоморфизмом пространства $W = U_{\alpha,\gamma} \cap L_{2,\gamma-\beta}(T; X_1)$ на $L_{2,\gamma}(T; X_0)$ и для решения задачи (19) справедливы двусторонние оценки $\|u\|_{U_{\alpha,\gamma}} + \|t^{\beta-\gamma}u\|_{2,1} \sim \|t^{-\gamma}f\|_{2,0}$.

Доказательство. Если X_1 компактно вложено в X_0, то при некотором $\mu<\gamma - 0.5(\alpha+\beta)$ пространство $U_{\alpha,\gamma} \cap L_{2,\gamma-\beta}(T; X_1)$ компактно вложено в $W^1_{2,\mu}(T; X_0)$. Отсюда и из оценки $\|u\|_W \le c(\|t^{-\gamma}Au\|_{2,0} + \|t^{-\mu}Du\|_{2,0})$ следует, что $\|t^{-\mu}Du\|_{2,0} \le c_1\|t^{-\gamma}Au\|_{2,0}$ ([12], с. 16). Таким образом, оператор A действует непрерывно и взаимнооднозначно из W на некоторое замкнутое подпространство пространства $L_{2,\gamma}(T; X_0)$. С другой стороны, из следствия 4.2 вытекает, что множество $A(W)$ плотно в $L_{2,\gamma}(T; X_0)$, поскольку содержит функции вида $\chi_{(\varepsilon,\tau)}f$, где $\varepsilon > 0$ и $f \in L_{2,\gamma}(T; X_0)$ любые. Таким образом, $A(W) = L_{2,\gamma}(T; X_0)$ и A — изоморфизм. □

Приведем теперь основной результат, касающийся задачи (1), (2). В этом случае по определению (11) пространство Соболева $X_1 = W_2^2(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ компактно вложено в пространство $X_0 = L_2(\Omega)$. Пространство $W = U_{\alpha,\gamma} \cap L_{2,\gamma-\beta}(T; X_1)$ — это пространство Соболева функций на Q с анизотропным весом, имеющих конечную норму

$$\|u\|_W = \left(\int_Q |x_m^{1-\gamma} D_m^2(x_m^{\alpha-1}u(x))|^2 + |x_m^{-\gamma} D_m(x^{\alpha-1}u(x))|^2 + \sum_{i,j<m} |x_m^{\beta-\gamma} D_i D_j u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

и удовлетворяющих краевому условию $u|_{\partial Q} = 0$. Применительно к рассматриваемому случаю из последнего утверждения получим

Следствие 4.4. Пусть выполнены условия на коэффициенты дифференциального оператора A левой части уравнения (1), указанные выше, и $\alpha - 3/2 < \gamma < 3/2 + \beta - \alpha$. Тогда оператор A является изоморфизмом пространства W на $L_{2,\gamma}(Q)$. Следовательно, для решения задачи (1), (2) имеют место двусторонние оценки $\|u\|_W \sim \|x_m^{-\gamma} f\|_{L_2(Q)}$.

Литература

1. Лизоркин П.И., Никольский С.М. *Эллиптические уравнения с вырождением. Вариационный метод* // ДАН СССР. – 1981. – Т. 257. – № 1. – С. 42–45.
2. Лизоркин П.И., Никольский С.М. *Эллиптические уравнения с вырождением. Дифференциальные свойства решений* // ДАН СССР. – 1981. – Т. 257. – № 2. – С. 278–282.
3. Кыдыралиев С.К., Аширбаева А. *Гладкость решений вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка* // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек, 1991. – Вып. 23. – С. 137–142.
4. Тимербаев М.Р. *Мультипликативное выделение особенности в схемах МКЭ для эллиптических вырождающихся уравнений* // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 42. – № 7. – С. 1086–1093.
5. Соболев С.Л. *Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций.* – М.: Наука, 1989. – 254 с.
6. Харди Г., Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г. *Неравенства.* – М.: Ин. лит., 1948. – 456 с.
7. Ionescu Tulcea A., Ionescu Tulcea C. *Topics in the theory of lifting.* – Berlin–N. Y.: Springer-Verlag, 1969. – 250 p.
8. Adams R.A. *Sobolev spaces.* – New York, San Francisco, London: Academ. press, 1975. – 270 p.
9. Трибель Х. *Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.* – М.: Мир, 1980. – 664 с.
10. Смирнов В.И. *Курс высшей математики.* – 10-е изд. – М.: Наука, 1974. – 672 с.
11. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Спектральная теория.* – М.: Ин. лит., 1966. – 1063 с.
12. Тимербаев М.Р. *Об усиленных пространствах Соболева.* – Казанск. матем. о-во, 1998. – 32 с.

Казанский государственный университет

Поступила 18.06.2002