ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 7 (518)

УДК 517.956

М.Р. ТИМЕРБАЕВ

ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ АНИЗОТРОПНО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА В ТОЧКАХ ВЫРОЖДЕНИЯ

В данной статье доказаны теоремы гладкости и получены априорные оценки в весовых пространствах Соболева решения вырождающегося на части границы модельного уравнения эллиптического типа

$$-\partial_m(x_m^\alpha a_{mm}\partial_m u) - x_m^\beta \sum_{i,j<m} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) = f \tag{1}$$

(∂_i — дифференцирование по x_i) в цилиндрической области $\Omega = \Omega' \times (0,1) \subset R^m$ с граничными условиями

$$x_m^\alpha a_{mm}\partial_m u = 0 \ \text{ на } \ \Gamma, \quad u = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega \setminus \Gamma. \tag{2}$$

Здесь Ω' — область в R^{m-1} с достаточно гладкой границей, параметры α, β определяют степени сингулярности (вырождения при положительных значениях, неограниченности при отрицательных) коэффициентов дифференциального оператора в окрестности $\Gamma = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \overline{\Omega} : x_m = 0\}$; коэффициенты $a_{ij}(x)$ достаточно гладкие и образуют положительно определенную матрицу при каждом $x \in \overline{\Omega}$ (более точно условия на коэффициенты будут сформулированы в разделе 4).

Гладкость решения вырождающегося уравнения для граничных условий Дирихле в весовых нормах пространств Соболева рассматривалась в [1], [2]. Отметим, что поведение решения вырождающегося уравнения существенным образом зависит от типа граничных условий, задаваемых в точках вырождения коэффициентов дифференциального оператора. Так, в [3] было доказано, что в случае условий Дирихле решение в окрестности точек вырождения имеет погранслой, определяемый степенью вырождения коэффициентов, при любой сколь угодно гладкой правой части. Там же установлено, что этот погранслой можно факторизовать, представив его в виде произведения известной сингулярной функции и гладкой, что позволяет строить, несмотря на нерегулярность данных, эффективные конечно-элементные схемы численного решения задачи [4]. Качественно иная картина имеет место в случае условий Неймана на Г. Именно, в работе показано, что в этом случае решение в окрестности Г регулярно и его дифференциально-интегральные свойства в значительной степени определяются соответствующими свойствами правой части, а не вырождением коэффициентов дифференциального оператора.

Для исследования гладкости решения используется дифференциально-операторный подход (см. [5]–[8], а также [3]): задача (1), (2) рассматривается как двухточечная граничная задача вида

$$-Dt^\alpha aDu + t^\beta bu = f \ \text{ в } \ (0,1), \quad t^\alpha aDu(0) = 0, \ \ u(1) = 0,$$

по выделенной переменной $t = x_m \in (0,1)$ в бесконечномерном гильбертовом пространстве функций переменной $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) \in \Omega'$ с операторными коэффициентами $a(t)$, $b(t)$ в этом

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 03-01-00380, 04-01-0821, и Министерства образования, грант № Е02-1.0-189.

пространстве. Таким образом, решение уравнения (1) представляется элементом тензорного произведения пространств функций по переменным x' и t. Особенность этого подхода заключается в том, что исследование свойств решения дифференциально-операторного уравнения удается свести к анализу решения скалярного уравнения с числовым коэффициентом вместо операторного.

Как и в [3], где рассматривалось уравнение (1) с граничными условиями Дирихле, правая часть f считается функцией весового пространства $L_{2,\gamma}(\Omega)$, т. е. $x_m^{-\gamma} f \in L_2(\Omega)$. Теоремы гладкости для (1), (2) устанавливаются при условиях $\alpha < \beta + 2$ и $-1/2 < \gamma < \beta + 1/2$. Заметим, что интервал $(-1/2, \beta + 1/2)$ непуст, только если $\beta > -1$. В работе показано, что при условии $\beta \leq -1$ решения задачи не существует на классе сколь угодно гладких финитных в Ω функций $f(x)$, т. е. ограничение $\beta > -1$ является необходимым для разрешимости.

1. Пространства вектор-функций

1. *Основные обозначения. Оператор типа Харди.* Пусть $\tau > 0$ и $T = (0, \tau)$, X — сепарабельное (вещественное или комплексное) гильбертово пространство со скалярным произведением $x \cdot y$ и нормой $|x|_X = \sqrt{x \cdot x}$, сопряженное к X, отождествляется с X. Пространство всех непрерывных линейных операторов из X в гильбертово пространство Y обозначается через $B(X \to Y)$, а из X в X — через $B(X)$. Для $p \in [1, \infty)$ и вещественного γ через $L_{p,\gamma}(T; X)$ обозначается пространство измеримых функций $f : T \to X$ таких, что функция $t \in T \to t^{-\gamma} |f(t)|_X$ является элементом пространства Лебега $L_p(T)$. Полагаем

$$\|f|L_{p,\gamma}(T; X)\| = \left(\int_T |t^{-\gamma} f(t)|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

Здесь и далее t^γ будет обозначать, в зависимости от контекста, не только степень γ числа t, но и символ степенной функции $t \to t^\gamma$. Как обычно, если $\gamma = 0$ или X совпадает с полем скаляров, то эти символы в обозначении пространства опускаются.

Для положительных на T измеримых функций $a(s)$, $b(s)$ определим формальный интегральный оператор

$$Ku(s) = a(s) \int_0^s b(t) u(t) dt, \tag{3}$$

интеграл в котором понимается в смысле Бохнера в случае X-значной измеримой функции u. Таким образом, измеримая функция $u : T \to X$ принадлежит области определения $D(K)$ оператора K, если $bu \in L_1((0, s); X)$ для любого $s \in T$. Формально сопряженный к нему оператор K^* определяется формулой

$$K^* v(t) = b(t) \int_t^\tau a(s) v(s) ds.$$

Заметим, что пространство $L_{2,\gamma}(T; X)$ содержится в $D(K)$ тогда и только тогда, когда $t^\gamma b \in L_2(0, s)$ для любого $s \in T$, т. е. $b \in L_{2,-\gamma}(0, s)$. Это следует из того, что при всех $u \in L_{2,\gamma}(T; X)$ функция $b(t)u(t) = t^\gamma b(t) t^{-\gamma} u(t)$ должна быть интегрируема на $(0, s)$ по Бохнеру, что равносильно интегрируемости на $(0, s)$ скалярной функции $t^\gamma b(t) \varphi(t)$ при любой $\varphi \in L_2(T)$. Отсюда следует необходимость включения $b \in L_{2,-\gamma}(0, s)$. Следующее утверждение легко выводится из так называемого обобщенного неравенства Харди ([9], с. 120).

Лемма 1.1 ([3]). *Пусть $b \in L_{2,-\gamma}(0, s)$ для любого $s \in T$, $\theta(s) = s^{2\gamma} b(s)$. Если $K\theta(s) \leq c\theta(s)$ почти всюду на T для некоторой постоянной $c > 0$, то интегральные операторы K и K^* ограничены в пространствах $L_{2,\gamma}(T; X)$ и $L_{2,-\gamma}(T; X)$ соответственно и $\|K\|_{L_{2,\gamma} \to L_{2,\gamma}} = \|K^*\|_{L_{2,-\gamma} \to L_{2,-\gamma}} \leq 2c$.*

2. *Пространства дифференцируемых вектор-функций.* Через D обозначим оператор дифференцирования в пространстве X-значных распределений $D'(T;X)$ ([10], с. 18), поэтому $Du = u'$ будет обобщенной производной распределения u. Для натурального m и $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ введем весовое пространство Соболева X-значных функций $H^m_\alpha(T;X) = \{u \in L_{1,\mathrm{loc}}(T;X) : D^m u \in L_{2,\alpha}(T;X)\}$ с нормой

$$\|u|\ H^m_\alpha(T;X)\| = \|D^m u|L_{2,\alpha}(T;X)\| + \|u|L_2(\Delta;X)\|,$$

где $\Delta = [\delta, \tau]$ для некоторого фиксированного $\delta \in (0,\tau)$ (различный выбор δ приведет лишь к эквивалентным нормировкам). В тех случаях, когда интервал T и пространство X подразумеваются из контекста, будем использовать обозначения $L_{2,\gamma}$ и H^m_α.

Заметим, что если $\alpha > -1/2$, то пространство $H^1_\alpha(T;X)$ непрерывно вложено в пространство абсолютно непрерывных X-значных функций $W^1_1(T;X)$, поскольку

$$\int_T |Du(t)|_X dt \le \left(\int_T |t^{-\alpha} Du(t)|^2_X dt\right)^{1/2} \left(\int_T t^{2\alpha} dt\right)^{1/2} < +\infty.$$

Следовательно, для $u \in H^1_\alpha(T;X)$ определен "след" $u|_{t=0} = u(0)$. Будем использовать также обозначение $\dot{H}^1_\alpha(T;X)$ для функций $u \in H^1_\alpha(T;X)$ таких, что $u(\tau) = 0$. Следующее утверждение фактически является переформулировкой леммы 1.1.

Лемма 1.2. *Пусть $\alpha \ne -1/2$. Для $u \in H^1_\alpha(T;X)$ положим $u_0 = u(0)$, если $\alpha > -1/2$ и $u_0 = u(\tau)$, если $\alpha < -1/2$. Тогда*

$$\|u - u_0|L_{2,\alpha+1}(T;X)\| \le \frac{1}{|\alpha + 0{,}5|}\|Du|L_{2,\alpha}(T;X)\|.$$

Лемма 1.3. *Пусть $\gamma > -1/2$ и $\alpha \in (-\infty, +\infty)$. Введем пространство $W = H^2_{\gamma-\alpha}(T;X) \cap H^1_{\gamma-\alpha+1}(T;X)$, наделенное нормой, равной сумме норм пространств, участвующих в пересечении, и определим на W дифференциальные операторы $F = t^\alpha D$, $A = DF = Dt^\alpha D$. Тогда*

(i) $F \in B(W \to W^1_1)$;

(ii) $Fu|_{t=0} = 0$ *для любой функции* $u \in W$;

(iii) *оператор A является изоморфизмом (т. е. непрерывным взаимнооднозначным отображением "на") пространства $\dot{W} = \{v \in W : v(\tau) = 0\}$ на $L_{2,\gamma}$; при этом существуют такие постоянные c_1, c_2, зависящие от α, γ, но не зависящие от τ, что $c_1\|f|L_{2,\gamma}\| \le \|u|W\| \le c_2\|f|L_{2,\gamma}\|$, где $u \in \dot{W}$ есть единственное решение уравнения $Au = f$.*

Доказательство. Так как $Au = t^\alpha u'' + \alpha t^{\alpha-1}u'$, то $A \in B(W \to L_{2,\gamma})$. Поэтому $F \in B(W \to H^1_\gamma)$, откуда при условии $\gamma > -1/2$ следует (i). Далее, в силу (i) для $u \in W$ функция $w = t^\alpha u'$ имеет след в нуле $w(0) \in X$. По условию леммы $w \in L_{2,\gamma+1}$; по лемме 1.2 $w - w(0) \in L_{2,\gamma+1}$. Следовательно,

$$|w(0)|^2_X \int_T |t^{-\gamma-1}|^2 dt = \int_T |t^{-\gamma-1}w(0)|^2_X dt \le 2\int_T |t^{-\gamma-1}(w(0) - w(t))|^2_X dt + 2\int_T |t^{-\gamma-1}w(t)|^2_X dt < \infty,$$

откуда следует, что $w(0) = 0$, т.к. $-\gamma - 1 < -1/2$.

(iii) Для произвольной функции $f \in L_{2,\gamma}$ функция

$$u(s) = -\int_s^\tau t^{-\alpha} \int_0^t f(\xi) d\xi\, dt$$

является, очевидно, решением задачи $Au = f$, $t^\alpha Du(0) = 0$, $u(\tau) = 0$. В силу леммы 1.2 $t^\alpha Du \in L_{2,\gamma+1}$ и $\|Du|L_{2,\gamma-\alpha+1}\| \le 1/(\gamma+1/2)\|f|L_{2,\gamma}\|$. Следовательно, $D^2u = t^{-\alpha}f - \alpha t^{-1}Du \in L_{2,\gamma-\alpha}$ и

$$\|D^2u|L_{2,\gamma-\alpha}\| + \|Du|L_{2,\gamma-\alpha+1}\| \le \frac{|\alpha| + \gamma + 3/2}{\gamma + 1/2}\|f|L_{2,\gamma}\|. \quad \square$$

2. Необходимые условия существования решения задачи Неймана

Пусть функции $a(t)$, $b(t)$ положительны и непрерывны на $(0,\tau]$. Рассмотрим на T обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-DaDu + bu = f \tag{4}$$

с правой частью $f \in L_1(T)$. Под решением задачи (4), удовлетворяющим условию $aDu(0) = 0$, будем понимать локально интегрируемую функцию u такую, что $aDu \in C[0,\tau]$ и $a(t)u'(t) \to 0$ при $t \to 0$. Заметим, что 1) $u \in H^1(\delta,\tau)$ для любого $\delta \in (0,\tau)$; 2) если u — нетривиальное решение однородного уравнения (4), то у функций $u(t)$, $u'(t)$ существует не более одного нуля на полуинтервале $(0,\tau]$, причем в разных точках. Это следует из классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., напр., [11], с. 129), т. к. уравнение регулярно на (δ,τ).

Лемма 2.1. *Пусть $ab \in L_1(T)$. Если $bu \in L_1(0,s)$ для любого $s \in T$ и*

$$0 \le u(s) \le a(s)\int_0^s b(t)u(t)dt,$$

то $u(s) \equiv 0$.

Доказательство. Для степени оператора K (см. (3)) по индукции нетрудно установить формулу

$$K^n u(s) = \frac{a(s)}{(n-1)!}\int_0^s (C(s)-C(t))^{n-1} b(t)u(t)dt, \quad n \ge 1,$$

где $C(s) = \int\limits_0^s a(t)b(t)dt$. Так как $a, b > 0$, то из условия леммы для любого $s \in T$ следует

$$0 \le u(s) \le Ku(s) \le K^2u(s) \le \cdots \le K^{n+1}u(s) =$$
$$= \frac{a(s)}{n!}\int_0^s (C(s)-C(t))^n b(t)u(t)dt \le \frac{a(s)C^n(s)}{n!}\int_0^s b(t)u(t)dt \to 0$$

при $n \to \infty$. □

Теорема 2.1. *Пусть коэффициенты уравнения (4) удовлетворяют условиям $1/a \in L_1(T)$, $a_1 b \in L_1(T)$, где $a_1(s) = \int\limits_0^s \frac{1}{a(t)}dt$. Если $\int\limits_T b(t)dt = +\infty$, то*

(i) *не существует нетривиального решения однородного уравнения $DaDu = bu$ с граничным условием $aDu(0) = 0$;*

(ii) *на классе гладких финитных правых частей $f \in C_0^\infty(T)$ не существует решения (4) с граничными условиями $aDu(0) = 0$, $u(\tau) = 0$.*

Доказательство. (i) Пусть $DaDu = bu$ и $aDu(0) = 0$. Если предположить, что решение u нетривиально, то, как было замечено выше, у функции $u(t)$ существует не более одного нуля на $(0,\tau]$. Поэтому в силу однородности уравнения можем считать, что $u(t) > 0$ на $(0,\delta)$ для некоторого $\delta \in T$. Так как для $0 < t < s < \delta$

$$a(s)u'(s) - a(t)u'(t) = \int_t^s b(\xi)u(\xi)d\xi$$

и $a(t)u'(t) \to 0$ при $t \to 0$, то

1) существует предел $\lim\limits_{t\to 0+0} \int\limits_t^s b(\xi)u(\xi)d\xi = a(s)u'(s) > 0$, откуда $bu \in L_1(T)$;

2) $u(t)$ возрастает на $(0,\delta)$, поэтому существует неотрицательный предел $\lim\limits_{t\to 0+0} u(t)$;

3) т. к. по условию $\int\limits_T b(t)dt = +\infty$ и $bu \in L_1(T)$, то с необходимостью $u(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Обозначим $w(s) = \int\limits_0^s b(t)u(t)dt$. Из однородного уравнения (4) следует $u(s)-u(t) = \int\limits_t^s w(\xi)/a(\xi)d\xi \to u(s)$ при $t \to 0$. Таким образом, $w/a \in L_1(T)$ и для любого $s \in (0,\delta)$

$$0 < u(s) = \int_0^s \frac{1}{a(t)} \int_0^t b(\xi)u(\xi)d\xi\, dt = \int_0^s (a_1(s) - a_1(t))b(t)u(t)dt \le a_1(s) \int_0^s b(t)u(t)dt,$$

где $a_1(s) = \int\limits_0^s \frac{1}{a(t)}dt$. В силу леммы 2.1 $u(s) \equiv 0$ на $(0,\delta)$, следовательно, $u(s) \equiv 0$ на $(0,\tau)$. Полученное противоречие доказывает утверждение (i) теоремы.

(ii) Пусть $f \in C_0^\infty(T)$, $0 \le f(t) \le 1$, $f \not\equiv 0$ и $f(t) = 0$ для $t \in [0,\delta]$, где $\delta \in T$. Предположим, что существует решение задачи (4) с граничными условиями $aDu(0) = 0$, $u(\tau) = 0$. В силу (i) $u(t) = 0$ для всех $t \in [0,\delta]$ и $u(t) \ge 0$ на $[\delta,\tau]$. Тогда

$$0 \le u(s) = \int_0^s \frac{1}{a(t)} \int_0^t b(\xi)u(\xi) - f(\xi)d\xi\, dt \le$$

$$\le \int_0^s (a_1(s) - a_1(t))(b(t)u(t) - f(t))dt \le a_1(s) \int_0^s b(t)u(t)dt \quad \forall s \in T.$$

Применив лемму 2.1, получим, что $u \equiv 0$ на T, что противоречит выбору $f \not\equiv 0$. □

Следствие 2.1. Пусть $a(t) \sim t^\alpha$ (т. е. $0 < c_1 \le a(t)t^{-\alpha} \le c_2$ для некоторых постоянных c_1, c_2), $b(t) \sim t^\beta$ в окрестности $t = 0$, причем $\alpha < \beta + 2$. Для того чтобы существовало решение задачи (4) с граничными условиями $aDu(0) = 0$, $u(\tau) = 0$, необходимо, чтобы $\beta > -1$.

Доказательство. Предположим, что $\beta \le -1$, т. е. $\int\limits_T b\, dt = \infty$. Тогда $\alpha < \beta + 2 \le 1$ и $1/a \in L_1(T)$, $a_1 b \sim t^{1-\alpha+\beta}$, откуда $a_1 b \in L_1(T)$. Таким образом, выполнены все условия теоремы. Следовательно, не существует решения рассматриваемой задачи на классе гладких правых частей. □

3. Весовые оценки решения уравнения со скалярными коэффициентами

В этом разделе рассматриваются двухточечная граничная задача

$$-Dt^\alpha Du + \lambda t^\beta u = f \quad \text{в} \quad T = (0,\tau), \quad t^\alpha Du(0) = 0, \quad u(\tau) = 0 \tag{5}$$

и соответствующая ей однородная задача с неоднородными граничными условиями

$$-Dt^\alpha Du + \lambda t^\beta u = 0 \quad \text{в} \quad T = (0,\tau), \quad t^\alpha Du(0) = u_0, \quad u(\tau) = u_1, \tag{6}$$

где $\lambda > 0$ — произвольный параметр. Установим некоторые свойства функции Грина задачи (5), используя которые, получим оценки весовых норм решений (5) через правую часть с константами, не зависящими от длины интервала τ и параметра $\lambda > 0$. Это позволит установить аналогичные результаты в случае переменных операторных коэффициентов. Ввиду следствия 2.1 всюду далее предполагается $\beta > \max(-1, \alpha - 2)$.

Теорема 3.1. (i) *Существует единственное решение $\psi(t)$ задачи (6), удовлетворяющее условиям $t^\alpha D\psi(0) = 0$, $\psi(\tau) = 1$. Это решение представимо сходящимся в $[0,+\infty)$ рядом $\psi(t) = \sum\limits_{n=0}^\infty a_n t^{\nu n}$, где $\nu = 2 + \beta - \alpha > 0$, $0 < a_n = o(\frac{1}{n!})$.*

(ii) *Существует единственное решение $\varphi(t)$ задачи (6), удовлетворяющее условиям $t^\alpha D\varphi(0) = 1$, $\varphi(\tau) = 0$. Решение имеет вид*

$$\varphi(s) = -\psi(0)\psi(s) \int_s^\tau \frac{1}{t^\alpha \psi^2(t)} dt,$$

где $\psi(t)$ — функция из утверждения (i).

Доказательство. Утверждение (i) докажем сначала для случая $\alpha = \beta$. Тогда уравнение (6) примет вид $u''(t) + \frac{\alpha}{t}u'(t) - \lambda u(t) = 0$. Будем искать решение этого уравнения в виде ряда $u(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n}$. Подставляя $u(t)$ в уравнение, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n(2n-1)a_n t^{2n-2} + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n t^{2n-2} - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} t^{2n-2} = 0.$$

Отсюда, полагая $a_0 = 1$, находим

$$a_n = \frac{\lambda a_{n-1}}{4n(n-1+0{,}5(1+\alpha))} = \cdots = \frac{\lambda^n}{4^n n! \prod\limits_{j=0}^{n-1}(j+0{,}5(1+\alpha))} \quad (n \geq 1).$$

Очевидно, $0 < a_n = o(\frac{1}{n!})$, и ряд сходится для всех t, следовательно, функция $u(t)$ аналитична и по построению удовлетворяет уравнению (6). При этом $t^\alpha u'(t)|_{t=0} = 2a_1 t^{\alpha+1}|_{t=0} = 0$ (поскольку $\alpha = \beta > -1$) и $u(\tau) > 0$. Осталось положить $\psi(t) = u(t)/u(\tau)$, и утверждение (i) в случае $\alpha = \beta$ доказано.

В общем случае в уравнении (6) сделаем замену переменной $t = s^r$, где $r = 2/(2+\beta-\alpha) > 0$. Для функции $\widehat{u}(s) = u(s^r)$ получим уравнение $-Ds^{\hat{\alpha}}D\widehat{u} + r^2\lambda s^{\hat{\alpha}}\widehat{u} = 0$, где $\widehat{\alpha} = r(\alpha - 1) + 1 = r(\beta+1) - 1 > -1$. По доказанному $\widehat{u}(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n s^{2n}$, где коэффициенты a_n вычисляются, как и выше, с заменой λ на $r^2\lambda$ и α на $\widehat{\alpha} = r(\beta+1) - 1$. Обратной заменой $s = t^{1/r}$ получим представление решения $u(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^{\nu n}$, где $\nu = 2 + \beta - \alpha > 0$. При этом для $\psi(t) = u(t)/u(\tau)$ выполнены граничные условия $t^\alpha D\psi(0) = 0$, $\psi(\tau) = 1$. Утверждение (i) доказано и в общем случае.

Для доказательства (ii) воспользуемся формулой

$$\varphi(s) = c\psi(s)\int_s^\tau \frac{1}{t^\alpha \psi^2(t)}dt,$$

которая дает второе линейно-независимое решение однородного уравнения (6). Тогда $\varphi(\tau) = 0$ и

$$s^\alpha\varphi'(s) = cs^\alpha\psi'(s)\int_s^\tau \frac{1}{t^\alpha\psi^2(t)}dt - \frac{c}{\psi(s)} \to -\frac{c}{\psi(0)} \quad \text{при} \quad s \to 0,$$

т. к.

$$0 \leq s^\alpha\psi'(s)\int_s^\tau \frac{1}{t^\alpha\psi^2(t)}dt \leq s^\alpha\psi'(s)\frac{\tau^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{\psi^2(0)(1-\alpha)} \to 0 \quad \text{при} \quad s \to 0,$$

в силу $s^\alpha\psi'(s)|_{s=0} = 0$ и $s\psi'(s)|_{s=0} = 0$. Для выполнения условия $t^\alpha\varphi'(t)|_{t=0} = 1$ нужно положить $c = -\psi(0)$. $\square$

Из последнего утверждения следует существование функции Грина $\Gamma(s,t) = \Gamma(t,s) = c_0\varphi(s)\psi(t)$ $(t < s)$ для задачи (5), где постоянная c_0 удовлетворяет равенству $1/c_0 = s^\alpha(\varphi(s)\psi'(s) - \varphi'(s)\psi(s))$ для любого $s \in T$. Учитывая граничные свойства функций φ, ψ, получаем $1/c_0 = -\psi(0)$ в пределе при $s \to 0$, т. е. $c_0 = -1/\psi(0) < 0$. Таким образом, решение задачи (5) представимо интегралом

$$u(s) = Gf(s) := \int_T \Gamma(s,t)f(t)dt = Kf(s) + K^*f(s) \tag{7}$$

для тех правых частей, для которых интеграл определен. Интегральные операторы K, K^* являются взаимно сопряженными операторами типа Харди и имеют вид

$$Kf(s) = c_0\varphi(s)\int_0^s \psi(t)f(t)dt, \quad K^*f(s) = c_0\psi(s)\int_s^\tau \varphi(t)f(t)dt. \tag{8}$$

Выясним, при каких значениях параметра γ интегральный оператор G в (7) определен на классе правых частей $f \in L_{2,\gamma}$. Для этого понадобятся два вспомогательных утверждения, касающихся свойств функций φ, ψ, определяющих функцию Грина.

Лемма 3.1. *Для всех* $s \in T \quad 0 < c_0\varphi(s) < \frac{1}{s^\alpha \psi'(s)}$.

Доказательство. Заметим, что на интервале T имеют место неравенства $\psi, \psi' > 0$, $\varphi < 0$. Далее, функция $w(s) = s^\alpha \varphi'(s)\varphi(s)$ строго возрастающая, т. к. $w'(s) = s^\alpha \varphi'^2(s) + \lambda s^\beta \varphi^2(s) > 0$. Поскольку $w(\tau) = 0$, то $w(s) < 0$ и, следовательно, $\varphi'(s) > 0$ для всех $s \in T$. Отсюда

$$\frac{1}{c_0} = s^\alpha \varphi(s)\psi'(s) - s^\alpha \varphi'(s)\psi(s) < s^\alpha \varphi(s)\psi'(s) \quad \text{или} \quad 0 < c_0\varphi(s) < \frac{1}{s^\alpha \psi'(s)}. \quad \square$$

Лемма 3.2. *Для любых* $\mu, \eta > -1$

$$\int_0^s t^\eta \psi(t)dt \le \max\left(1, \frac{\mu+1}{\eta+1}\right) s^{\eta-\mu} \int_0^s t^\mu \psi(t)dt.$$

Доказательство. С учетом положительности коэффициентов a_n в разложении ψ имеем

$$\int_0^s t^\eta \psi(t)dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n s^{\nu n+\eta+1}}{\nu n+\eta+1} = s^{\eta-\mu} \sum_{n=0}^\infty \frac{(\nu n+\mu+1)a_n s^{\nu n+\mu+1}}{(\nu n+\eta+1)(\nu n+\mu+1)} \le$$
$$\le \max\left(1, \frac{\mu+1}{\eta+1}\right) s^{\eta-\mu} \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n s^{\nu n+\mu+1}}{\nu n+\mu+1} = \max\left(1, \frac{\mu+1}{\eta+1}\right) s^{\eta-\mu} \int\limits_0^s t^\mu \psi(t)dt. \quad \square$$

Теорема 3.2. (i) *Интегральный оператор K в* (8) *определен на функциях из $L_{2,\gamma}(T;X)$ тогда и только тогда, когда $\gamma > -1/2$, при этом $K \in B(L_{2,\gamma} \to L_{2,\gamma-\beta})$ и*

$$\lambda \|K\|_{L_{2,\gamma} \to L_{2,\gamma-\beta}} \le \max\left(2, \frac{\beta+1}{\gamma+1/2}\right).$$

(ii) *Интегральный оператор K^* в* (8) *непрерывен из $L_{2,\gamma}$ в $L_{2,\gamma-\beta}$ тогда и только тогда, когда $\gamma < \beta + 1/2$, при этом*

$$\lambda \|K^*\|_{L_{2,\gamma} \to L_{2,\gamma-\beta}} \le \max\left(2, \frac{\beta+1}{\beta-\gamma+1/2}\right).$$

(iii) *Интегральный оператор G в* (7) *непрерывен из $L_{2,\gamma}$ в $L_{2,\gamma-\beta}$ тогда и только тогда, когда $-1/2 < \gamma < \beta + 1/2$, при этом*

$$\lambda \|G\|_{L_{2,\gamma} \to L_{2,\gamma-\beta}} \le \max\left(2, \frac{\beta+1}{\gamma+1/2}\right) + \max\left(2, \frac{\beta+1}{\beta-\gamma+1/2}\right).$$

Доказательство. (i) Поскольку ψ положительна на $[0,\tau]$, интегрируемость функции $\psi(t)f(t)$ для произвольной функции $f \in L_{2,\gamma}(T;X)$ будет обеспечена только в случае $\gamma > -1/2$. Пусть это условие выполнено. Положим $\theta(t) = t^{2\gamma}\psi(t)$. Имеем

$$\frac{K\theta(s)}{\theta(s)} = \frac{c_0\varphi(s)\int\limits_0^s t^{2\gamma}\psi^2(t)dt}{s^{2\gamma}\psi(s)} \le \text{ [в силу возрастания } \psi(t)] \le$$

$$\le \frac{c_0\varphi(s)\int\limits_0^s t^{2\gamma}\psi(t)dt}{s^{2\gamma}} \le \text{ [по лемме 3.1] } \le \frac{\int\limits_0^s t^{2\gamma}\psi(t)dt}{s^{2\gamma}s^{\alpha}\psi'(s)} =$$

$$= \frac{\int\limits_0^s t^{2\gamma}\psi(t)dt}{s^{2\gamma}\int\limits_0^s (t^{\alpha}\psi'(t))'dt} = \frac{\int\limits_0^s t^{2\gamma}\psi(t)dt}{\lambda s^{2\gamma}\int\limits_0^s t^{\beta}\psi(t)dt} \le \text{ [по лемме 3.2] } \le$$

$$\le \max\left(1, \frac{\beta+1}{2\gamma+1}\right)\frac{s^{2\gamma-\beta}\int\limits_0^s t^{\beta}\psi(t)dt}{\lambda s^{2\gamma}\int\limits_0^s t^{\beta}\psi(t)dt} = \max\left(1, \frac{\beta+1}{2\gamma+1}\right)\frac{1}{\lambda s^{\beta}}.$$

Применяя теперь к интегральному оператору $\lambda s^{\beta}K$ лемму 1.1, получим оценку в (i).

(ii) Так как K^* и K — интегральные операторы с взаимно транспонированными ядрами, то

$$\|K^*\|_{L_{2,\gamma}\to L_{2,\gamma-\beta}} = \|K\|_{L_{2,\beta-\gamma}\to L_{2,-\gamma}} = \|K\|_{L_{2,\mu}\to L_{2,\mu-\beta}},$$

где $\mu = \beta - \gamma$. Таким образом, K^* непрерывен из $L_{2,\gamma}$ в $L_{2,\gamma-\beta}$ тогда и только тогда, когда K непрерывен из $L_{2,\mu}$ в $L_{2,\mu-\beta}$. Последнее в силу (i) имеет место в том и только том случае, когда $\mu = \beta - \gamma > -1/2$, т. е. при $\gamma < \beta + 1/2$. Оценка для соответствующей операторной нормы K^* вытекает из оценки (i) с заменой γ на $\beta - \gamma$. Утверждение (iii) является простым следствием утверждений (i) и (ii). □

Введем пространство $W = H^2_{\gamma-\alpha}(T;X) \cap H^1_{\gamma-\alpha+1}(T;X) \cap L_{2,\gamma-\beta}(T;X)$ с нормой пересечения и положим $\dot{W} = \{v \in W : v(\tau) = 0\}$. Заметим, что $t^{\alpha}Du(0) = 0$ для $u \in \dot{W}$ по лемме 1.3. Определим на $\dot{W}$ дифференциальный оператор $Au = -Dt^{\alpha}Du + \lambda t^{\beta}u$.

Теорема 3.3. *Для того чтобы решение задачи* (5) *существовало на классе правых частей* $f \in L_{2,\gamma}(T;X)$ *и принадлежало пространству* $\dot{W}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $-1/2 < \gamma < \beta + 1/2$. *При этом условии оператор* A *является изоморфизмом пространства* $\dot{W}$ *на* $L_{2,\gamma}$ *(т. е. непрерывным отображением с непрерывным обратным). Кроме того, имеет место двусторонняя априорная оценка*

$$\|D^2u|L_{2,\gamma-\alpha}\| + \|Du|L_{2,\gamma-\alpha+1}\| + \lambda\|t^{\beta}u|L_{2,\gamma}\| \sim \|f|L_{2,\gamma}\|$$

с постоянными, не зависящими от τ *и* λ, *где* $u \in \dot{W}$ *есть единственное решение уравнения* $Au = f$.

Доказательство. Необходимость условия $-1/2 < \gamma < \beta + 1/2$ вытекает из теоремы 3.2. Пусть оно выполнено. Тогда решение $u \in L_{2,\gamma-\beta}$ представимо интегралом (7), причем по утверждению (iii) теоремы 3.2 имеет место оценка

$$\lambda\|t^{\beta}u|L_{2,\gamma}\| \le \left(\max\left(2, \frac{\beta+1}{\gamma+1/2}\right) + \max\left(2, \frac{\beta+1}{\beta-\gamma+1/2}\right)\right)\|f|L_{2,\gamma}\|.$$

Таким образом, $-Dt^{\alpha}Du = f - \lambda t^{\beta}u \in L_{2,\gamma}$. Применяя лемму 1.3 (iii), получим утверждение теоремы. □

Замечание 1. Так как $\beta > -1$, то интервал $(-1/2, \beta + 1/2)$ возможных значений весового параметра γ непуст и максимален в том смысле, что при $\gamma \le -1/2$ на классе правых частей $f \in L_{2,\gamma}(T;X)$ решения задачи не существует , а при $\gamma \ge \beta + 1/2$ решение задачи, вообще говоря, не принадлежит пространству $\dot{W}$.

Замечание 2. Вторая часть утверждения теоремы означает, что существуют такие постоянные c_1, c_2, не зависящие от τ и λ, что для решения задачи (5) справедливо неравенство

$$c_1\|f|L_{2,\gamma}\| \le \|D^2u|L_{2,\gamma-\alpha}\| + \|Du|L_{2,\gamma-\alpha+1}\| + \lambda\|t^\beta u|L_{2,\gamma}\| \le c_2\|f|L_{2,\gamma}\|.$$

Далее существенно то, что в этой оценке постоянные могут быть выбраны независимо от параметра λ и длины интервала τ.

4. Весовые оценки решения уравнения с операторными коэффициентами

Рассматривается двухточечная граничная задача в гильбертовом пространстве X:

$$-\,Dt^\alpha aDu + t^\beta bu = f \quad \text{в} \quad T = (0,\tau), \quad t^\alpha Du(0) = 0, \quad u(\tau) = 0. \tag{9}$$

Предполагается, что коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ при каждом $t \in [0,\tau]$ являются самосопряженными положительными операторами в пространстве X, причем $a(t) \in B(X)$, $b(t) \in B(X_1 \to X)$, где $X_1 \subset X$ — некоторое гильбертово пространство, непрерывно и плотно вложенное в X, причем $b(t)$ при каждом $t \in [0,\tau]$ является изоморфизмом X_1 на X. Следовательно, оператор $b(t)$ неограничен в X, если $X_1 \ne X$. Далее, предполагается, что функции $a : [0,\tau] \to B(X)$, $b : [0,\tau] \to B(X_1 \to X)$ являются непрерывными функциями в соответствующих операторных нормах и, кроме этого, для функции a выполнены следующие условия:

1) для любого $t \in T$ существует предел $a'(t) = \lim\limits_{h\to 0}(a(t+h) - a(t))/h$ в норме $B(X)$;

2) для любого $\delta \in T$ функция $\|a'(\cdot)\|_{X\to X}$ ограничена на $[\delta,\tau]$;

3) $\lim\limits_{t\to 0+0} t\|a'(t)\|_{X\to X} = 0$.

По аналогии с предыдущим разделом введем пространство $W = H^2_{\gamma-\alpha}(T;X) \cap H^1_{\gamma-\alpha+1}(T;X) \cap L_{2,\gamma-\beta}(T;X_1)$ с нормой пересечения, и решение задачи (9) будем искать в подпространстве $\dot{W} = \{v \in W : v(\tau) = 0\}$ (граничное условие $t^\alpha Du(0) = 0$ для $u \in W$ выполнено автоматически по лемме 1.3).

Сначала распространим теорему 3.3 на случай постоянных операторных коэффициентов $a(t) \equiv a$, $b(t) \equiv b$. Нетривиальность обобщения заключается в замене числового параметра $\lambda > 0$ в уравнении (5) на самосопряженный положительный неограниченный в X оператор b.

Теорема 4.1. *Пусть a, b — постоянные операторы в* (9). *Тогда при $\gamma \in (-1/2, \beta + 1/2)$ оператор $A = -Dt^\alpha aD + t^\beta b$ является изоморфизмом пространства $\dot{W}$ на $L_{2,\gamma}(T;X)$; при этом имеет место двусторонняя оценка с постоянными, независящими от τ:*

$$\|D^2u|L_{2,\gamma-\alpha}(T;X)\| + \|Du|L_{2,\gamma-\alpha+1}(T;X)\| + \|u|L_{2,\gamma-\beta}(T;X_1)\| \sim \|f|L_{2,\gamma}\|,$$

где $u \in \dot{W}$ есть единственное решение уравнения $Au = f$.

Доказательство. Пусть $a = I$ — тождественный оператор. Тогда доказательство сводится к получению оценки $\|bu|L_{2,\gamma-\beta}(T;X)\| \le c(\beta,\gamma)\|f|L_{2,\gamma}(T;X)\|$. Используем спектральное представление ([12], с. 375) X на гильбертову прямую сумму $\sum\limits_{i\in J} L_2(\mu_i)$ относительно оператора b, где J — некоторое множество, $\{\mu_i : i \in J\}$ — семейство конечных положительных мер, определенных на борелевских множествах спектра $\sigma(b) \subset (0,+\infty)$. Пусть $\mathcal{U}$ — изоморфизм X_0 на $\sum\limits_{i\in J} L_2(\mu_i)$, осуществляющий спектральное представление относительно b. Тогда по определению

$$(\mathcal{U}bx)_i(\lambda) = \lambda(\mathcal{U}x)_i(\lambda) \quad \mu_i\text{-п. в.} \quad \forall i \in J.$$

Для $f \in L_{2,\gamma}(T;X)$ положим $f_i(t,\lambda){=}(\mathcal{U}f(t))_i(\lambda)$. Тогда задача $-D(t^\alpha Du)+t^\beta bu{=}f$, $t^\alpha Du(0){=}0$, $u(\tau)=0$ эквивалентна задаче

$$-Dt^\alpha D\xi_i(t,\lambda)+\lambda t^\beta\xi_i(t,\lambda)=f_i(t,\lambda) \ \text{ в } \ T, \quad t^\alpha D\xi_i(0,\lambda)=0, \ \ \xi_i(\tau,\lambda)=0$$

для $\lambda\in\sigma(b)$, $i\in J$, где u и ξ связаны соотношением $\xi_i(t,\lambda)=(\mathcal{U}u(t))_i(\lambda)$. По теореме 3.3 для $\lambda\in\sigma(b)$, $i\in J$ имеем

$$\lambda^2\int_T\left|t^{\beta-\gamma}\xi_i(t,\lambda)\right|^2dt\le c\int_T\left|t^{-\gamma}f_i(t,\lambda)\right|^2dt,$$

где $c=c(\beta,\gamma)$ не зависит от λ и $i\in J$. Интегрируя это неравенство по мере μ_i на спектре $\sigma(b)$ и суммируя затем по $i\in J$, получим неравенство

$$\|bu|L_{2,\gamma-\beta}(T;X)\|\le c(\beta,\gamma)\|f|L_{2,\gamma}(T;X)\|$$

в силу определения спектрального представления $\mathcal{U}$. Отсюда следует утверждение теоремы при $a=I$, поскольку имеет место эквивалентность норм с константами, зависящими только от оператора b: $\|bu|L_{2,\gamma-\beta}(T;X)\|\sim\|u|L_{2,\gamma-\beta}(T;X_1)\|$.

Случай произвольного a сводится к $a=I$ умножением уравнения на $a^{-1/2}$. Тогда уравнение примет вид

$$-D(t^\alpha D\widehat{u})+t^\beta\widehat{b}\widehat{u}=\widehat{f},$$

где $\widehat{u}(t)=a^{1/2}u(t)$, $\widehat{f}(t)=a^{-1/2}f(t)$ и $\widehat{b}=a^{-1/2}ba^{-1/2}\in B(a^{1/2}(X_1)\to X)$. Понятно, что ограниченные операторные множители $a^{1/2}$, $a^{-1/2}$ не влияют на принадлежность функции соответствующему классу. По доказанному

$$\|D^2u|L_{2,\gamma-\alpha}(T;X)\|+\|Du|L_{2,\gamma-\alpha+1}(T;X)\|+\|u|L_{2,\gamma-\beta}(T;X_1)\|\le c\|f|L_{2,\gamma}\|,$$

где c зависит только от α, β, γ. Обратное неравенство очевидно в силу определения пространства W. $\square$

Установим теперь локальную гладкость решения задачи (9) в случае переменных операторных коэффициентов.

Теорема 4.2. *Пусть $a(t)$, $b(t)$ — операторнозначные функции, удовлетворяющие условиям, сформулированным выше. Тогда при $\gamma\in(-1/2,\beta+1/2)$ и достаточно малом τ оператор $A=-Dt^\alpha aD+t^\beta b$ является изоморфизмом пространства $\dot{W}$ на $L_{2,\gamma}(T;X)$.*

Доказательство. "Замораживая" коэффициенты a, b в нуле, введем дифференциальный оператор $A_0=-Dt^\alpha a(0)Du+t^\beta b(0)u$. По предыдущей теореме A_0 является изоморфизмом пространства $\dot{W}$ на $L_{2,\gamma}(T;X)$. Почти очевидно, в силу гладкости a, b операторы A и A_0 будут мало отличаться при малых $\tau>0$. Действительно, для $u\in\dot{W}$

$$Au-A_0u=(a(0)-a(t))Dt^\alpha Du-t^\alpha a'(t)Du+t^\beta(b(t)-b(0))u,$$

поэтому

$$\|Au-A_0u|L_{2,\gamma}(T;X)\|\le(\max_{t\in[0,\tau]}\|a(t)-a(0)\|_{X\to X}+$$
$$+\max_{t\in[0,\tau]}\|ta'(t)\|_{X\to X}+\max_{t\in[0,\tau]}\|b(t)-b(0)\|_{X_1\to X})\cdot\|u|W\|\equiv\rho(\tau)\|u|W\|.$$

Из условий, наложенных на коэффициенты a, b, получаем $\rho(\tau)\to0$ при $\tau\to0$. Поэтому норма $\|A-A_0\|_{\dot{W}\to L_{2,\gamma}}$ может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора достаточно малого $\tau>0$. Заметим далее, что из оценки теоремы 4.1 следует ограниченность сверху нормы $\|A_0^{-1}\|_{L_{2,\gamma}\to\dot{W}}$ постоянной, не зависящей от τ. Следовательно, при достаточно малом $\tau>0$ будет выполнено неравенство $\|A_0^{-1}(A_0-A)\|_{\dot{W}\to\dot{W}}<1$, что обеспечивает существование оператора $A^{-1}\in B(L_{2,\gamma}\to\dot{W})$. $\square$

Теорема 4.3. *Если $-1/2 < \gamma < \beta + 1/2$, то существуют такие постоянные $\delta \in (0,\tau)$, $c = c_\delta > 0$, что для всех $u \in \dot{W}$ справедлива оценка*

$$\|u|W\| \le c(\|Au|L_{2,\gamma}(T;X)\| + \|Du|L_2((\delta,\tau);X)\|).$$

Доказательство. Определим покрытие $\mathcal{O} = \{(a_j,b_j) : j = \overline{0,N}\}$ отрезка $[0,\tau]$ интервалами (a_j,b_j) достаточно малой длины, считая, что $a_0 < 0 < a_1 < b_0 < a_2 < b_1 < \cdots < a_N < b_{N-1} < \tau < b_N$. Пусть $\{\varphi_j \in C_0^\infty(a_j,b_j) : j = \overline{0,N}\}$ — подчиненное покрытию $\mathcal{O}$ разбиение единицы отрезка $[0,\tau]$. Обозначим $\Delta = (a_1,\tau)$, $T_0 = (0,b_0)$, $T_N = (a_N,\tau)$, $T_j = (a_j,b_j)$ при $j = \overline{1,N-1}$. Для $u \in \dot{W}$ положим $f = Au$, $u_j(t) = \varphi_j(t)u(t)$, $f_j(t) = \varphi_j(t)f(t)$. Тогда

$$Au_j = f_j - \varphi_j'(t^\alpha au' + (t^\alpha au)') - \varphi_j'' t^\alpha au \equiv g_j.$$

Так как $\varphi_0(t) = 1$ на $[0,a_1]$, то на этом отрезке $\varphi_0'(t) = \varphi_0''(t) = 0$ и по теореме 4.2

$$\|u_0|W\| = \|u_0|W(T_0)\| \le c_0\|g_0|L_{2,\gamma}(T_0;X)\| \le c_{01}(\|f|L_{2,\gamma}(T;X)\| + \|Du|L_2(\Delta;X)\| + \|u|L_2(\Delta;X)\|).$$

Поскольку $Du_j(a_j) = 0$, $u_j(b_j) = 0$ при $j = \overline{1,N-1}$, а также $Du_N(a_N) = 0$, $u_N(\tau) = 0$, то, применяя теорему 4.2 на интервале T_j $(j = \overline{1,N})$ для невырожденного случая $\alpha = \beta = \gamma = 0$, получим

$$\begin{aligned}\|u_j|W\| &\le c_j(\|D^2u_j|L_2(T_j;X)\| + \|Du_j|L_2(T_j;X)\| + \|u_j|L_2(T_j;X_1)\|) \le \\ &\le c_{j1}\|g_j|L_2(T_j;X)\| \le c_{j2}(\|f|L_{2,\gamma}(T;X)\| + \|Du|L_2(\Delta;X)\| + \|u|L_2(\Delta;X)\|).\end{aligned}$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$\|u|W\| \le \sum_{j=0}^{N} \|u_j|W\| \quad \text{и} \quad \|u|L_2(\Delta;X)\| \le c\|Du|L_2(\Delta;X)\|,$$

т. к. $u(\tau) = 0$. □

Пусть $X_{1/2} = [X_1,X]_{1/2}$ — промежуточное между X_1 и X пространство ([10], с. 23). Введем пространство функций $V = \dot{H}^1_{-\alpha/2}(T;X) \cap L_{2,-\beta/2}(T;X_{1/2})$ с нормой пересечения и форму на этом пространстве

$$\mathfrak{a}(v,u) = \int_T t^\alpha a(t)Dv(t)\cdot Du(t) + t^\beta b(t)^{1/2}v(t)\cdot b(t)^{1/2}u(t)dt.$$

В силу условий на операторные коэффициенты a и b форма $\mathfrak{a}$ непрерывна и эллиптична на V. По теореме Рисса отсюда следует, что для любого линейного непрерывного функционала $F \in V^*$ существует единственное решение вариационной задачи об отыскании функции $u \in V$ такой, что

$$\mathfrak{a}(v,u) = F(v) \tag{10}$$

и для решения справедлива двусторонняя априорная оценка $\|u|V\| \sim \|F|V^*\|$. Покажем, что при условии $\gamma \ge \alpha/2 - 1$ решение $u \in \dot{W}$ задачи (9) является решением задачи (10) с функционалом интегрального вида $F(v) = \int_T v(t)\cdot f(t)dt$. Для этого понадобятся два вспомогательных утверждения.

Лемма 4.1. *Пусть $\gamma > -1/2$ и $\gamma \ge \alpha/2 - 1$. Тогда $W \subset H^1_{-\alpha/2}(T;X) \subset L_{2,-\gamma}(T;X)$.*

Доказательство. Первое включение очевидно, поскольку $W \subset H^1_{\gamma-\alpha+1} \subset H^1_{-\alpha/2}(T;X)$, т. к. $\gamma - \alpha + 1 \ge -\alpha/2$ по условию. Докажем второе. Если $\alpha < 1$, то по лемме 1.2 $H^1_{-\alpha/2}(T;X) \subset W_1^1(T;X) \subset C([0,\tau];X) \subset L_{2,-\gamma}(T;X)$ в силу $\gamma > -1/2$. Если $\alpha > 1$, то снова по лемме 1.2 $H^1_{-\alpha/2}(T;X) \subset L_{2,1-\alpha/2} \subset L_{2,-\gamma}(T;X)$, т. к. $1 - \alpha/2 \ge \gamma$ по условию. Наконец, если $\alpha = 1$, то, выбирая $\varepsilon \in (0,\gamma + 1/2)$, будем иметь $H^1_{-\alpha/2}(T;X) \subset H^1_{-1/2-\varepsilon}(T;X) \subset$ [по лемме 1.2] $\subset L_{2,1/2-\varepsilon}(T;X) \subset L_{2,-\gamma}(T;X)$, т. к. $1/2 - \varepsilon > -\gamma$ в силу выбора ε. □

Из леммы, в частности, следует, что для любых функций $f \in L_{2,\gamma}(T;X)$, $v \in H^1_{-\alpha/2}(T;X)$ скалярная функция $t \to v(t)\cdot f(t)$ интегрируема по Лебегу на T, и поэтому функционал $v \in V \to F(v) = \int\limits_T v(t)\cdot f(t)dt$ непрерывен на V для любой $f \in L_{2,\gamma}(T;X)$.

Лемма 4.2. *В условиях предыдущей леммы для любых функций* $u \in W$, $v \in H^1_{-\alpha/2}(T;X)$ *имеем* 1) $t^\alpha v\cdot u' \in W^1_1(T)$ *и* 2) $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha v\cdot u' = 0$.

Доказательство. 1) Дифференцируя функцию $\varphi = t^\alpha v\cdot u'$, получим $\varphi' = v\cdot(t^\alpha u')' + t^\alpha v'\cdot u'$. Отсюда следует, что $\varphi' \in L_1(T)$, т. к. $t^\alpha v'\cdot u' \in L_1(T)$ в силу первого включения леммы 4.1 и $v\cdot(t^\alpha u')' \in L_1(T)$ в силу второго включения этой же леммы.

2) Положим $w = (t^\alpha u')'$, $\varphi(t) = \int\limits_0^t |w(\xi)|_X d\xi$. Тогда $\varphi' \in L_1(T)$, $\varphi' v \in L_1(T;X)$ и $\varphi v' \in L_1(T;X)$, т. к. $\varphi \in L_{2,\gamma+1}(T)$ и $\gamma+1 \geq \alpha/2$. Поскольку $\varphi(0) = 0$, то ([3], лемма 2.2) $\lim\limits_{t\to 0}\varphi v = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha v\cdot u' = 0$, т. к. $|t^\alpha v(t)\cdot u'(t)| \leq \varphi(t)|v(t)|_X$. □

Из доказанных лемм следует, что если $u \in \dot{W}$ является решением задачи (9) для $f \in L_{2,\gamma}(T;X)$, то при условии $\gamma \geq \alpha/2 - 1$ u является решением задачи (10) с функционалом $F(v) = \int\limits_T v(t)\cdot f(t)dt$. Действительно, умножим уравнение (9) скалярно слева на произвольную функцию $v \in V$ и проинтегрируем равенство по T. Тогда, учитывая лемму 4.2, получаем $\int\limits_T v(t)\cdot Dt^\alpha aDu\,dt = \int\limits_T t^\alpha Dv(t)\cdot aDu\,dt = \int\limits_T t^\alpha aDv(t)\cdot Du\,dt$, что приводит к (10), т. к. $\int\limits_T v\cdot t^\beta bu\,dt = \int\limits_T t^\beta b^{1/2}v\cdot b^{1/2}u\,dt$. Отсюда, в частности следует, что имеет место вложение (при $\gamma \geq \alpha/2 - 1$) $\dot{W} \subset V$.

Теорема 4.4. *Если* $-1/2 < \gamma < \beta + 1/2$ *и* $\gamma \geq \alpha/2 - 1$, *то оператор* A *изоморфно отображает пространство* $\dot{W}$ *на* $L_{2,\gamma}(T;X)$.

Доказательство. Пусть $f \in L_{2,\gamma}(T;X)$ и $u \in V$ — решение задачи (10) с функционалом $F(v) = \int\limits_T v(t)\cdot f(t)dt$. Используем те же построения и обозначения, что и в доказательстве теоремы 4.3. Обозначим через $w_j \in \dot{W}(T_j)$, $j = \overline{0,N}$, решения задач $Aw_j = g_j$ на T_j с соответствующими граничными условиями. Поскольку $g_j \in L_{2,\gamma}$, то эти решения существуют по теореме 4.2 (если интервалы T_j достаточно малы) и $\|w_j|W(T_j)\| \leq c\|g_j|L_{2,\gamma}\|$. С другой стороны, для произвольной функции $v \in V$

$$\int_T f_j v\,dt = \int_T t^\alpha aD(\varphi_j v)\cdot Du\,dt + \int_T \varphi_j t^\beta b^{1/2}v\cdot b^{1/2}u\,dt = \int_T t^\alpha aDv\cdot D(\varphi_j u)dt +$$
$$+\int_T t^\beta b^{1/2}v\cdot b^{1/2}(\varphi_j u)dt + \int_T \varphi' v\cdot(t^\alpha aDu + D(t^\alpha au))dt + \int_T \varphi_j'' v\cdot t^\alpha au\,dt$$

или

$$\int_T t^\alpha aDv\cdot D(\varphi_j u)dt + t^\beta b^{1/2}v\cdot b^{1/2}(\varphi_j u)dt = \int_T v\cdot g_j\,dt,$$

откуда в силу единственности решения следует $\varphi_j u = w_j \in \dot{W}$ для всех $j = \overline{0,N}$. Так как $\sum\varphi_j \equiv 1$ на $[0,\tau]$, то $u \in \dot{W}$ и $\|u|W\| \leq c\|f|L_{2,\gamma}(T;X)\|$. □

Теорема 4.5. *Если* $-1/2 < \gamma < \beta + 1/2$ *и пространство* X_1 *компактно вложено в* X, *то оператор* A *изоморфно отображает пространство* $\dot{W}$ *на* $L_{2,\gamma}(T;X)$.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы, утверждение достаточно доказать для случая $\gamma < \alpha/2-1$. Пусть $\delta \in (0,\tau)$ — постоянная, фигурирующая в теореме 4.3 и $\Delta = (\delta,\tau)$. Так как имеет место естественное непрерывное вложение $W \subset H^2(\Delta;X) \cap L_2(\Delta;X_1)$, а из компактности вложения $X_1 \subset X$ следует компактность вложения $H^2(\Delta;X) \cap L_2(\Delta;X_1) \subset H^1(\Delta;X)$ ([13], теорема 2), то W компактно вложено в $H^1(\Delta;X)$. Отсюда, из теоремы 4.3 и из ([14], теорема 2.6) с учетом того, что нуль-пространство оператора A состоит только из нуля, теперь следует оценка $\|u|W\| \le c\|Au|L_{2,\gamma}(T;X)\| \quad \forall u \in \dot{W}$. Это означает, что оператор A изоморфно отображает $\dot{W}$ на замкнутое в $L_{2,\gamma}(T;X)$ подпространство $F = A(\dot{W})$. Для завершения доказательства осталось показать, что F плотно в $L_{2,\gamma}(T;X)$, и тем самым будет установлено равенство $F = L_{2,\gamma}(T;X)$.

Пусть $f \in L_{2,\gamma}(T;X)$ — произвольная функция, $\delta_n \in T$ — убывающая при $n \to \infty$ к нулю последовательность и f_n — "срезки" функции f на (δ_n, τ), т. е. сужения f на (δ_n, τ), продолженные нулем на $(0, \delta_n)$. Так как $f_n \in L_{2,\alpha/2-1}$ и $\gamma < \alpha/2 - 1$ по предположению, то по теореме 4.4 для каждого $n \ge 1$ существует единственная функция $u_n \in \dot{W}$ такая, что $Au_n = f_n$. Осталось заметить, что $f_n \to f$ в $L_{2,\gamma}(T;X)$, откуда следует плотность F в $L_{2,\gamma}(T;X)$ в силу произвольности f. $\square$

В заключение применим полученные результаты к граничной задаче (1), (2) и установим для нее весовые теоремы гладкости с оценками решения в весовых соболевских нормах. Задачу (1), (2) представим как дифференциально-операторное уравнение (9). Для $x = (x_1, \dots, x_m) \in \Omega$ положим $t = x_m \in T$, $x' = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in \Omega'$. Введем пространства

$$X = L_2(\Omega'), \quad X_1 = \{u \in W_2^2(\Omega') : u|_{\partial\Omega'} = 0\}.$$

Для каждого $t \in [0,1]$ определим операторы $a(t) \in B(X)$, $b(t) \in B(X_1 \to X)$ формулами

$$(a(t)u)(x') = a_{mm}(x',t)u(x'), \quad (b(t)u)(x') = -\sum_{i,j<m} \partial_i(a_{ij}(x',t)\partial_j u(x')).$$

Условия $a_{mm} \in C(\overline{\Omega})$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ при $i,j < m$ обеспечивают непрерывность в операторных нормах введенных функций $a : [0,1] \to B(X)$, $b : [0,1] \to B(X_1 \to X)$. Предполагается также, что $a_{mm}(x) > 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}$ и матрица $\{a_{ij}(x)\}_{i,j<m}$ симметрична и равномерно положительно определена для $x \in \Omega$, откуда следует самосопряженность и положительная определенность операторов $a(t)$, $b(t)$ в X. Для коэффициента $a_{mm}(x)$ предполагается также, что

1) $\partial_m a_{mm} \in C(\overline{\Omega'} \times [\delta, 1])$ для любого $\delta \in (0,1)$;
2) $\max\limits_{x' \in \overline{\Omega'}} |x_m \partial_m a_{mm}(x)| \to 0$ при $x_m \to 0$.

Эти условия обеспечивают выполнимость условий 1)–3) для оператор-функции $a(t)$, сформулированных в начале раздела 4. Введем пространство функций W с конечным квадратом нормы

$$\|u|W\|^2 = \int_\Omega |x_m^{\alpha-\gamma}\partial_m^2 u|^2 + |x_m^{\alpha-\gamma-1}\partial_m u|^2 + \sum_{i,j<m} |x_m^{\beta-\gamma}\partial_{ij}^2 u|^2 + |x_m^{\beta-\gamma}u|^2 dx$$

и удовлетворяющих граничным условиям (2). Поскольку в рассматриваемом случае пространство X_1 компактно вложено в X, то из теоремы 4.5 вытекает

Теорема 4.6. *Если $\alpha < \beta + 2$ и $-1/2 < \gamma < \beta + 1/2$, то дифференциальный оператор в левой части (1) является изоморфизмом пространства W на $L_{2,\gamma}(\Omega)$. Следовательно, для любой правой части $f \in L_{2,\gamma}(\Omega)$ существует единственное решение $u \in W$ задачи (1), (2) и справедлива двусторонняя оценка $\|u|W\| \sim \|f|L_{2,\gamma}(\Omega)\|$.*

Литература

1. Лизоркин П.И., Никольский С.М. *Эллиптические уравнения с вырождением. Дифференциальные свойства* // ДАН СССР. – 1981. – Т. 257. – № 2. – С. 278–282.
2. Кыдыралиев С.К. *О повышении гладкости решений вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 3. – С. 529–531.
3. Тимербаев М.Р. *Весовые оценки решения задачи Дирихле с анизотропным вырождением на части границы* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 1. – С. 60–73.
4. Тимербаев М.Р. *Мультипликативное выделение особенности в схемах МКЭ для эллиптических вырождающихся уравнений* // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 52. – № 7. – С. 1086–1093.
5. Дезин А.А. *Общие вопросы теории граничных задач.* – М.: Наука, 1980. – 207 с.

6. Тепоян Л.П. *Вырождающиеся дифференциально-операторные уравнения второго порядка* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 8. – С. 1366–1367.
7. Ятаев Н.М. *О вырождающихся дифференциально-операторных уравнениях третьего порядка* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 3. – С. 477–481.
8. Дезин А.А. *Дифференциально–операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач* // Тр. Матем. ин-та РАН им. В.А. Стеклова. – 2000. – Т. 229. – 175 с.
9. Соболев С.Л. *Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных функций.* – М.: Наука, 1989. – 254 с.
10. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* – М.: Мир, 1971. – 371 с.
11. Трикоми Ф. *Дифференциальные уравнения.* – М.: Ин. лит., 1962. – 351 с.
12. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Спектральная теория.* – М.: Ин. лит., 1966. – 1063 с.
13. Шахмуров В.Б. *Теоремы вложения в абстрактных анизотропных пространствах и их применения* // ДАН СССР. – 1985. – Т. 281. – № 5. – С. 1068–1072.
14. Тимербаев М.Р. *Пространства с нормой графика и усиленные пространства Соболева.* I // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 5. – С. 55–65.

Казанский государственный университет

Поступила 10.08.2004